Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I (LMAC, MEBiom e MEFT)

$1^{\underline{o}}$ Sem. 2010/11   13/Nov/2010 - v.2   Duração: 1h30mn

1. (3,0 val.)

a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos os conjuntos seguintes:

(i)

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} > 2\right\}$$

(ii) o domínio D da função definida pela expressão:

$$f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

c) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$B = \left]-\infty, -2\right[\cup \left[1, +\infty\right[\;, \quad C = \left]-2, 1\right] \quad \text{e} \quad B \cap C\,.$$

2. (4,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}((x-2)^2)}{x-2}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(e^{3x}+1\right)}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1}.$$

3. (2,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$a)$ $\log\left[\cos(1+x)\arctan\left(e^x\right)\right]$; $b)$ $\dfrac{\cosh\left(1+\operatorname{senh}(x/2)\right)}{\sqrt{x}}$.

4. (2,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

5. (7,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+e) \ , & \text{se } x > 0; \\ c + e^{-x^2} \ , & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

onde c designa uma constante real.

(a) Determine $f(0)$ e o valor de c.

(b) Mostre que f não é diferenciável no ponto 0.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e contradomínio de f.

(d) Justifique que f admite inversa f^{-1} e identifique-a.

(e) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 2 + e$. Calcule o valor de $(f \circ g)'(1)$.

6. (2,0 val.) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \text{onde } 1 < n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que f é constante.