Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LMAC, MEBiom e MEFT)

1º Sem. 2010/11 15/Jan/2011 - v.1 Duração: 1h30mn

1. (6,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $x^2 \cos(x)$

(b) $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2+x}$

(c) $\dfrac{1}{3-\cos(x)}$ (considere a mudança de variável $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e use a relação trigonométrica $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$)

2. (1,5 val.) Determine a área da região plana $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 < y < -x+2\right\}$$

3. (1,5 val.) Determine uma função contínua $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x^3}{3} + x^4 = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{2}\, e^{f(\sqrt{t})}\, dt\,,\ \forall x \in [0,+\infty[\ .$$

4. (1,0 val.) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sendo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável não negativa, mostre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

5. (2,0 val.) Mostre que a seguinte série numérica é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}}$$

6. (3,0 val.) Determine se cada uma das seguintes séries numéricas é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\text{(i)} \quad \sum \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2n}+1)(3n-1)} \; ; \qquad \text{(ii)} \quad \sum \frac{\cos(n\pi/3)}{n^2} \; .$$

7. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum \frac{(2x-3)^n}{n+3^n}$$

8. (2,0 val.) Desenvolva a função $f :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3}{2-t}\, dt \; , \; \forall x \in]-\infty, 2[\; ,$$

em séries de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

9. (1,0 val.) Se a série numérica de termos positivos $\sum a_n$ é convergente, o que pode concluir quanto à natureza da série $\sum \log(1 + a_n)$?