# CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# LMAC E LEFT, 1º SEMESTRE 2025/26

## Informações Gerais

**Corpo Docente**: Miguel Abreu (miguel.abreu@tecnico.ulisboa.pt, responsável, aulas TP e aulas P), Pedro Ferreira dos Santos (pedro.f.santos@tecnico.ulisboa.pt, aulas P)

**Página:** http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/∼mabreu/CI

**Programa**

1. **Números reais: revisões e propriedades.** Indução e Supremo..
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares. Propriedades globais de funções contínuas: Teoremas do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$.** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas). Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em $\mathbb{R}$.** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

**Bibliografia Principal**


- M. Spivak, *Calculus, 3rd Edition*, Cambridge University Press, 2006.
- M. Abreu, R. L. Fernandes e M. Ricou, *Folhas de Cálculo Diferencial e Integral I*, 2009.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 12.ª edição, 2005.
- *Fichas de Exercícios*.


**Horário de Dúvidas e Sala de Estudo**: cf. horários e formato na página da cadeira.

## Avaliação de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30% na nota final - 17 de Outubro, sexta-feira, 18:00.
2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30% na nota final - 05 de Dezembro, sexta-feira, 18:00.
Exame: teste de 60 minutos, com peso de 40% na nota final - 19 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.
Recurso: exame de 2 horas - 04 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.
Nota Final (NF): será o resultado da fórmula

$$\text{NF} = \max\{0,3 * (\text{1MAP45}) + 0,3 * (\text{2MAP45}) + 0,4 * (\text{Exame}) \ ; \quad \text{Recurso}\},$$

sujeito a uma oral de confirmação de nota para NF $\geq 17,5$.
Observações:
- no Recurso é possível, em alternativa, realizar a repescagem de uma, e apenas uma, das seguintes provas: 1MAP45, 2MAP45 ou Exame. Nesse caso, a nota correspondente a esse MAP45/Exame será a maior das notas entre a do MAP45/Exame realizado na época normal e a da correspondente prova de repescagem.

Estas notas de apoio foram compiladas com a ajuda dos professores Hugo Tavares e Simão Correia a partir de material já existente produzido pelos professores Miguel Abreu, Rui Loja Fernandes, Manuel Ricou e Catarina Carvalho do Departamento de Matemática do Técnico. Quaisquer erros aqui presentes são da minha responsabilidade (Prof. Miguel Abreu).

## 1. Números Reais: revisões e propriedades

**Conteúdo**



---

**1.1 Propriedades dos números reais.** Nestas primeiras aulas vamos rever/introduzir alguns conceitos que serão muito úteis (e utilizados) na cadeira: propriedades dos números reais, resolução de equações e inequações, módulos e distâncias, *supremos e infimos*, números naturais e recorrência, e o *método de indução matemática*.

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

associados à contagem de objetos. Recorde-se também que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$. Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$, onde $p_1, \ldots, p_m$ são números primos e $n_1, \ldots, n_m$ expoentes naturais.

O conjunto dos números *inteiros* é dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Observe-se que os inteiros estão naturalmente ordenados,

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots,$$

e que podem ser representados geometricamente como pontos equidistantes numa reta:


De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

juntamente com alguns factos importantes.

**Representação decimal dos números racionais.** Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional; o resultado é sempre ou uma dízima finita, ou uma dízima infinita periódica. Por exemplo tem-se $\frac{1}{3} = 0.(3)$, $\frac{249}{16} = 15.5625$ e $\frac{350}{21} = 16.(6)$. Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração. Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Observe-se que necessariamente se tem $0.(9) = 1$, $1.2(9) = 1.3$, etc (basta repetir o processo anterior para o justificar). Assim, tem-se a seguinte caracterização alternativa do conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \{\text{dízimas finitas ou infinitas periódicas}\}.$$

**Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais.** O conjunto dos racionais é *fechado* para a soma (+) e para o produto (·), ou seja: dados dois racionais $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, a soma $x + y := \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}$ e o produto $x \cdot y := \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ são também números racionais. Recordemos agora algumas propriedades básica das operaçõess:

**P1. Propriedades da Soma.** Dados racionais $a, b, c$:

(1) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;
(2) (Propriedade Associativa) $(a+b)+c = a+(b+c)$. Assim, podemos escrever $a+b+c$ sem qualquer ambiguidade, por não interessar a ordem com que se soma.
(3) (Elemento Neutro) $a + 0 = 0 + a = a$;
(4) (Elemento Simétrico): $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

**P2. Propriedades do Produto.** Dados racionais $a, b, c$:

(a) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;
(b) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Assim, mais uma vez, podemos escrever $abc$ sem qualquer ambiguidade.
(c) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
(e) (Elemento Inverso): $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ para $a \neq 0$ ($\frac{1}{a}$ é também indicado como $a^{-1}$).

Por fim, as operações de multiplicação e soma têm a seguinte relação:

(f) (Propriedade Distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais $a$ e $b$, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

**P3. Propriedades da relação** $\leq$: Dados racionais $a, b, c$,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$; $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

(chamadas respetivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

(ii) (Compatibilidade da soma) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;
(iii) (Compatibilidade do produto) $a \leq b$ e $c > 0$ então $ac \leq bc$.

Por satisfazer estas três listas de propriedades, $\mathbb{Q}$ diz-se um *corpo ordenado*.

É possível, mais uma vez, dar uma interpretação geométrica dos números racionais. Apesar desta ser conhecida e ter sido muito trabalhada ao longo do 3.º ciclo e do secundário, vale a pena relembrar como é feita rigorosamente: estando os números inteiros marcados numa reta de forma equidistante, faz-se o seguinte:

- a um número da forma $\frac{1}{n} > 0$ com $n \in \mathbb{N}$, associamos um ponto $P$ situado à direita da origem, de forma a que o segmento $[0P]$ resulte de uma divisão do segmento unitário em $n$ partes;
- Um racional $\frac{m}{n} > 0$ é associado a um ponto $P$ situado à direita da origem, de forma que o segmento [0P] corresponde à união de $m$ segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$ colocados lado a lado a partir da origem;
- Para números negativos, repete-se o processo mas colocando o ponto $P$ à esquerda da origem.

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta? Ou, perguntando de outra forma: fixada uma unidade de comprimento, será que os números racionais permitem determinar os comprimentos de todos os segmentos de reta possíveis? A resposta é não: basta considerar, por exemplo o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (que, pelo teorema de Pitágoras, mede $\sqrt{2}$, ou seja, um número positivo cujo quadrado é 2).

**Teorema 1.1**

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

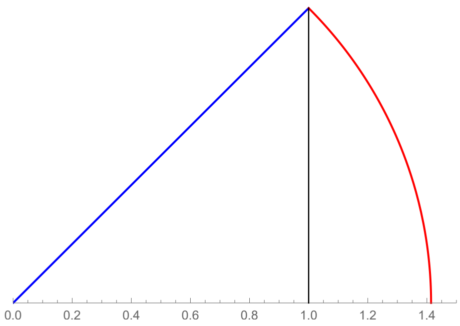


Figura 1. Construção geométrica do número real $\sqrt{2}$.

*Demonstração.* Vamos mostrar este resultado usando o método de "redução ao absurdo", ou seja, supomos que a conclusão NÃO é verdadeira e chegamos a uma contradição (impossibilidade). Logo, a conclusão é obrigatoriamente verdadeira.

Suponhamos então que a conclusão é falsa, isto é, que $\sqrt{2}$ (i.e., um número positivo cujo quadrado é 2) é um racional. Então existem números naturais $p$ e $q$ tais que $\sqrt{2} = p/q$, ou seja,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos assumir que $p$ e $q$ não têm nenhum divisor comum (senão começávamos por simplificar a fração, eliminando esses divisores comuns). Temos

$$p^2 = 2q^2, \tag{1}$$

donde $p^2$ é um número par. Concluímos então que $p$ também é par[1], ou seja $p = 2k$, para algum natural $k \in \mathbb{N}$. Daqui e de (1), segue-se que:

$$4k^2 = p^2 = 2q^2 \;\Rightarrow\; 2k^2 = q^2.$$

Logo, $q^2$ é par, e portanto $q$ também é um número par: $q = 2s$, para algum natural $s \in \mathbb{N}$.

Assim, acabámos de mostrar que tanto $p$ como $q$ possuem 2 como divisor comum, o que contradiz a nossa hipótese de que $p$ e $q$ não tinham divisores comuns. $\square$

É então necessário "completar" $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais. Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1a_2a_3... : p \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ para todo o } i\}$$

(onde, tal como para os racionais, sempre que $a_n = 9$ para todo o $n \geq \bar{n}$, estamos na verdade na presença de uma dízima finita). Como de costume, dizemos que um elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número irracional (exemplo: $\sqrt{2}$, como foi visto no Teorema 1.1. Recorde, como trabalho extra e após a leitura deste capítulo, pode se pode concluir que $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$).

**Primeiro facto importante.** Pode mostrar-se que $\mathbb{R}$, quando munido das operações de multiplicação, adição, e da relação $\leq$, também é um corpo ordenado (i.e., as três listas de propriedades enumeradas anteriormente são válidas para quaiquer **reais** $a, b, c$). Note-se que isto não é tão óbvio

[1]De facto, se $p = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$ for a decomposição em primos do número $p$, então $p^2 = p_1^{2n_1} \ldots, p_m^{2n_m}$ é a decomposição em primos de $p^2$. Note-se que todos os expoentes são maiores ou iguais a 2 nesta última decomposição. Por outro lado, como $p^2$ é par, então 2 é um dos primos da sua decomposição, ou seja, há um dos $p_i$ que é igual a 2. Assim, $p$ é par.

quanto se possa pensar à primeira vista: como se pode dar uma regra /algoritmo para somar ou multiplicar, por exemplo, os dois números reais:

$$x = 1.123123412345123456.... \quad \text{e} \quad y = 2.(3)?$$

Esta observação mostra como a questão é delicada e nada simples. No entanto, mostra-se que há uma forma coerente de o fazer (os detalhes podem por exemplo ser encontrados nesta página).

**Segundo facto importante.** Também se mostra que há uma correspondência biunívoca (e que mantém a ordem) entre o conjunto $\mathbb{R}$ descrito acima e uma reta. Isto mostra-nos que, nesse sentido, o conjunto $\mathbb{R}$ é um conjunto "completo" (no mesmo sentido impreciso em que podemos pensar que a reta é um "contínuo", sem "buracos"). Esta última propriedade é a que marca a grande diferença entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e a que mostra porque se usa, para trabalhar com funções e modelar o mundo real, o conjunto dos números reais. Para de futuro demonstrarmos teoremas, devemos no entanto enunciar esta propriedade de forma algébrica. Para isso, necessitamos de introduzir algumas noções.

**Definição 1.2: Majorantes e Minorantes de um conjunto**

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

i) $A$ diz-se *majorado* se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq ]-\infty, b]$). Neste caso, $b$ diz-se um *majorante* de A;
ii) $A$ diz-se *minorado* se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq [a, +\infty[$. Neste caso, $a$ diz-se um *minorante* de A;
iii) $A$ diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subset [a, b]$).

**Exemplo 1.3:**

Os conjuntos $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$ são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Conj. Majorantes } = [3, +\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } = ]-\infty, 1].$$

O conjunto $\mathbb{R}$ não é majorado nem minorado; $\mathbb{R}^+$ é minorado mas não é majorado. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$:

$$\text{Conj. Majorantes } = [1, +\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } = ]-\infty, 0].$$

Para o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, \ x^2 \leq 2\}$:

$$\text{Conj. Majorantes } = [\sqrt{2}, +\infty[, \qquad \text{Conj. Minorantes } = ]-\infty, 0].$$

**Definição 1.4: Supremo e infímo de um conjunto**

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Define-se o *supremo* e o *ínfimo* de $A$ como:

- $\sup A$ é o menor dos majorantes de $A$, se existir.
- $\inf A$ é o maior dos minorantes de $A$, se existir.

**Exemplo 1.5**

Para os conjuntos $[1,3]$, $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $[1,2[\cup\{3\}$, o supremo é 3 e o ínfimo é 1. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, o supremo é 1 e o ínfimo é 0. O conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, \ x^2 \leq 2\}$ tem 0 como ínfimo e $\sqrt{2}$ como supremo. O conjunto $\mathbb{R}^+$ tem 0 como ínfimo e não admite supremo. O conjunto $\mathbb{R}$ não admite supremo nem ínfimo.

**Exemplo 1.6**

O número $\pi$ (o rácio entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência) pode também ser definido como sendo o supremo do conjunto

$$\{\text{Áreas de polígonos inscritos numa circunferência de raio } 1\};$$

$e = \sup\left\{(1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\right\}$. Pode mostrar-se que $\pi$ e $e$ são números irracionais. Qualquer real pode ser descrito como o supremo de um conjunto com números racionais: por exemplo,

$$0.3(3) = \sup\{0.3\,,\, 0.33\,,\, 0.333\,, ...\};$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots = \sup\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots\}.$$

**Exercício 1.1.** Claramente, $\inf[1,3] = -\sup[-3,-1]$. Em geral, dado $A \subset \mathbb{R}$, mostre que $\inf A = -\sup(-A)$, em que estamos a definir $-A = \{-a : a \in A\}$.

Note-se que $\sup A$ pode ou não pertencer a $A$. No caso em que $\sup A \in A$, é claro que será o maior valor de $A$ (é majorante...)

**Definição 1.7: Máximo e mínimo de um conjunto**

Definimos o *máximo* e *minímo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (*se existirem*); isto é equivalente a dizer que:

- $\max A = M$ se $M$ é majorante e $M \in A$;
- $\min A = m$ se $m$ é minorante e $m \in A$.

Temos sempre $\max A = \sup A$, se existirem.

**Exemplo 1.8**

Temos $\max[1,3] = 3$, $\min[1,3] = 1$; por outro lado, o conjunto $]1,3[$ não admite máximo nem mínimo. Temos $\sup]1,3[= 3$, $\inf]1,3[= 1$, $\sup\{1,2,3\} = 3 = \max\{1,2,3\}$, $\inf\{1,2,3\} = 1 = \min\{1,2,3\}$.
O conjunto $\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ admite máximo (1), mas não mínimo.
O conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ não admite máximo; já o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ tem máximo $\sqrt{2}$.

Estamos agora prontos para enunciar a propriedade de completude dos reais, que corresponde algebricamente ao facto da reta ser um contínuo de pontos.

**Propriedade.** (Princípio do Supremo ou da Completude). Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo.

Segue também que qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo (recordando, do exercício anterior, que $\inf A = -\sup(-A)$).

Este princípio é equivalente a uma propriedade enunciada (mas não demonstrada) no ensino secundário: *Toda a sucessão monótona limitada é convergente.* De facto, se uma sucessão $(u_n)$ for crescente (i.e. $u_n \leq u_{n+1}$ para todo o $n$), então o seu limite é o supremo do conjunto formado pelos seus termos, i.e., $\sup\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}$; se a sucessão for decrescente, devemos tomar o ínfimo. Veremos mais tarde, no último capítulo destes apontamentos, os detalhes da prova desta propriedade.

Temos a seguinte caracterização do supremo e ínfimo de um conjunto, que em muitas situações é útil. Elas traduzem o facto do supremo de um conjunto ser a melhor aproximação deste por excesso, enquanto o ínfimo é a melhor aproximação por defeito.

**Proposição 1.9**

(1) $s = \sup A \Leftrightarrow s$ é majorante e $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$, para qualquer $\varepsilon > 0$,
(2) $a = \inf A \Leftrightarrow a$ é minorante e $[a, a+\varepsilon[ \cap A \neq \emptyset$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

*Demonstração.* Faremos apenas a prova para o supremo; a prova para o ínfimo segue da do supremo e do Exercício 1.1 [porquê?].

Se $s = \sup A$ então (por definição de supremo) $s$ é majorante de $A$, isto é, $x \leq s$, para qualquer $x \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, para ver que $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$, notamos que, se não fosse esse o caso, teríamos $x \leq s - \varepsilon$, para qualquer $x \in A$. Assim, o número $s - \varepsilon$ seria majorante de $A$, o que é impossível, dado que $s - \varepsilon < s$ e $s$ é o menor dos majorantes.

Reciprocamente, suponhamos que $s$ é majorante e que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$. Vamos ver que $s$ é necessariamente o *menor* dos majorantes: se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $t < s$, então $]s - \frac{s-t}{2}, s] \cap A \neq \emptyset$. Como $t < \frac{s+t}{2}$, existe $x \in A$ tal que $t < x \leq s$. Logo $t < x \in A$ e $t$ não é majorante de $A$. □

**1.2 Módulo.** Recordemos:

**Definição 1.10**

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0; \\ -x\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

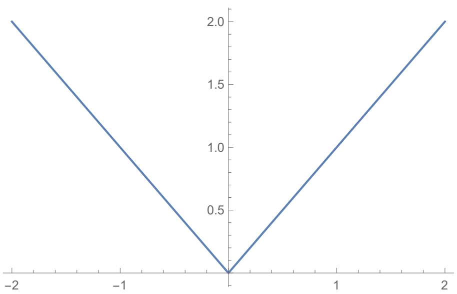


FIGURA 2. O gráfico da função $f(x) = |x|$.

Na interpretação geométrica dos números reais, $|x|$ **representa a distância de** $x$ **à origem da reta numérica. Assim,** $|x-y|$ **representa a distância de** $x$ **a** $y$.


FIGURA 3. O conjunto dos pontos cuja distância a $x = 1/4$ é menor ou igual a 1.

A prova das seguintes propriedades deve ser feita como exercício.

(1) $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
(2) $|-x| = |x|.$
(3) $|xy| = |x||y|, \quad |x|^2 = |x^2| = x^2.$
(4) $|x + y| \leq |x| + |y|$. (desigualdade triangular)
(5) $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|.$

Para resolver inequações com módulos, é útil pensar no módulo como distância: por exemplo, a inequação $|x| < 2$ tem como conjunto solução todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ que estão a uma distância de 0 inferior a 2, ou seja, o intervalo $]-2, 2[$.

Em geral: se $R > 0$,

$$|x| < R \Leftrightarrow x > -R \wedge x < R \Leftrightarrow -R < x < R$$
$$|x| > R \Leftrightarrow x < -R \vee x > R.$$

Mais geralmente, com expressões algébricas tem-se:

$$|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x) \iff f(x) > -g(x) \ \wedge \ f(x) < g(x);$$
$$|f(x)| > g(x) \iff f(x) < -g(x) \ \vee \ f(x) > g(x).$$

**Exemplo 1.11**

:

(1) $|x - 1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \iff x \in ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[.$
(2) $|2x + 3| > 1 \iff 2x + 3 > 1 \vee 2x + 3 < -1 \iff x > -1 \vee x < -2 \iff x \in ]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.$
(3) $|x - 2| < |x + 1| \iff x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$ dado que o conjunto solução corresponde aos pontos cuja distância a 2 é inferior ou igual á distância a $-1$.
OU $|x-2| < |x+1| \iff -|x+1| < x-2 < |x+1| \iff x > \frac{1}{2} \iff x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[.$
(4) $\dfrac{x^2 - 4}{|x + 1|} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq -1.$
(5) $\dfrac{|x - 1| - 1}{|x| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 2.$

Usaremos nalgumas situações a seguinte notação:

**Definição 1.12**

Define-se *vizinhança de centro* $a$ *e raio* $R > 0$,

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < R\} \ = ]\, a - R, a + R\, [$$

como os conjunto dos pontos cuja distância a $a$ é inferior a $R$.

Por exemplo, $V_1(0) = ]-1, 1[$, $V_{0.1}(-1) = ]-0.9, 1.1[$, $V_{\frac{1}{2}}(1) = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

Se estivermos a aproximar um número $a$ por $x$ então podemos encarar $|x - a|$ também como o *erro absoluto* cometido na aproximação. Ao fazermos $|x - a| < \varepsilon$; estamos a admitir uma margem de erro de, no máximo, $\varepsilon$ ($\varepsilon$ - *epsilon*, letra grega correspondente ao $e$ latino, designará habitualmente uma quantidade 'pequena') . Por exemplo, para aproximarmos $\pi$ com erro no máximo de $10^{-2}$ queremos $x$ tal que $|x - \pi| < 10^{-2}$, podemos fazer $x = 3,14$ (por defeito) ou $x = 3,15$ (por excesso) ou $x = 3,1425$ (ou...)

**1.3 Método de Indução.** Suponhamos que se pretende mostrar a seguinte fórmula para a soma dos primeiros $n+1$ números ímpares:

(2) $$\text{Para todo o } n \in \mathbb{N}, \text{ tem-se } 1+3+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Observe-se que pretendemos demonstrar tantas proposições quantos números naturais (ou seja, infinitas proposições): se $P(n)$ for a afirmação $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, pretendemos ver que:

$P(1)$ é verdadeira (o que está correto: $1=1^2$)

$P(2)$ é verdadeira ($1+3=2^2$, correto)

$P(3)$ é verdadeira ($1+3+5=3^2$, correto)

$\vdots$

Claramente não podemos experimentar todos os números naturais, nem pedir a um computador que o faça. É então útil, em muitas situações práticas, o seguinte método de demonstração:

**Método de Indução Matemática**. Seja $P(n)$ uma proposição para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:

(a) $P(1)$ é verdadeira; e

(b) sempre que $P(n)$ é verdadeira para *algum* $n$, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para *todo* o $n \in \mathbb{N}$.

*Demonstração.* Vejamos porque funciona o método: seja $A = \{n \in \mathbb{N} : \; P(n) \text{ é verdadeira}\}$; pretendemos ver que $A=\mathbb{N}$. Ora $1 \in A$. Se existir $k \notin A$ ($k>1$), então por (b) e como $P(1)$ é verdadeira, temos que $P(2)$ é verdadeira; novamente por (b), segue-se que $P(3)$ é verdadeira; repetindo este passo um *número finito* de vezes, obtemos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja $k \in A$, o que é uma contradição. $\square$

A "$P(1)$ verdadeira" chamamos a *base de indução*. Para provar a segunda parte, assumimos que $P(n)$ é verdadeira para dado $n$ fixo - a esta hipótese chamamos *hipótese de indução* - e provamos que nesse caso também será verdadeira para $n+1$, a chamada *Tese*.

Talvez seja útil comparar o método de indução com uma fila de peças de dominós em queda: imaginemos uma fila de peças de dominó, em que:

- damos um empurrão à 1ª peça da fila, para que tombe para a frente;
- sempre que uma peça tomba, a seguinte também tomba.

O resultado disto é que toda a fila de peças cai. Nesta analogia, uma peça tombar no lugar $n$ faz o papel de $P(n)$ ser verdadeira. Outro exemplo ilustrativo: se encontrarmos uma lâmpada mágica e de lá sair um génio, caso lhe peçamos "se estiver vivo num dia, estarei vivo no seguinte", então teremos a vida eterna assegurada (o $P(1)$ será estarmos vivo aquando do pedido; a parte (b) do método corresponde ao nosso pedido).

Depois destas considerações que pretendem tornar mais natural o método, apliquemo-lo de forma mais séria para demonstrar (2), mostrando também outros exemplos.

**Exemplo 1.13**

Mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$1+3+...+(2n-1)=n^2.$$

Se $P(n)$ representa a igualdade acima, temos:

- $P(1)$ é verdadeira: $1=1^2$.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado $n$ (fixo) se tem
$$1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$$
queremos provar que
$$1 + 3 + ... + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2.$$
Mas por HI, temos
$$\underbrace{1 + 3 + ... + (2n-1)}_{n^2} + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$
como queríamos mostrar.

**Exemplo 1.14: Soma dos $n$ primeiros naturais**

Consideremos a seguinte proposição, que queremos mostrar verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
$$P(n) = \text{é válida a seguinte fórmula: } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$
Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.

- $P(1)$: Mostrar que a fórmula dada é válida quando $n = 1$, i.e. que
$$1 = \frac{1(1+1)}{2}\,,$$
o que é claramente verdade.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Assumindo como verdadeira a *hipótese* $P(n)$, i.e.
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$
há que mostrar a validade da *tese* $P(n+1)$, i.e.
$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$
Isto pode ser feito da seguinte forma:
$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad\qquad \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.15**

Provar que $2^n \geq n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $P(1)$ é verdadeira, já que $2^1 \geq 2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado $n$ (fixo) se tem $2^n \geq n + 1$ queremos provar que $2^{n+1} \geq n + 2$. Então, da HI,
$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n + 2 \geq n + 2$$
já que $n > 0$. Por transitividade, $2^{n+1} \geq n + 2$, como queríamos mostrar.

**Exercício 1.2.** Para $a > 0$ fixo, temos a *desigualdade de Bernoulli:*
$$(1+a)^n \geq 1 + na,$$
para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostre esta desigualdade recorrendo ao método de indução.

**Exemplo 1.16**

Provar que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $P(1)$ é verdadeira, já que $4^1 - 1 = 3$ é múltiplo de 3.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução, que para dado $n$ (fixo) $4^n - 1$ é múltiplo de 3, temos
$$4^{n+1} - 1 = (1+3)4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + (4^n - 1)$$
é múltiplo de 3

**Nota 1.3.** (a) Provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ não é suficiente! Por exemplo, seja $P(n)$ a afirmação $\operatorname{sen}(2n\pi) = 2$, $n \in \mathbb{N}$, que é obviamente falsa, para qualquer $n$. Mas é fácil ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{sen}(2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}(2n\pi).$$

(b) Se quisermos provar uma determinada proposição apenas para $n \geq n_0$, começamos por verificar $P(n_0)$ e provamos $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ como antes (é suficiente ver para $n \geq n_0$).

(c) O método de indução é particularmente útil quando os termos envolvidos estão *definidos por recorrência*. Por ex. $r^n$, $n!$ podem definir-se como
$$\begin{cases} 1! = 1, \\ (n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \begin{cases} r^1 = r, \\ r^{n+1} = r \cdot r^n \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Exemplo 1.17: Progressão Geométrica**

Imaginem que estão 10 pessoas numa sala, e a cada hora que passa o número de pessoas duplica. Se $x_n$ designar o número de pessoas passadas $n$ horas, temos uma sucessão definida por recorrência:
$$\begin{cases} x_0 = 10, \\ x_{n+1} = 2x_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$
Calculando alguns valores *conjecturamos* que $x_n = 10 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para mostrar que a nossa conjectura é verdadeira, usamos o método de indução. Seja $P(n)$ a afirmação "$x_n = 10 \cdot 2^n$". Então:

- $P(0)$ é verdadeira: $x(0) = 10$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado $n$ (fixo) se tem $x_n = 10 \cdot 2^n$, então
$$x_{n+1} = 2x_n = 2 \cdot 10 \cdot 2^n = 10 \cdot 2^{n+1}$$
logo $P(n+1)$ também é verdadeira.

Conclui-se pelo método de indução que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**Exercício 1.4.** Mostrar que $n! > 2^n$, para $n \geq 4$. (Nota: Reparem que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é válido, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, mas $P(n)$ é falso para $n = 1, 2, 3$, verdadeiro para $n = 4$.)

**1.4 Somatórios.** Podemos escrever as somas que surgem nos Exemplo 1.13 e Exemplo 1.14 de forma mais abreviada usando *somatórios*, que serão usados ao longo do curso.

Dada uma sucessão de números reais $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$$

(lê-se: "somatório de 1 até $n$ de $a_k$") ou, por recorrência:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Assim, no Exemplo 1.13, a igualdade aí demonstrada escreve-se:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2;$$

no Exemplo 1.14,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O símbolo $\sum$ é um sigma grego maiúsculo, que corresponde ao $S$ do alfabeto latino.

**Nota 1.5.** O índice $k$ do somatório é um *índice mudo*, desempenhando um papel muito auxiliar. Uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n\,.$$

Os extremos inferiores e superiores num somatório podem ser qualquer número. Por exemplo

$$\sum_{k=3}^{100} k^2 = 3^2 + \ldots + 100^2; \qquad \sum_{k=1}^{n-1}(k+2) = \sum_{k=3}^{n+1} k = 3 + \ldots + n + 1.$$

**Exemplo 1.18**

Temos $0.333 = \sum_{i=1}^{3} \frac{3}{10^i}$,

$$0.(3) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{10^i} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

**Proposição 1.19: Propriedades do somatório**

Se $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$ então:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ (propriedade telescópica).

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

Estas propriedades podem ser demonstradas usando o método de indução. Exemplificamos com a propriedade telescópica:

- $P(1)$: temos $\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+2}.$$

**Exemplo 1.20: Soma dos termos de uma progressão geométrica**

Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(3)
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,.$$

(ou seja, que $1 + r + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo o $n \geq 0$.) Usaremos o Método de Indução começando em $n = 0$.

- $P(0)$: Mostrar que a fórmula (3) é válida quando $n = 0$, i.e. que
$$\sum_{k=0}^{0} r^k = \frac{1 - r^1}{1 - r}\,,$$
o que é claramente verdade (ambos os termos são iguais a 1).
Nota: por definição $r^0 = 1$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.
$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,,\ \text{para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0\,,$$
há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.
$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,,\ \text{para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0\,.$$
Isto pode ser feito da seguinte forma:
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,. \end{aligned}$$

**Material extra para uma melhor compreensão da distribuição dos racionais e irracionais em $\mathbb{R}$.**

Note-se desde já que, da definição do conjunto $\mathbb{R}$ e da caracterização de $\mathbb{Q}$ como o conjunto das dízimas finitas e periódicas, se vê imediatamente que:

**Proposição 1.21**

Sejam $a < b$ dois números reais. Então existem $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $x, y \in ]a, b[$.

*Demonstração.* Suponhamos que $0 \leq a < b$ (os outros casos casos demonstram-se de forma semelhante), com

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \qquad \text{e} \qquad b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

Uma vez que $a$ é menor que $b$, é possível tomar o primeiro inteiro $m$ tal que $\alpha_m < \beta_m$. Seja $n > m$ um inteiro em que $\alpha_n \neq 9$; então o número

$$c = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m \dots \dots (\alpha_n + 1)\, 0 \dots 0 \dots$$

é um racional que pertence ao intervalo $]a, b[$.

A construção de um irracional é deixada como exercício. Sugere-se começar por exemplos específicos: tomando por exemplo os conjuntos $]0.12123123412345 \dots 0.122122122 \dots [$ e $]0.(3), 1[$, determinando explicitamente irracionais nestes conjuntos). □

Daqui segue imediatamente que:

- Entre quaisquer dois números reais há *infinitos* números racionais e *infinitos* números irracionais.
- Qualquer número real pode ser aproximado com erro arbitrariamente pequeno por racionais (e por irracionais também...).

(justifique; se necessário, comece por pensar em casos concretos).

**Material extra: construção axiomática dos números reais**

O que vimos atrás foi uma construção, por etapas, dos números reais: começou-se por definir $\mathbb{N}$, com isto definiu-se $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e por fim $\mathbb{R}$. Note-se no entanto que na passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não demos todos os detalhes; é de facto um pormenor delicado a forma como se pode introduzir o que é verdadeiramente um número real. Há muitas formas de o fazer e, ao longo da história, tem havido várias propostas para todos os gostos, todas equivalentes (os mais interessados podem consultar esta página e/ou conversar com o professor).

Como material extra, recomendamos a leitura do método axiomático como forma de introduzir os números reais, onde se segue o caminho oposto ao que seguimos nas aulas: começa-se por definir $\mathbb{R}$ como um conjunto onde há duas operações, $+$ e $\cdot$, que verificam um certo número de propriedades. Depois disso (e apenas depois) define-se $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. É a construção seguida pela maior parte dos livros por ser sucinta e eficaz. Para ver todos os detalhes desta abordagem, recomendamos a leitura do primeiro capítulo dos apontamentos disponíveis online aqui); para uma versão resumida, recomendamos a leitura do Guia das Aulas Teóricas 1–6 neste link (da autoria do Prof. João Teixeira Pinto).

# 2. Funções Reais de Variável Real

**Conteúdo**



---

Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, i.e.

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \in D &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

O conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ onde a função $f$ está definida é designado por *domínio* de $f$. O *contradomínio* de $f$ é o conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}\,.$$

Uma função $f$ diz-se *majorada* (respectivamente *minorada*) se existir $M \in \mathbb{R}$ (respet., $m \in \mathbb{R}$) tal que $f(x) \le M$ (respet., $f(x) \ge m$) para todo o $x \in D$. Uma função que é simultaneamente majorada e minorada diz-se *limitada*. Note-se (fazendo a ligação à Definição Definição 1.2 do capítulo anterior), que isto corresponde a dizer que o conjunto $f(D)$ é majorado, minorado ou limitado, respetivamente.

O *gráfico* de uma função $f$ é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\text{gráfico de } f \;= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in D \text{ e } y = f(x)\big\}\,.$$

É muitas vezes útil esboçar este conjunto (já o fizemos na verdade para a função módulo). No entanto, isto nem sempre é fácil ou mesmo possível (veja-se o Exemplo 2.23 à frente).

Uma função $f$ com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\begin{aligned} \textit{par} \text{ se } & f(x) = f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,, \\ \textit{ímpar} \text{ se } & f(x) = -f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,, \\ \textit{crescente} \text{ se } & (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2))\ ,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,, \\ \text{e } \textit{decrescente} \text{ se } & (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2))\ ,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,. \end{aligned}$$

Usamos a terminologia *estritamente crescente* e *estritamente decrescente* quando a última desigualdade das duas linhas anteriores é estrita.

Uma função $f$ com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\textit{periódica} \text{ com } \textit{período } T > 0 \text{ se } f(x+T) = f(x)\,,\ \forall\, x \in D\,.$$

Recorde-se que uma função é par se a sua representação gráfica for simétrica em relação ao eixo $Oy$; ímpar se for simétrica em relação à origem; periódica de período $T$ se o gráfico permanecer invariante após uma translação horizontal segundo o vetor $(T, 0)$.

**2.1 Classes de funções elementares.** Recordemos alguns exemplos de funções elementares já vossas conhecidas.

**Exemplo 2.1.** *Funções polinomiais* são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,,\ \text{com } c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

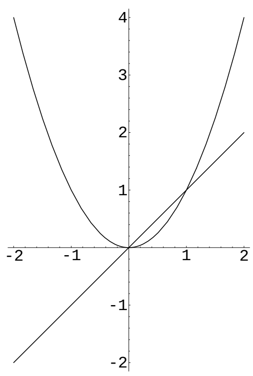


FIGURA 4. Gráfico das funções polinomiais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. A primeira é ímpar, a segunda par.

Veremos que, quando uma função polinomial tem grau ímpar, o seu contradomínio é todo o $\mathbb{R}$, enquanto quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$. A Figura 4 mostra o gráfico de duas funções polinomiais.

**Exemplo 2.2.** *Funções racionais* são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e., funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios.}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} :\ q(x) \neq 0\}$.

Um exemplo simples é a função definida por $f(x) = 1/x$, cujo gráfico está representado na Figura 5.

Tanto o seu domínio como contradomínio são $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta função é ímpar, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ (mas não em todo o seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

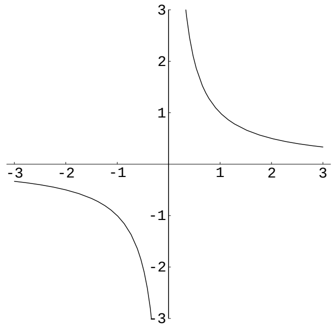


FIGURA 5. Gráfico da função racional $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Recorde-se que o seu gráfico é uma hipérbole com assíntotas nos eixos $y = 0$ e $x = 0$.

**Exemplo 2.3.** A *função exponencial*,[2] $f(x) = e^x$, possui domínio $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, portanto é uma função minorada mas não majorada. É, também, estritamente crescente. O seu gráfico está representado na Figura 6 (juntamente com o gráfico da função logaritmo de base $e$, de que falaremos à frente).

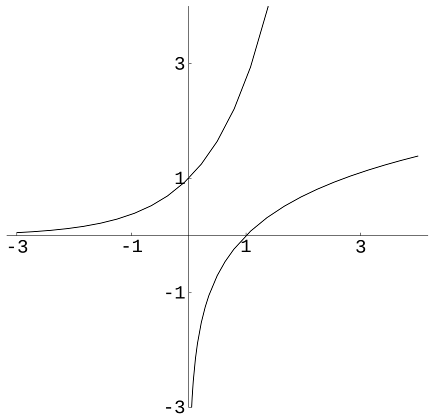


FIGURA 6. Gráfico da função exponencial e da função logaritmo.

Algumas propriedades fundamentais da função exponencial que devem recordar são as seguintes:

(i) $e^0 = 1$ ;
(ii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ , $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$ , $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 2.4.** As funções trigonométricas *seno* e *cosseno* são funções cujo o domínio é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 7.

Qualquer uma destas funções tem por contradomínio o intervalo $[-1, 1]$, sendo portanto funções limitadas. A função seno é ímpar e periódica de período $2\pi$, i.e.

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

[2]Recorde-se uma das formas de definir esta função. Em primeiro lugar, $e = \lim_n (1 + 1/n)^n > 1$ é o número de Neper. Para um racional da forma $p/q$, $e^{p/q}$ é definido como sendo $\sqrt[q]{(e^p)}$. Isto permite definir explicitamente a função exponencial (estritamente crescente) nos racionais. A forma de estender o domínio da exponencial ao conjunto $\mathbb{R}$ é a seguinte: dado um $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q},\ p/q < x\}$ é majorado e não vazio, logo tem supremo. Assim, para um real $x \in \mathbb{R}$, define-se: $e^x = \sup\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q},\ p/q < x\}$.

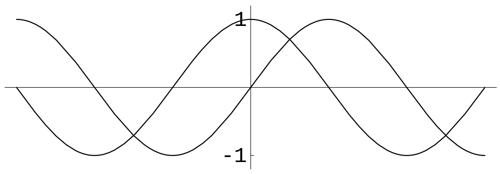


Figura 7. Gráfico das funções trigonométricas seno e cosseno.

A função cosseno é par e também periódica de período $2\pi$, i.e.

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

As funções seno e cosseno satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Dito de outra forma, dado $t \in \mathbb{R}$, o ponto $(\cos(t), \operatorname{sen} t)$ pertence a uma circunferência de centro 0 e de raio 1.

**Exemplo 2.5.** As funções trigonométricas *tangente* e *cotangente* são definidas a partir das funções seno e cosseno:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,. \tag{5}$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e o seu gráfico está representado na Figura 8. A função tangente é ímpar e periódica de período $\pi$, i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\tan}\,.$$

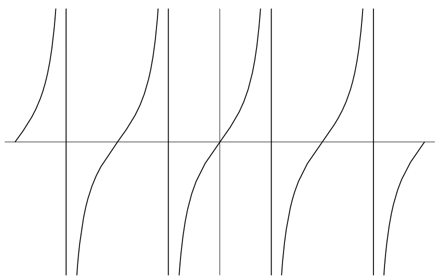

Figura 8. Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e a representação do seu gráfico fica como exercício. A função cotangente também é ímpar e periódica de período $\pi$, i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x + \pi) = \cot(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\cot}\,.$$

A partir da identidade trigonométrica (4), obtêm-se também as identidades

$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \text{e} \quad 1+\cot^2(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)},$$

definidas respetivamente em $D_{\tan}$ e $D_{\cot}$.

**Exemplo 2.6.** As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* são definidas a partir da função exponencial:

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,. \tag{6}$$

O domínio das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 9.

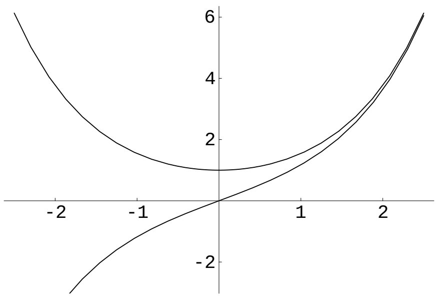


FIGURA 9. Gráfico das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por contradomínio $\mathbb{R}$. A função cosseno hiperbólico é par e tem por contradomínio o intervalo $[1,+\infty[$. Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1\,,\ \forall x\in\mathbb{R}\,. \tag{7}$$

Assim, dado $t\in\mathbb{R}$, o ponto $(\cosh(t),\operatorname{senh}(t))$ pertence à hipérbole $x^2-y^2=1$; este facto está na origem do nome das funções senh e cosh.

**Função composta.** Uma forma de produzir novas funções a partir de funções conhecidas é compondo funções.

**Definição 2.7.** Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:D_g\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. A função *composta* $(f\circ g)$ é definida por

$$\begin{aligned}(f\circ g):D_{f\circ g}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto(f\circ g)(x)\stackrel{\text{def}}{=}f(g(x))\,,\end{aligned}$$

onde $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\,:\,x\in D_g\ \text{ e }\ g(x)\in D_f\}$.

Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_g\supset D_{f\circ g} & \xrightarrow{g} & g(D_{f\circ g}) & \subset & D_f & \xrightarrow{f} & f(D_f) & \supset & (f\circ g)(D_{f\circ g})\\ x & \longmapsto & g(x) & = & y & \longmapsto & f(y) & = & f(g(x))\end{array}$$

i.e., a função composta $f\circ g$ corresponde a aplicar primeiro a função $g$ e de seguida a função $f$.

**Exemplo 2.8.** Consideremos as funções $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$g(x)=\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y)=\operatorname{sen}(y)\,.$$

Temos então que $(f\circ g):D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1/x)=\operatorname{sen}(1/x)\,.$$

O seu gráfico está representado na Figura 10.

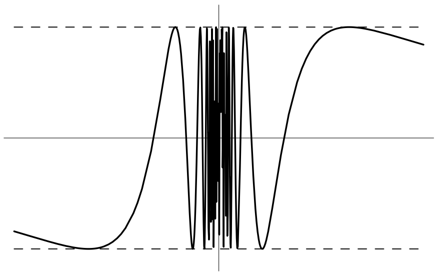

FIGURA 10. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$.

**Funções Injectivas e suas Inversas.**

**Definição 2.9.** Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *injectiva* se, para qualquer valor do contra-domínio $y \in f(D)$, existir *um só* ponto do domínio $x \in D$ tal que $f(x) = y$. De forma equivalente, $f$ é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,.$$

**Exercício 2.10.** Mostre que qualquer função estritamente monótona é injectiva.

**Nota 2.11.** Há funções injectivas que *não são* estritamente monótonas, e mesmo uma função injectiva e contínua pode não ser estritamente monótona (deem um exemplo!). Após estudarmos as propriedades globais de funções contínuas (próximo capítulo) poderemos mostrar que, no entanto, toda a função $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injectiva num intervalo $I$ é monótona e $f(I)$ é um intervalo.

**Definição 2.12.** Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to f(D_f) \subset \mathbb{R}$ uma função injectiva. A sua função *inversa* é definida como a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(D_f) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D_f \subset \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x\,, \end{aligned}$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de $f$ tal que $f(x) = y$.

Notem que $D_{f^{-1}} \overset{\text{def}}{=} f(D_f)$. Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_f & \xrightarrow{f} & f(D_f) & = & D_{f^{-1}} & \xrightarrow{f^{-1}} & f^{-1}(D_{f^{-1}}) & = & D_f \\ x & \longmapsto & f(x) & = & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = & x \end{array}$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,\ \forall\, x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ \forall\, y \in D_{f^{-1}} = f(D_f)\,.$$

Notem que existe uma relação muito simples entre o gráfico de uma função $f$ e o gráfico da sua inversa $f^{-1}$: se $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de $f$ então $(f(x), x)$ é um ponto do gráfico de $f^{-1}$. Isto quer dizer que os gráficos de $f$ e de $f^{-1}$ são **simétricos** em relação à recta diagonal $y = x$, como se ilustra nos exemplos seguintes.

**Exemplo 2.13.** A função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, não é injectiva em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo $[0, +\infty[$ é estritamente crescente, temos que a função

$$\begin{aligned} f = p_{|\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow p(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

é injectiva. Tem assim a inversa $f^{-1}$ definida em $\mathbb{R}_0^+$, que é naturalmente a função raiz quadrada:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 11.

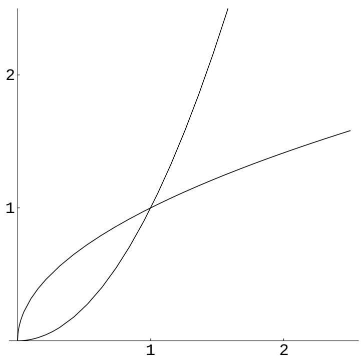


FIGURA 11. Gráfico da função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

**Exemplo 2.14.** A função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa $f^{-1}$ definida em todo o $\mathbb{R}$, que é naturalmente a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 12.

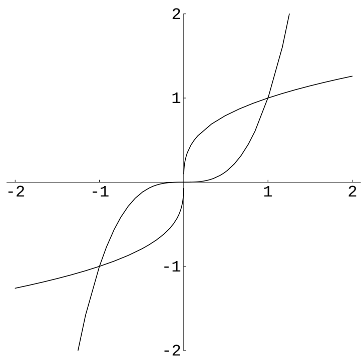


FIGURA 12. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

**Exemplo 2.15.** Os Exemplos 2.13 e 2.14 podem ser generalizados da seguinte forma. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que a função polinomial

$$f(x) = x^n \quad \text{é injectiva em} \begin{cases} [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

pelo que a função inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{tem domínio} \begin{cases} f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**Exemplo 2.16.** A função exponencial é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo invertível. À sua inversa chamamos *logaritmo* (de base $e$), $g(x) = \ln x$, que tem domínio $\mathbb{R}^+$ e contradomínio $\mathbb{R}$. A função logaritmo não é nem majorada nem minorada, e o seu gráfico encontra-se na Figura 6. Por definição de inversa, vale:

$$e^{\ln x} = x \ \forall x > 0, \qquad \ln(e^x) = x \ \forall x \in \mathbb{R};$$

Além disso, das propriedades vistas para a exponencial,

(i) $\ln(1) = 0$;
(ii) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$;
(iii) $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$.
(iv) $a^x = e^{x \ln a}$ e $\log_a(x) = (\ln x)/(\ln a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

**Exemplo 2.17.** Sejam $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 2x + 1$. Tem-se

$$f \circ f(x) = x, \quad g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}, \quad h \circ h = 4x + 3,$$
$$h \circ g(x) = 2\sqrt{x} + 1, \qquad g \circ h(x) = \sqrt{2x + 1},$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}_0^+$, $D_h = \mathbb{R}$. $D_{h \circ g} = \mathbb{R}_0^+ = D_g$ (porque $D_h = \mathbb{R}$), $D_{g \circ h} = \{x : 2x + 1 \in \mathbb{R}_0^+\} = [-1/2, +\infty[$. Note-se que, em geral, a composição não é uma operação comutativa: vimos neste exemplo um caso em que $h \circ g \neq g \circ h$.

**Exercício 2.18.** Mostre que o domínio de $f(x) = \ln(4 - x^2)$ é $D_f = ]-2, 2[$.

**Exemplo 2.19.** A funções trigonométricas seno e cosseno, apresentadas no Exemplo 2.4, são periódicas pelo que não são injectivas em todo o seu domínio. De facto, para cada valor $y$ do seu contradomínio $[-1, 1]$ há uma infinidade de pontos do domínio $\mathbb{R}$ que lhe correspondem. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0 = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2})\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Assim, e para que possamos definir as funções inversas destas funções trigonométricas, temos de restringir os seus domínios a intervalos onde sejam injectivas.

No caso da função seno, consideramos a sua restrição ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco seno*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arcsen} : [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\longmapsto \operatorname{arcsen}(x) \end{aligned}$$

Note-se que $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ (uma vez que $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $\pi/4 \in [-\pi/2, \pi/2]$) e $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$ (uma vez que $\operatorname{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ e $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$).

O gráfico da função arcsen está representado na Figura 13. Mostre que $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ e $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ para qualquer $x \in [-1, 1]$. Por outro lado, verifique que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ só é válida se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (porquê?).

**Exercício 2.20.** Verifique que a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é estritamente decrescente, logo injectiva, e que $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco cosseno*, $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Esboce o seu gráfico.

Note-se que $\arccos(-1) = \pi$ (já que $\cos(\pi) = -1$ e $\pi \in [0, \pi]$), $\arccos(1/2) = \pi/3$ e $\arccos(\cos(-\pi/3)) = \pi/3$. Mostre que

$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos(\arccos x) = x$$

Quando é que se pode garantir que $\arccos(\cos x) = x$?

**Exemplo 2.21.** A funcão trigonométrica tangente, apresentada no Exemplo 2.5, também é periódica pelo que não é injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ é estritamente crescente, logo injectiva, e $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco tangente*:

$$\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[$$

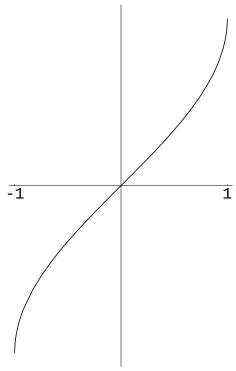


FIGURA 13. Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

$$x \longmapsto \arctan(x)$$

O seu gráfico está representado na Figura 14. Note-se que $\arctan(1) = \pi/4$, $\arctan(-1) = -\pi/4$,

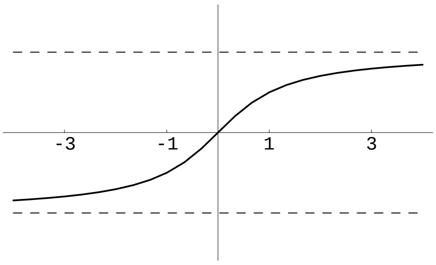


FIGURA 14. Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

$\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ (porquê?).

**Função de Heaviside e Função de Dirichlet.** Antes de prosseguirmos, vale a pena notar que uma função *não é* necessariamente definida por uma expressão algébrica. Na realidade, uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é apenas uma *regra* que a cada número real $x \in D$ atribui um número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Os próximos dois exemplos são funções que não são definidas por expressões algébricas.

**Exemplo 2.22.** Consideremos a chamada *função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na Figura 15.

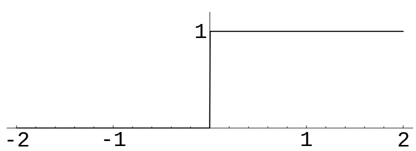


FIGURA 15. Gráfico da função de Heaviside.

Esta função é limitada, crescente, e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$.

**Exemplo 2.23.** Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função é limitada e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$. Reparem que não é possível esboçar o gráfico desta função da forma usual. Notem que o gráfico está sempre bem definido, e que isto não deve ser confundido com a questão de esboçar o gráfico numa folha de papel ou pedir a um computador para o fazer.

**Limite de uma função num ponto.** No ensino secundário, a noção de limite de uma função foi dada da seguinte forma: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ quando:

(8) Sempre que $x_n$ é uma sucessão de termos em $D_f$ tal que $x_n \to a$, então $f(x_n) \to b$.

Diz-se que esta é a definição de *limite segundo Heine*. Em CDI1 trabalharemos com uma noção equivalente, a definição de *limite segundo Cauchy* (a equivalência entre as duas definições será tratada na secção de material extra que se encontra no final deste capítulo). A definição que iremos usar tem a vantagem de não requerer a noção de limite de sucessões, e de estar mais próxima de outros raciocínios que faremos ao longo da cadeira. De uma forma ou de outra, note-se que se pode pensar de forma intuitiva que:

(9) Uma função $f$ tem limite $b$ quando $x$ tende para $a$, se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de $b$ quanto quisermos, tomando $x$ suficientemente próximo de $a$.

Com esta *definição informal* é possível tratar exemplos simples de funções e calcular limites elementares. No entanto, ela pode dar lugar a alguma confusão quando pretendemos tratar exemplos mais complicados como, por exemplo, o limite de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ quando $x$ tende para 0, ou da função de Dirichlet quando $x$ tende para algum $a$.

**Nota 2.24.** Desta noção de limite fica subentendido que é possível aproximar-me de $a$ por pontos no domínio de $f$, o que motiva a seguinte definição:

**Definição 2.25.** Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto *aderente* de $D$ se qualquer vizinhança de $a$ tiver pontos de $D$, ou seja,

$$\forall \delta > 0, \quad D \cap ]a - \delta,\ a + \delta[ \neq \emptyset.$$

**Exemplo 2.26.** Note-se que, se $a \in D$, então $a$ é aderente a $D$. Por outro lado, se por exemplo $D = ]0, 1]$ então 0 é um ponto aderente.

Daqui em diante, sempre que falarmos de limite de uma função num ponto, assumiremos que o ponto é aderente ao domínio dessa função.

Um problema da "definição" (9) está em não ser claro o que se entende por *estar próximo de*. Repare-se que dizer que $f(x)$ está próximo de $b$ (respectivamente, $x$ está próximo de $a$) deve significar que $|f(x) - b|$ (resp. $|x - a|$) é pequeno. Assim, podemos refinar a nossa "definição" para:

> Uma função $f$ tem limite $b$ quando $x$ tende para $a$, se pudermos fazer $|f(x) - b|$ tão pequeno quanto quisermos, tomando $|x - a|$ suficientemente pequeno.

Mas agora vemos que temos um outro problema: o que é que queremos dizer com os termos *tão pequeno quanto quisermos* e *suficientemente pequeno*? Ao esclarecer o verdadeiro significado destes termos chegamos à definição precisa de limite, que é a seguinte:

**Definição 2.27.** Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a$ ponto aderente de $D$. Dizemos que $f$ tem *limite* $b$ quando $x$ tende para $a$ se para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o $x$, se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Em notação de quantificadores, podemos escrever esta condição na forma:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,. \tag{10}$$

Recordando a definição de vizinhança de um ponto (Definição 1.12), a proposição pode escrever-se da seguinte forma equivalente:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b). \tag{11}$$

Notem que tudo o que fizermos daqui em diante dependerá desta definição! Por isso, memorizem-na como se fosse a tabuada o mais rapidamente possível. Esta série de 4 vídeos da Khan Academy poderão ajudar na compreensão. É uma boa ideia começarem por resolver os seguintes exercícios:

**Exercício 2.28.** Usando a definição precisa de limite, mostre que:

(i) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, i.e., para a qual existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(x) = c\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função identidade, i.e., $f(x) = x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, então
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a\,,\ \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

A proposição que se segue enuncia um critério útil para o cálculo de alguns limites.

**Proposição 2.29.** *Se existirem $m, M \in \mathbb{R}^+$ tais que*
$$|x - a| < m \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a|$$
*então*
$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

*Dem.* Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja $\delta = \min\{m, \varepsilon/M\}$. Então
$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.$$
□

**Exemplos.** Apresentamos de seguida alguns exemplos de cálculo de limites a partir da definição. Mais adiante, veremos alguns resultados que permitem simplificar imenso o cálculo de limites e evitar recorrer a esta definição. No entanto, é muito importante prestar atenção a estes primeiros exemplos e procurar interiorizar o seu verdadeiro significado.

**Exemplo 2.30.** Vejamos que, para qualquer número real $a \geq 0$ e natural $p$, se verifica:
$$\lim_{x\to a} x^p = a^p\,.$$

É um exercício simples [façam-no!] mostrar a igualdade:
$$a^p - b^p = (a - b)\sum_{k=1}^{p} a^{p-k} b^{k-1}.$$

Se $|x - a| \leq 1$ temos $|x| = |x - a + a| \leq |x - a| + |a| \leq a + 1$, e concluímos que:
$$\begin{aligned} |x^p - a^p| &\leq |x - a| \sum_{k=1}^{p} |x|^{p-k} |a|^{k-1} \\ &\leq |x - a| \sum_{k=1}^{p} (a + 1)^{p-k} a^{k-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 2.29 com $m = 1$ e $M = \sum_{k=1}^{p} (a + 1)^{p-k} a^{k-1}$ para concluir que $\lim_{x\to a} x^p = a^p$.

**Exemplo 2.31.** Uma análise do círculo trigonométrico e a imparidade e paridade das funções sen e cos permitem concluir que, para $|x| < \pi/2$, se tem
$$|\operatorname{sen} x| < |x| \quad \text{e } |1 - \cos x| < x^2.$$

(nesta última, use o Teorema de Pitágoras - veja os detalhes nas páginas 90 e 91 deste livro). Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 2.29 com $m = 1$ e $M = 1$ e vem que
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

**Exercício 2.32.** Verifique que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ não satisfaz as condições da Proposição 2.29 no ponto $a = 0$. Use a definição para mostrar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$.

Mais Exemplos:

**Exemplo 2.33.** Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos ver que:

$$\lim_{x\to a} H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } a < 0; \\ 1\,, & \text{se } a > 0; \\ \text{não existe}\,, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Suponhamos primeiro que $a > 0$. É claro que, se tomarmos $|x - a| < a$, então $-a < x - a < a$ e, em particular, $x > 0$, logo:

$$|x - a| < a \Rightarrow |H(x) - 1| = |1 - 1| = 0$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = a$ que se verifica:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |H(x) - 1| < \varepsilon$$

ou seja, $\lim_{x\to a} H(x) = 1$. De forma análoga, mostra-se que se $a < 0$ então $\lim_{x\to a} H(x) = 0$.

Vejamos agora que o $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe. Para obter o significado preciso do que significa não existir o limite, começamos por observar o que significa afirmar que uma função $f$ não tem limite $b$ quando $x$ tende para $a$. Para isso, basta negarmos a condição na definição de limite:

> existe algum $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $\delta > 0$ existe um $x$ que satisfaz $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Se preferirmos, em notação de quantificadores:

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{R} : \; |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon\,.$$

Vejamos então que para qualquer número real $b$ a função $H$ não tem limite $b$ quando $x$ tende para 0. Observe que para qualquer $\delta > 0$, se $|x| < \delta$ então temos:

$$\begin{aligned} &\text{se } x < 0 \;\Rightarrow\; H(x) = 0 \;\Rightarrow\; |H(x) - b| = |b|, \\ &\text{se } x > 0 \;\Rightarrow\; H(x) = 1 \;\Rightarrow\; |H(x) - b| = |1 - b|. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{2}\max(|b|, |1 - b|)$ para que se verifique:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{R} : \; |x - a| < \delta \wedge |H(x) - b| > \varepsilon\,,$$

donde o limite não é $b$. Como $b$ era um número real qualquer, concluímos que o limite $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$ não existe.

**Exercício 2.34.** Considere a função de Dirichlet $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} d(x)$ não existe.

**Exemplo 2.35.** Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

O ponto 0 não pertence ao domínio da função, mas ainda faz sentido falar em $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ (cf. Nota 2.24).

Começamos por observar que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ e que $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$, para qualquer inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Seja então $x_k^+ = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ e $x_k^- = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$. Se $b$ é um número real qualquer, temos que:

$$|f(x_k^+) - b| = |1 - b|, \quad |f(x_k^-) - b| = |-1 - b| = |1 + b|.$$

Seja então $\varepsilon = \frac{1}{2}\max(|1 - b|, |1 + b|)$. Dado $\delta > 0$, podemos sempre escolher um inteiro $k$ suficientemente grande de forma que $0 < |x_k^\pm| \leq \delta$, logo:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in D : \; |x| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon\,,$$

donde o limite de $f$ quando $x$ tende para 0 não é $b$. Como $b$ era um número real qualquer, concluímos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

**Exemplo 2.36.** Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

O seu gráfico está representado na Figura 16.

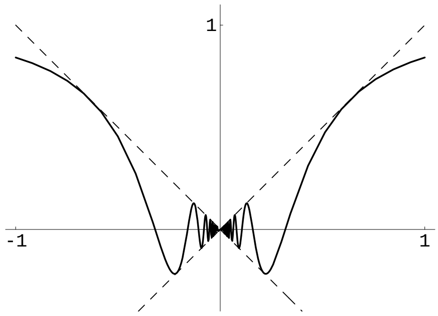


FIGURA 16. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

Tendo em conta que $|\operatorname{sen}(y)| \leq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$, temos para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que

$$0 \leq \left| x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Segue-se que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon$ obtendo:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Ou seja, concluímos que:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \tag{12}$$

Podem encontrar muitos outros exemplos de cálculo de limites através da definição no livro de Spivak (listado na Bibliografia), que vos podem ajudar a interiorizar esta noção.

**Propriedades do Limite de Funções num Ponto.** Vamos agora estudar algumas propriedades elementares do limite de funções que nos ajudarão no seu cálculo, sem termos de recorrer à definição.

**Teorema 2.37.** (Unicidade do Limite) *Seja $f$ uma função e suponha-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e que $\lim_{x \to a} f(x) = b'$. Então $b = b'$.*

*Dem.* Começamos por escrever, usando a definição de limite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \; : \; |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = b' \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 \; : \; |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \varepsilon.$$

Suponhamos, por absurdo, que $b \neq b'$. Então vamos tomar $\varepsilon = \frac{|b-b'|}{2}$ e, para os $\delta_1$ e $\delta_2$ dados por estas definições, escolhemos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Concluímos que, para todo o $x$ tal que $|x - a| < \delta$, temos:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \wedge |f(x) - b'| < \varepsilon.$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} |b - b'| &= |b - f(x) + f(x) - b'| \\ &< |b - f(x)| + |f(x) - b'| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$$= 2\varepsilon = |b - b'|$$

uma contradição. Assim, necessariamente, $b = b'$. □

Note que se $f$ e $g$ são funções então podemos formar as seguintes novas funções:

- A função $f + g$, dita a *soma* de $f$ e $g$ e a função diferença $f - g$, dita a *diferença* de $f$ e $g$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- A função $f \cdot g$, dita o *produto* de $f$ e $g$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

- A função $\frac{f}{g}$, dita o *quociente* de $f$ por $g$:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Note que o domínio das funções soma, diferença e produto, é a intersecção $D_f \cap D_g$ dos domínios das funções parcelas. O domínio da função quociente $\frac{f}{g}$ é:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Finalmente, dada uma função $f$ e um número real $c \in \mathbb{R}$ podemos considerar a função $cf$ definida por:

$$(cf)(x) = c\,f(x),$$

cujo domínio é o mesmo que o domínio de $f$. Também podemos pensar nesta função como o produto da função constante $g(x) = c$ pela função $f$.

**Teorema 2.38.** (Limite e Operações Algébricas) *Sejam $f$ e $g$ funções tais que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c\,.$$

*Então:*

(i) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c$.
(ii) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c$.
(iii) *se* $c \neq 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}\,.$$

*Dem.* Vamos demonstrar em detalhe a propriedade (i). As demonstrações das outras propriedades são análogas e podem ser encontradas no livro de Spivak (listado na Bibliografia).

Começamos por recorrer à definição de limite para escrever:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_1 > 0 : \ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = c \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_2 > 0 : \ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Assim, se escolhermos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \pm g)(x) - (b \pm c)| &= |(f(x) - b) \pm (g(x) - c)| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

o que mostra que:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$$ □

**Exemplo 2.39.** Recorrendo a este resultado é muito fácil calcular certos limites sem ter de passar pelo processo doloroso de encontrar os $\varepsilon$ e $\delta$ correctos. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^4-3x+2}{x^2+1} &= \frac{\lim_{x\to a}(x^4-3x+2)}{\lim_{x\to a}(x^2+1)} \quad \text{(pelo Teorema 2.38 (iii))}\\ &= \frac{\lim_{x\to a}x^4-\lim_{x\to a}3x+\lim_{x\to a}2}{\lim_{x\to a}x^2+\lim_{x\to a}1} \quad \text{(pelo Teorema 2.38 (i))}\\ &= \frac{a^4-3a+2}{a^2+1} \quad \text{(pelo Exemplo 2.30)}\end{aligned}$$

**Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada.**

**Teorema 2.40.** *Sejam $f$, $g$ e $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,,$$

*para qualquer $x \in D$. Temos então que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

*Dem.* Pela definição de limite podemos escrever (omitimos o domínio para simplificar a apresentação):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = b &\iff \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_1>0\ :\ |x-a|<\delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-b<\varepsilon\,,\\ \lim_{x\to a} h(x) = b &\iff \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_2>0\ :\ |x-a|<\delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x)-b<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Usando o facto de $g$ estar encaixada entre $f$ e $h$, obtemos:

$$|x-a|<\delta \Rightarrow \begin{cases} g(x)-b \leq h(x)-b < \varepsilon \\ \\ g(x)-b \geq f(x)-b > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ :\ |x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon \iff \lim_{x\to a} g(x) = b. \qquad \square$$

Um caso em que este critério é particulamente útil é quando a função $g$ é da forma $g(x) = u(x)v(x)$ em que $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ - $u$ diz-se um *infinitésimo* - e $v$ é uma função limitada numa vizinhança de $a$, ou seja existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq v(x) \leq M$, para $x$ numa vizinhança de $a$. Neste caso, assumindo $u(x) > 0$ (senão consideramos $|u(x)|$), e fazendo $f(x) = mu(x)$, $h(x) = Mu(x)$, temos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = 0$, logo $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Diz-se então que *o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.* O cálculo do limite do Exemplo 2.36 podia também ser justificado desta forma.

**Exemplo 2.41** (Limite Notável)**.** Uma análise simples do círculo trigonométrico (veja-se por exemplo a página 90 – Figura 3.2 deste livro) permite mostrar que, para $|x| < \pi/2$ é válida a relação: $0 < |\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x|$, donde

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1\,.$$

Como (recorde o Exemplo 2.31):

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1\,,$$

concluímos pelo príncipio do encaixe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

**Limite de Funções Compostas.**

**Teorema 2.42.** *Sejam* $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções reais de variável real, e* $(f \circ g) : D_{f\circ g} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a sua função composta. Se*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R} \qquad e \qquad \lim_{y\to b} f(y) = c \in \mathbb{R},$$

*então*

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = c\,.$$

*Dem.* Pela definição de limite (notem a alteração nos nomes das variáveis!):

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall\, \gamma > 0\; \exists\, \delta > 0\; :\; |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma\,, \tag{13}$$

$$\lim_{y\to b} f(y) = c \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \gamma > 0\; :\; |y-b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon\,. \tag{14}$$

Seja então dado $\varepsilon > 0$. Tomamos $\gamma > 0$ tal que (14) é satisfeita e, de seguida, para esta escolha de $\gamma$ tomamos $\delta > 0$ tal que (13) é satisfeita. Segue-se que:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma, &\qquad \text{(por (13))} \\ \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon, &\qquad \text{(por (14))}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; :\; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = c\,. \qquad \square$$

**Exemplo 2.43** (Mudança de Variável)**.** Suponhamos que pretendemos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$. Observamos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = f(g(x)),$$

onde $g(x) = x^2$ e $f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$. Como já sabemos que (ver Exemplo 2.41):

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1\,,$$

o Teorema 2.42 mostra que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1\,.$$

**Exemplo 2.44.** Dada uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injectiva tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

não é necessariamente verdade que

$$\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = a.$$

Por exemplo, considere a função $f : [0,1] \cup ]2,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 2 < x \le 3 \end{cases}\,.$$

Neste caso,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1, \qquad \text{mas} \qquad \lim_{y\to 1} f^{-1}(y) \text{ não existe.}$$

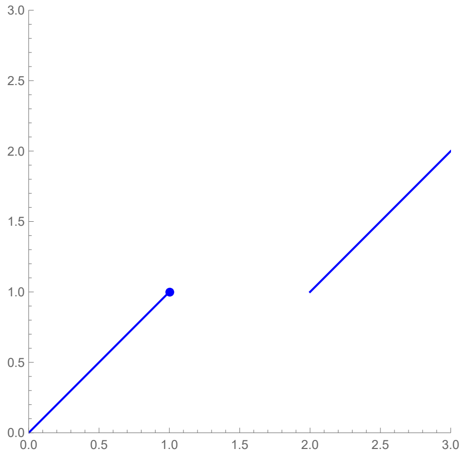


FIGURA 17. O gráfico da função $f$ no Exemplo 2.44.

**Limites Relativos e Laterais.**

**Definição 2.45.** Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $A \subset D$ um subconjunto do seu domínio. Diremos que $f$ *tem limite* $b$ *no ponto* $a$ *relativo ao conjunto* $A$, e escreveremos

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b\,,$$

se a *restrição de* $f$ *ao conjunto* $A$, $f|_A : A \to \mathbb{R}$, tem limite $b$ no ponto $a$, i.e., se $\lim_{x\to a} f|_A(x) = b$, o que por definição de limite significa

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ (x \in A \text{ e } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

**Nota 2.46.** Como já foi referido na Nota 2.24 para o limite usual, para definir o limite relativo $\lim_{x\to a} f|_A(x)$ não é necessário que $a$ pertença ao conjunto $A \subset D$, bastando que para todo o $\delta > 0$ exista $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$, ou seja, que $a$ seja aderente a $A$.

Como é evidente,

se existe $\lim_{x\to a} f(x)$, então existe $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ para todo o $A$ que tem $a$ como ponto aderente.

Isto é especialmente útil para mostrar que não há limite em certas situações: se mostrarmos a existência de dois conjuntos $A_1$ e $A_2$ tais que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_2}} f(x),\ \text{ então não existe } \lim_{x\to a} f(x)$$

(veja-se o Exemplo 2.48 à frente).

**Nota 2.47.** Há dois casos particularmente importantes desta definição de limite relativo, dando origem aos chamados *limites laterais*:

(i) quando $A = D\cap ]a, +\infty[$ temos o chamado limite lateral à direita, ou simplesmente *limite à direita*, que será denotado por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Recorrendo a quantificadores podemos escrever:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ (x \in D \text{ e } x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

(ii) quando $A = D \cap ]-\infty, a[$ temos o chamado limite lateral à esquerda, ou simplesmente *limite à esquerda*, que será denotado por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Novamente, usando quantificadores podemos escrever:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ (x \in D \text{ e } x - a > -\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

**Exemplo 2.48.** Recorde-se a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

A função tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1\,.$$

logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} H(x)$.

**Exercício 2.49.** Para uma função $f$ e $a \in D$ tal que $f(a) = b$, mostre que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é igual a $b$ se, e só se, existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$, e são ambos iguais a $b$ (ou seja, se, e só se $f$ é contínua em $a$).

**Recta Acabada e Indeterminações.** Até aqui, falámos de limites $\lim_{x\to a} f(x) = b$. O nosso objetivo agora é o de considerar o caso em que $a$ e/ou $b$ possam ser infinito, e perceber em que medida conseguimos generalizar o Teorema 2.38 (Limites e Operações Algébricas) para esta situação. Para isso, teremos de introduzir formalmente o que são $\pm\infty$ (falando da reta acabada $\overline{\mathbb{R}}$), definir limite para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e como se opera com estes novos símbolos.

**Definição 2.50.** Designa-se por *recta acabada*, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\ .$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem mais à frente.

**Limites na recta acabada.** Queremos agora definir limites na recta acabada, de forma que faça sentido falar nos limites:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

e ainda que o resultado de um limite possa ser $\pm\infty$. Para isso, recorde-se a definição de *vizinhança de raio* $\varepsilon > 0$ de um ponto $a \in \mathbb{R}$ como sendo o conjunto

$$V_\varepsilon(a) = \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ .$$

Como já foi observado atrás, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a definição de *limite de uma função* pode ser escrita na forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)\,. \tag{15}$$

Se definirmos vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ de $-\infty$ e $+\infty$ por[3]

$$V_\varepsilon(-\infty) = \,]-\infty, -1/\varepsilon[ \quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) = \,]1/\varepsilon, +\infty[\ ,$$

a definição (15) continua a fazer sentido na recta acabada

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\ ,$$

i.e., para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Passaremos assim a usá-la também neste contexto. Resumindo:

**Definição 2.51.** Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

**Exercício 2.52.** Verifique que a definição (15) para o limite na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$ tem os seguintes significados:

(i) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, L > 0\ :\ x \in D\ \wedge\ x > L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

[3] A ideia é que a vizinhança diminua quando $\varepsilon$ diminui; é isso que está por detrás de se tomar $1/\varepsilon$ nas vizinhanças do infinito.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, L > 0\ :\ x \in D\ \wedge x < -L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, onde $a \in \mathbb{R}$, sse

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ \ x \in D\ \wedge\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L.$$

(iv) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, onde $a \in \mathbb{R}$, sse

$$\forall\, L > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ \ x \in D\ \wedge\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -L.$$

Verifique, ainda, o que significa $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

**Exemplo 2.53.** Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty\,.$$

Veja-se a primeira afirmação: dado $\varepsilon$, tem-se (escolhendo $L = 1/\varepsilon$) que

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad x < -\frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

A demonstração da segunda afirmação fica como exercício (façam-na e confirmem com o vosso professor se a resolução está correta!).

**Exemplo 2.54.** O conhecimento que temos das funções exponencial e logaritmo, em particular a sua monotonia, permitem-nos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty\,.$$

Estes factos serão usados em exemplos e podem (e devem) ser usados na resolução de exercícios. Veja-se a última afirmação: dado $L > 0$, tem-se $\ln(x) < -L \Leftrightarrow 0 < x < e^{-L}$, porque a função logaritmo é crescente (e tem domínio $\mathbb{R}^+$). Logo, escolhendo $\delta = e^{-L}$,

$$0 < x < \delta \implies \ln(x) < -L.$$

**Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites.** Vamos agora definir operações que envolvem $\pm\infty$ de forma a que os teoremas sobre limites de operações algébricas e funções compostas continuem válidos (veja-se a "Nota Importante" mais à frente).

**Definição 2.55** (Operações algébricas na reta acabada)**. Somas e diferenças.** Para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty, \quad \pm\infty + a = \pm\infty$$

**Produtos.** Para qualquer $\bar{a} \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\bar{a}\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } \bar{a} > 0; \\ -\infty\,, & \text{se } \bar{a} < 0. \end{cases} \qquad \bar{a}\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty\,, & \text{se } \bar{a} > 0; \\ +\infty\,, & \text{se } \bar{a} < 0. \end{cases}$$

**Quocientes.**

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

Recordando que dizemos:

- $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $g(x) > 0$ numa vizinhança de $a$
- $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$ se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $g(x) < 0$ numa vizinhança de $a$,

temos:

**Definição 2.56** (Divisão por 0 e Potenciação)**.** Para qualquer $\bar{a} \in \overline{\mathbb{R}}$, temos o seguinte:

- se $\bar{a} > 0$, então

$$\frac{\bar{a}}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-} = -\infty;$$

- se $\bar{a} < 0$, então
$$\frac{\bar{a}}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-} = +\infty.$$
Além disso,
$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \le a < 1; \\ +\infty\,, & \text{se } a > 1; \end{cases} \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}}\,,$$
bem como
$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0\,, & \text{se } b < 0; \\ +\infty\,, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

As seguintes operações na reta acabada não estão definidas:
$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{+\infty}, \quad (+\infty)^0. \quad 0^0.$$
Chamamos a estas expressões indeterminações.

Repare-se que, num certo sentido, todas as indeterminações são equivalentes. Por exemplo:
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty \quad \text{e} \quad \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty\,.$$

**Nota importante:** Os resultados que estudámos sobre operações algébricas e limites (Teorema 2.38) e limite de funções compostas (Teorema 2.42), continuam a ser válidas para a recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, exatamente com o mesmo enunciado, desde que não originem alguma das indeterminações referidas anteriormente. Esta é a justificação para as operações com infinitos que definimos anteriormente.

**Nota 2.57** (Retirada do livro de João Paulo Santos, listado na bibliografia)**.** Vamos ver que a indeterminação $\frac{0}{0}$ pode corresponder a qualquer resultado no limite, e até a situações em que não há limite. Tomemos $g(x) = x^3$, que é tal que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Consideremos vários exemplos de funções $f$ com limite 0 na origem:

- Se $f(x) = x^4$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = x$, que converge para 0 .
- Se $f(x) = x$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$, que converge para $+\infty$.
- Para qualquer $b \in \mathbb{R}$, podemos tomar $f(x) = bx^3$. Então $\frac{f(x)}{g(x)} = b$ converge para $b$.
- Se $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x)$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sen}(1/x)$ não existe em 0 .

A nota anterior justifica porque chamamos a $\frac{0}{0}$ uma indeterminação. Podem ser dados exemplos do mesmo tipo para todas as outras indeterminações.

**Exemplo 2.58.** Vimos que:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1\,.$$
Usando este facto, pretende-se completar o gráfico da Figura 16 do Exemplo 2.36 calculando o limite
$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$
Notem que a propriedade algébrica (ii) do Teorema 2.38 dá neste caso origem a uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, pelo que não pode ser usada para calcular este limite.

Consideremos as funções $g, f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\,.$$

Temos então que $(f \circ g) : D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como

$$+\infty \in \overline{D_{f \circ g}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0} f(y) = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1,$$

podemos concluir pelo Teorema 2.42 que

$$\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Na notação do Teorema 2.42, temos que neste exemplo

$$a = +\infty, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

A análise anterior pode ser escrita abreviadamente da seguintes forma:

considerando a mudança de variável $y = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y}$, em que $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$,

temos que

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen}(y) = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1.$$

A Figura 18 apresenta uma versão mais completa do gráfico da Figura 16, tendo já em conta o limite calculado neste exemplo.

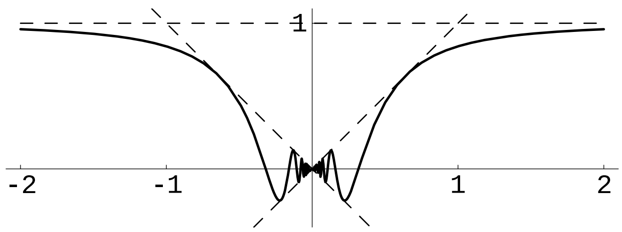


Figura 18. Versão mais completa do gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

**Continuidade de Funções Reais de Variável Real.** Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ a relação:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

pode não se verificar. De facto, esta igualdade pode falhar por duas razões:

- O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ não existe (por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.35).
- O limite existe, mas o ponto $a$ não pertence ao domínio $D$, e portanto não faz sentido sequer falar em $f(a)$ (por exemplo, a função $f(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.36).

Este tipo de comportamento pode ser considerado anormal, e por isso convencionou-se um nome para qualificar as funções que se portam bem:

**Definição 2.59.** Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua num ponto* $a \in D$ se existir limite em $a$. Nesse caso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A função $f$ diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio $D$.

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico não apresenta interrupções, saltos ou oscilações. Embora esta ideia intuitiva seja muitas vezes suficiente para decidir se uma função é contínua olhando para o esboço do seu gráfico, há situações em que isso não é de todo claro, e por isso a definição precisa que demos acima é muito importante. Em termos de $\varepsilon - \delta$, uma função $f$ é contínua em $a \in D$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \, .$$

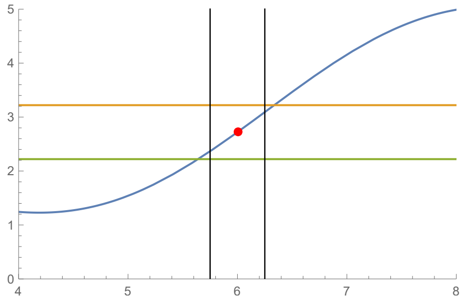


Figura 19. Dada a função $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x/2$, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x - 6| < 0.25$, então $|f(x) - f(6)| < 0.5$. Por outras palavras, se se fixar $\varepsilon = 0.5$, podemos escolher $\delta = 0.25$.

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

**Teorema 2.60.**

(i) *Se $f$ e $g$ são funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e $f/g$ (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em $a$.*

(ii) *Sejam $f$ e $g$ duas funções. Se $a \in D_{f \circ g}$, $g$ é contínua em $a$ e $f$ é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua em $a$.*

*Dem.* Consequência imediata da Definição 2.59 e dos Teoremas 2.38 e 2.42. □

**Teorema 2.61.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo $I$. Então a função inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ é contínua.*

*Dem.* Consultem o Spivak (listado na Bibliografia) ou o Teorema 3.3.5 deste livro. Para mostrar este resultado é necessário usar o Teorema de Bolzano, que já conhecem do Ensino Secundário e que recordaremos mais à frente. □

**Continuidade Lateral.** A noção de limites laterais introduzida na Nota 2.47 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral*.

**Definição 2.62.** Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) $f$ é *contínua à direita* em $a$ se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$;

(ii) $f$ é *contínua à esquerda* em $a$ se $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

**Teorema 2.63.** *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. $f$ é contínua em $a$, i.e.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \, ,$$

*sse $f$ é contínua à direita e à esquerda em $a$, i.e.*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) \, .$$

*Dem.* Exercício simples. □

**Exemplo 2.64.** A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)\,.$$

**Exemplos de Funções contínuas.** O que já sabemos sobre limites permite-nos decidir se muitas funções são contínuas ou não.

**Exemplo 2.65.**

(a) uma função polinomial $p(x)$ é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.
(b) qualquer função racional $f = p/q$, com $p, q$ polinómios, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $q(a) \neq 0$;
(c) a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$;
(d) a função de Heaviside, apresentada no Exemplo 2.22, é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$ e descontínua no ponto zero.
(e) a função de Dirichlet, apresentada no Exemplo 2.23, é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 2.66.** Pode mostrar-se, recorrendo à definição de função exponencial e a algumas desigualdades, que esta é uma função contínua (veja-se por exemplo o Teorema 3.4.2 aqui). Como esta é uma função estritamente crescente, então é injetiva. Assim, do Teorema 2.60 concluímos que a função logaritmo é contínua.

**Exemplo 2.67.** As funções sen, cos, tan e cot são contínuas em todo o seu domínio. De facto, já foi visto que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Usando a identidade para o seno de uma soma e escrevendo $x$ como $x - a + a$, temos

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to a} (\operatorname{sen}(a)\cos(x-a) + \cos(a)\operatorname{sen}(x-a)) = \operatorname{sen}(a)\cos(0) + \cos(a)\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen} a.$$

A continuidade do cosseno fica como exercício (deve usar a fórmula do cosseno da soma: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$). A continuidade da tangente e cotangente segue imediatamente da sua definição e do facto de quocientes de funções contínuas serem contínuas (no seu domínio).

**Exemplo 2.68.** Uma vez que as funções sen, cos e tan são contínuas e injetivas nos intervalos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$ e $]-\pi/2, \pi/2[$, do Teorema 2.60 sai que as funções $\operatorname{arcsen}, \operatorname{arccos}$ e $\arctan$ são contínuas no seu domínio.

**Exemplo 2.69** (Limite Notável)**.** Vamos mostrar neste exemplo como se chega aos limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Já se sabe que $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pode mostrar-se que, na verdade, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (isto faz-se por enquadramento, os detalhes podem ser vistos na Proposição 3.4.3 deste livro, por exemplo). Usando uma mudança de variável, tem-se então $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Da continuidade e propriedades da função ln, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$$

Finalmente, de $y = e^x - 1 \iff x = \ln(1+y)$ sai

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

**Exemplo 2.70.** *(Prolongamento por Continuidade)* Consideremos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \,, & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 \,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, $F$ é numa vizinhança de $a$ o produto/composição de funções contínuas, pelo que é contínua. Por outro lado, recorrendo ao Exemplo 2.36, temos que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = F(0)\,.$$

Logo, $F$ também é contínua em $a = 0$. Assim, $F$ é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Esta função $F$ é um exemplo de *prolongamento por continuidade*. Mais precisamente, é o prolongamente por continuidade da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)\,,\ \forall\, x \neq 0$, ao ponto zero.

**Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas.**

**Teorema 2.71.** *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Se $f(a) > g(a)$ então*

$$\exists\, \delta > 0 \,:\ x \in D_f \cap D_g,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x)\,.$$

*Dem.* Como $f$ e $g$ são por hipótese contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, sabemos que (omitindo os domínios para facilitar a escrita)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0 \,:\ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0 \,:\ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon\,.$$

Escolhamos $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$0 < \varepsilon < \frac{f(a) - g(a)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}\,.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) < g(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > (f(a) - \varepsilon) - (g(a) + \varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > f(a) - g(a) - 2\varepsilon > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0\,, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da escolha feita para $\varepsilon$. □

**Corolário 2.72.** *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$ com $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in V_\delta(a) \cap D$.*

*Dem.* Basta usar o Teorema 2.71 com $g(x) = 0$, $\forall x \in D$. □

**Teorema 2.73.** *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$, então existe $\delta > 0$ tal que $f$ é limitada em $V_\delta(a) \cap D$.*

*Dem.* Exercício. □

**Propriedades Globais das Funções Contínuas.** Nas últimas secções vimos que, quando uma função é contínua num ponto $a$, podemos obter informação sobre o comportamento local da função, i.e., numa vizinhança de $a$. Vamos agora ver que, quando uma função é continua num intervalo $[a, b]$, então podemos obter informação sobre o comportamento global da função, i.e., em todo o intervalo $[a, b]$.

Vamos começar por enunciar três resultados muito importantes, e depois deduzir algumas consequências. A demonstração destes resultados só será feita no fim deste capítulo.

**Teorema 2.74.** (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja $f$ uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Então, para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Este resultado afirma que uma função contínua $f$ num intervalo $[a, b]$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Geometricamente, isto significa que o gráfico de $f$ intersecta a recta horizontal $y = \alpha$ sempre que $\alpha$ esteja entre $f(a)$ e $f(b)$, como se ilustra na seguinte figura.

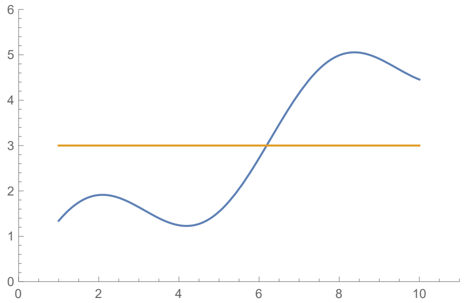


FIGURA 20. O Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto cuja imagem é igual a 3.

**Teorema 2.75.** *Se $f$ é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então $f$ é limitada nesse intervalo, i.e., o contradomínio $f([a, b])$ é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in [a, b]$.*

Geometricamente, este resultado diz que o gráfico de $f$ está entre duas rectas horizontais, como na seguinte figura.

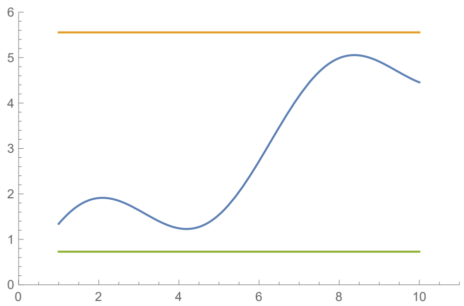


FIGURA 21. O gráfico de uma função contínua entre duas rectas horizontais.

Para enunciar o terceiro e último resultado fundamental, vamos introduzir a seguinte notação:

**Definição 2.76.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que $f$ tem *máximo* (resp. *mínimo*) no conjunto $D$ se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c)$, $\forall\, x \in D$ (resp. $f(x) \geq f(c)$, $\forall\, x \in D$). Neste caso, $c$ diz-se *ponto de máximo* (resp. *ponto de mínimo*) de $f$ em $D$, e $f(c)$ diz-se o *máximo* (resp. *mínimo*) de $f$ em $D$.

**Teorema 2.77.** (Teorema de Weierstrass) *Se $f$ é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, então $f$ tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

A figura seguinte ilustra este resultado:

Notem que, para qualquer um destes resultados ser válido, a função $f$ tem de ser contínua em *todos* os pontos do intervalo $[a, b]$. Basta a continuidade falhar nalgum ponto para um destes resultados deixar de ser válido, como se ilustra nos exemplos seguintes:

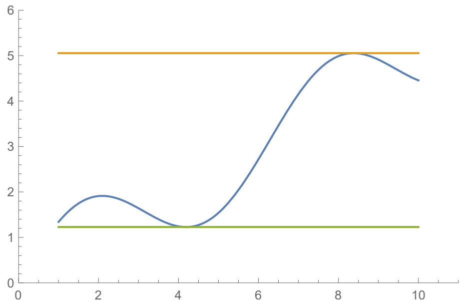


FIGURA 22. O Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo.

**Exemplo 2.78.** Se restringirmos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ao intervalo $[-1, 1]$:

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1\,, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

obtemos uma função que é contínua excepto na origem. Temos que $f(-1) = 0$ e $f(1) = 1$, mas a função não assume quaisquer valores $\alpha$ entre 0 e 1, falhando portanto as conclusões do Teorema do Valor Intermédio. Notem que esta função é limitada e tem máximo e mínimo.

**Exemplo 2.79.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$ excepto em $x = 0$. Por outro lado, $f$ não é limitada neste intervalo, falhando as conclusões do Teorema 2.75 e do Teorema de Weierstrass.

Este exemplo também mostra que nas hipóstese do Teorema 2.75 e do Teorema de Weierstrass não podemos substituir o intervalo fechado $[a, b]$ pelo intervalo aberto $]a, b[$.

**Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais.** Vejamos agora algumas consequências e aplicações destes teoremas globais. O Teorema de Bolzano tem o seguinte corolário imediato:

**Corolário 2.80.** *Seja $f$ uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset D$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in\, ]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

**Exemplo 2.81.** Vejamos como este corolário do Teorema de Bolzano pode ser usado para mostrar que qualquer polinómio do terceiro grau, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \text{com } a_3 \neq 0,$$

tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, i.e., existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perda de generalidade que $a_3 > 0$, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left( a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot a_3 = -\infty\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left( a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot a_3 = +\infty\,.$$

Logo, existem $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, pelo que o Corolário 2.80 do Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto $c \in\, ]a, b[$ tal que $p(c) = 0$.

**Nota 2.82.** O resultado do Exemplo 2.81 generaliza-se facilmente para qualquer polinómio de grau ímpar, mas não para qualquer polinómio de grau par. Por exemplo, o polinómio de segundo grau $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $p(x) = x^2 + 1$ não tem zeros em $\mathbb{R}$. Recordem que a necessidade de encontrar zeros para este polinómio (i.e., soluções para a equação $x^2 + 1 = 0$) é uma das motivações para a introdução e construção do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Ainda assim, podemo-nos perguntar o que é que os teoremas fundamentais acima nos permitem dizer sobre as soluções de equações polinómiais de grau par. De facto eles permitem-nos, por exemplo, resolver uma questão que já discutimos anteriormente:

**Teorema 2.83.** *Para todo o* $\alpha > 0$ *a equação:*

$$x^2 = \alpha,$$

*tem uma solução positiva. Será naturalmente designada por* $\sqrt{\alpha}$.

*Dem.* Já sabemos que uma função polinomial é contínua, logo $f(x) = x^2$ é contínua. Dado $\alpha > 0$, existe um real $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$: se $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$; se $\alpha = 1$ podemos tomar qualquer $b > 1$; se $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Assim, a função $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) < \alpha < f(b)$, e pelo Teorema de Bolzano concluímos que existe $x \in ]0, b[$ tal que $f(x) = x^2 = \alpha$. □

**Exercício 2.84.** Use um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema 2.83 para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem:

$$\sqrt[2n]{\alpha} \in \mathbb{R}^+\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,, \qquad \text{e} \qquad \sqrt[2n+1]{\alpha} \in \mathbb{R}\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

*Dem. do Teorema de Bolzano.* Vamos supôr que $f(a) < f(b)$ (o caso $f(a) > f(b)$ é inteiramente análogo) e fixemos um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$. Um número $c \in ]a, b[$ que é candidato natural a solução de $f(c) = \alpha$ é o supremo do conjunto

$$C = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

Pelo princípio do supremo, uma vez que $C$ é não vazio, já que $a \in C$, e majorado, já que $b$ é majorante, sabemos que existe $c = \sup C \leq b$. Para provar que $f(c) = \alpha$, provamos separadamente que não pode ocorrer $f(c) > \alpha$ nem $f(c) < \alpha$.

- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) > \alpha$. A função $g(x) = f(x) - \alpha$ é contínua em $c$ e satisfaz $g(c) > 0$. Pelo Corolário 2.72, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo o $x \in ]c - \delta, c + \delta[$. Isto significa que $f(x) > \alpha$ para todo o $x \in ]c - \delta, c + \delta[$, pelo que $C \cap ]c - \delta, c + \delta[ = \emptyset$ o que contradiz a propriedade do supremo dada pela Proposição 1.9
- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) < \alpha$. A função $g(x) = \alpha - f(x)$ é contínua em $c$ e satisfaz $g(c) > 0$ logo, pelo Corolário 2.72, existe $c' > c$ [4] tal que $g(c') > 0$, ou seja $f(c') < \alpha$. Isto significa que $c < c'$ e $c' \in C$. Logo $c$ não poderia ser majorante de $C$, o que contradiz o facto de $c = \sup C$.

Assim, $c \in [a, b]$ e $f(c) = \alpha$, como queríamos demonstrar. Notem que, de facto, $c \in ]a, b[$ pois $f(c) = \alpha \neq f(a), f(b)$. □

*Dem. do Teorema 2.75.* De forma análoga à demonstração do Teorema de Bolzano, introduzimos o conjunto:

$$C = \{x \in [a, b] : \ f \text{ é limitada em } [a, x]\}.$$

Claramente este conjunto é não-vazio pois contém $a$. Por outro lado, $C$ é um conjunto majorado por $b$. Pelo Princípio do Supremo temos que existe $\alpha = \sup C$. Vejamos que, de facto, $b = \alpha$:

- $\alpha > a$. Como $f$ é contínua em $a$, pelo Teorema 2.73, existe $\delta > 0$ tal que $f$ é limitada em $[a, a + \delta)$. Portanto, $f$ é limitada em $[a, a + \delta/2]$ donde $\alpha \geq a + \delta/2 > a$.
- $\alpha = b$. Suponhamos, por absurdo, que $a < \alpha < b$. Como $f$ é contínua em $\alpha \in ]a, b[$, pelo Teorema 2.73 concluímos que existe $\delta > 0$ tal que $f$ é limitada em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Mas então $f$ é limitada em $[a, \alpha - \delta]$ e em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, logo é limitada em $[a, \alpha + \delta/2]$, o que contradiz o facto de que $\alpha$ é o supremo de $C$.

Assim, temos que $b = \sup C$ e portanto $f$ é limitada em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x < b$.

Isto não mostra ainda que $f$ é limitada em $[a, b]$, porque ainda não sabemos se $b = \sup C \in C$, i.e. se $b = \max C$. Mas basta agora observar que $f$ é continua em $b$, logo pelo Teorema 2.73, existe $\delta > 0$ tal que $f$ é limitada em $(b - \delta, b]$. Se $f$ é limitada em $[a, b - \delta]$ e em $(b - \delta, b]$ então $f$ é limitada em $[a, b]$, como pretendíamos mostrar. □

[4] Também sai do Corolário 2.72 que $c < b$, já que sendo $f(b) > \alpha$, haverá uma vizinhança de $b$ onde $f(x) > \alpha$, logo $b \neq \sup C$.

*Dem. do Teorema de Weierstrass.* Vamos mostrar que $f$ tem máximo. A demonstração que $f$ tem mínimo é inteiramente análoga.

Consideremos o contradomínio de $f$, i.e, o conjunto dos valores que $f$ toma em $[a,b]$:

$$C = \{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Este conjunto é óbviamente não vazio e, pelo teorema anterior, é limitado. O Princípio do Supremo garante que existe $M = \sup C$. Tudo o que temos a fazer é mostrar que $M \in C$, pois isso significa que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = M \geq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$.

Suponha-se, por absurdo, que $M \neq f(c)$ para todo o $c \in [a,b]$. Então podemos definir a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Esta função é contínua, pois é a composta de funções contínuas e o denominador não se anula. Pela propriedade do supremo $M = \sup C$ dada pela Proposição 1.9, temos que para todo o $\varepsilon > 0$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) > M - \varepsilon$, ou seja,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto mostra que $g$ não é limitada em $[a,b]$, o que contradiz o Teorema 2.75 que mostrámos anteriormente. $\square$

**Material Extra: Contradomínios de funções contínuas em intervalos e continuidade da função inversa.** Uma das aplicações importantes do Teorema de Bolzano é permitir-nos caracterizar contradomínios de funções contínuas. De facto, notem que este resultado pode ser escrito na forma seguinte: se $I$ for um intervalo *qualquer* com $f$ contínua em $I$, e $a, b \in I$ com $f(a) < f(b)$ (por exemplo), então, escrevendo $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$, temos

$$[f(a), f(b)] \subset f([a,b]) \subset f(I)$$

ou seja, se $f(a), f(b) \in f(I)$, e $f(a) < \alpha < f(b)$, então $\alpha \in f(I)$ ou seja , $f(I)$ é um intervalo. (Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo $\Leftrightarrow$ se $x, y \in A$, com $x < y$, então para qualquer $z$ tal que $x < z < y$ tem-se $z \in A$.)

**Corolário 2.85.** *Funções contínuas transformam intervalos em intervalos, ou seja, se o domínio é um intervalo $I$, também a imagem $f(I)$ será um intervalo.*

Em geral, temos sempre que $f(I)$ é um intervalo de extremos $r$ e $s$,

$$]\,r, s\,[ \subset f(I) \subset [\,r, s\,]$$

em que $s = \sup\{f(x) : x \in I\} = \sup f(I)$ e $r = \inf\{f(x) : x \in I\} = \inf f(I)$ em $\overline{\mathbb{R}}$. O intervalo será fechado ou aberto nos extremos dependendo de $f$ ter máximo ou mínimo em $I$. Usando agora o Teorema de Weierstrass, temos também o seguinte:

**Corolário 2.86.** *Se $f$ é contínua em $I = [a,b]$, intervalo limitado e fechado, então $f(I)$ também é um intervalo limitado e fechado.*

(Os intervalos limitados e fechados dizem-se *compactos* e têm propriedades importantes.) Uma consequência de $f$ contínua num intervalo $I$ então $f(I)$ é também um intervalo, dá-nos a *continuidade da função inversa* , que vimos no Teorema 2.61 (vejam também o Exemplo 2.44). É fácil ver que esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas: podemos ter $f(I)$ intervalo sem que $f$ seja contínua, por exemplo,

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x \neq 0 \text{ e } f(0) = 0, \text{ ou } f(x) = x + 1,\ x \leq 0,\ f(x) = x,\ x > 0.$$

Mas se $f$ é monótona, temos um critério de continuidade. Isso depende da seguinte propriedade das funções monótonas que deixamos como exercício.

**Exercício 2.87.** Se $f : D \to \mathbb{R}$ é monótona, existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$ em $\overline{\mathbb{R}}$ para qualquer $a \in D$. (Sug. $f(a^+) = \sup\{f(x) : x < a, x \in D\}$.)

**Teorema 2.88.** *Se $f$ é estritamente monótona em $I$ e $f(I)$ é um intervalo, então $f$ é contínua em $I$.*

*Demonstração.* Seja $a \in I$, (assumimos $a$ no interior de $I$, se for um dos extremos prova-se da mesma forma a continuidade lateral). Assumindo $f$ crescente (para decrescente é análogo) temos $f(a^+) \leq f(a) \leq f(a^-)$ e também $f(x) < f(a^-)$, se $x < a$, $f(x) > f(a^+)$, se $x > a$. Se fosse $f(a^+) \neq f(a)$, então $]f(a), f(a^+)[$ não estaria na imagem de $f$ e $f(I)$ não seria um intervalo. O mesmo se conclui se $f(a^-) \neq f(a)$. Logo $f(a^+) = f(a) = f(a^-)$ e $f$ é contínua em $a$. □

Daqui sai:

*Demonstração da Continuidade da Função Inversa.* $f$ injectiva e contínua num intervalo $I \Rightarrow f$ é estritamente monótona e $f^{-1}$ também será. Como $f^{-1}(J) = I$ é um intervalo, conclui-se do resultado anterior que $f^{-1}$ é contínua. □

**Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy.** Tal como observámos no início do capítulo, no Ensino Secundário a noção de limite aprendida foi aquela segundo Heine – recorde-se (8). Nesta cadeira aprofundámos uma outra noção de limite segundo Cauchy (Definição 2.27). Mostramos de seguida que as noções são equivalentes.

Antes disso, é útil recordar a definição de uma sucessão $(x_n)$ convergir para $a \in \mathbb{R}$: diz-se que $x_n \to a$ se
$$\forall \delta > 0\, \exists p \in \mathbb{N}: \ n \geq p \implies |x_n - a| < \delta,$$
ou seja, dado $\delta > 0$ existe uma ordem $p$ a partir da qual $|x_n - a| < \delta$.

**Teorema 2.89** (Equivalência das definições de limite para $a, b \in \mathbb{R}$)**.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $a$ um ponto aderente a $D$, e $b \in \mathbb{R}$. Temos*
$$\textit{definição no sentido de Cauchy} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{definição no sentido de Heine.}$$

*Demonstração.* (Cauchy $\Rightarrow$ Heine): se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ no sentido de Cauchy e $x_n \to a$, dado $\varepsilon > 0$, sejam $\delta > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

- $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;
- $n \geq p \Rightarrow \ |x_n - a| < \delta$.

Em conclusão, dado $\varepsilon > 0$ arranjámos uma ordem $p$ tal que para $n \geq p$ temos $|f(x_n) - b| < \varepsilon$; conclui-se assim que $f(a_n) \to b$.

Reciprocamente, vemos que (Não Cauchy $\Rightarrow$ Não Heine): se $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$ segundo Cauchy, existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ encontramos $x$ com $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| > \varepsilon$. Tomamos $\delta = 1/n$ e $x = x_n$ e temos
$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{ e } \quad |f(x_n) - b| > \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N},$$
ou seja construimos uma sucessão $(x_n)$ tal que
$$x_n \to a \quad \text{ e } \quad f(x_n) \nrightarrow b,$$
o que implica que $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$ segundo Heine. □

## 3. Cálculo Diferencial

**Derivada de Uma Função num Ponto.** A noção de *derivada* é a primeira das duas noções fundamentais do Cálculo que vamos estudar. A outra é a noção de *integral* que será estudada mais tarde.

A noção de derivada de uma função pode ser motivada das mais variadas formas. Por exemplo, a origem do conceito de derivada está ligada à Física e alguns dos resultados que vamos estudar tem interpretações físicas imediatas, recorrendo a conceitos como o de velocidade e aceleração. No entanto, preferimos recorrer a um problema geométrico simples, que permite mostrar que a derivada é de facto um conceito matemático preciso e importante em muitas aplicações.

A questão que colocamos é a seguinte: Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de $f$ num vizinhança do ponto $(a, f(a))$? A resposta a esta questão é, naturalmente, a recta *tangente* ao gráfico de $f$ no ponto $(a, f(a))$. Surge então o problema de saber como calcular a equação dessa recta tangente.

Denotando por $(x, y)$ as coordenadas de um ponto arbitrário do plano $\mathbb{R}^2$, a equação de qualquer recta não vertical que passe no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$(y - f(a)) = m \cdot (x - a)\,,$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é arbitrário e representa o *declive* da recta determinada pela equação. A resolução do nosso problema passa pois por calcular *o declive da recta tangente ao gráfico de uma função $f$ num ponto $(a, f(a))$.*

Esse cálculo pode ser feito com base na noção de limite. De facto, a recta tangente ao gráfico de uma função $f$ num ponto $(a, f(a))$ pode ser obtida como o "limite" de rectas secantes ao mesmo gráfico, como ilustra a Figura 23.

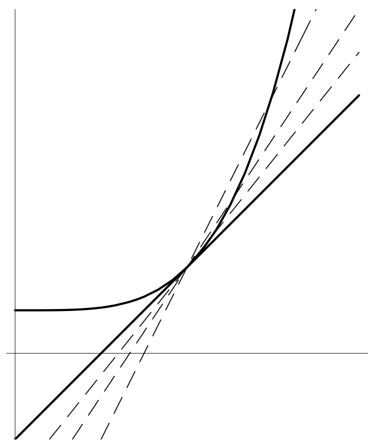

Figura 23. A recta tangente como limite de rectas secantes.

Assim, para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$. É uma recta secante ao gráfico de $f$ e o seu declive é dado por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(a, f(a))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$. Somos assim levados a colocar a seguinte definição formal:

**Definição 3.1.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que *$f$ é diferenciável no ponto $a \in D$ com derivada $f'(a)$* se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Antes ainda de vermos alguns exemplos, fazemos três comentários a esta definição:

O primeiro comentário é que a notação para a derivada, $f'(a)$, sugere que devemos pensar na derivada como uma função. De facto assim é: a cada $a$ em que o limite na Definição 3.1 existe associamos o número real $f'(a)$. Assim, o domínio $D_{f'}$ da função derivada é um subconjunto do domínio de $f$.

O segundo comentário tem que ver com a interpretação física de derivada. Se $x(t)$ representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo $t$ ao longo de uma reta, então a razão:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

representa a "velocidade média" do objecto no intervalo de tempo $[t, t+h]$. Podemos pois pensar na derivada

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

como a *velocidade instantânea* do objecto no instante $t$. Assim, podemos dizer que a velocidade instantânea do objecto é a taxa de variação da posição.

Notem, ainda, que a noção de taxa de variação faz sentido em qualquer situação em que uma quantidade varia. É por isso que a noção de derivada é tão importante quer em Matemática quer nas aplicações.

O terceiro comentário é que, embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a Definição 3.1 de derivada de uma função, nós ainda não temos uma definição matemática precisa de recta tangente. Mas podemos agora usar a noção de derivada para dar uma definição precisa:

**Definição 3.2.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A *recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto* $(a, f(a))$ é a recta definida no plano pela equação

$$(y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a)\,. \tag{16}$$

Estamos a aproximar $f'(a)$ por $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, e o erro nessa aproximação é dado por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \;\to\; 0, \; x \to a.$$

Rescrevendo, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_a(x), \qquad \text{para } R_a(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)(x - a).$$

Note-se que $R_a(x) \to 0$ quando $x \to a$; na verdade, vai mais depressa para 0 do que o polinómio de grau 1 dado por $x - a$, já que:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{x - a} \to 0.$$

Neste sentido, podemos escrever

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{quando} \qquad x \to a.$$

Intuitivamente, uma função é diferenciável em $a$ se, "perto" de $a$, for aproximadamente *linear*. **Ao acto de subtituir $f(x)$ por $f(a) + f'(a)(x - a)$ chama-se *linearização* (perto de $a$), e é algo que farão em muitas outras cadeiras aplicadas do curso!**

**Exemplos.**

**Exemplo 3.3.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha x + \beta) - (\alpha a + \beta)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x-a)}{x-a} = \alpha\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{17}$$

**Exemplo 3.4.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Usando

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e o facto do cosseno ser uma função contínua.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $f'(x) = \cos x$.

**Exercício 3.5.** Mostre que a derivada da função $g(x) = \cos x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $g'(x) = -\operatorname{sen} x$.

**Exemplo 3.6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Concluímos assim que a derivada da função $f(x) = e^x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é ela própria: $f'(x) = e^x$.

**Exemplo 3.7.** Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \ln x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}.$$

Considerando a mudança de variável

$$y = \frac{h}{x}, \quad \text{em que} \quad h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0,$$

temos então que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x},$$

onde na última igualdade usámos novamente o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \ln x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^+$ e que a função derivada é $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Uma outra notação para derivada é a *notação de Leibniz*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = f'(x).$$

Por exemplo, nesta notação, temos as seguintes derivadas:

$$\frac{d}{dx}(\alpha x + \beta) = \alpha \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+); \qquad \frac{d}{dx} e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R});$$

Quando a variável independente é o tempo, por exemplo no caso de uma função $f(t)$, $x(t)$ ou $y(t)$, é comum usar um ponto por cima da função para representar uma derivada:

$$\dot{f}(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t).$$

**Derivadas Laterais.**

**Definição 3.8.** Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) $f$ tem *derivada lateral à direita* em $a$ se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

(ii) $f$ tem *derivada lateral à esquerda* em $a$ se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

**Teorema 3.9.** *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. A função $f$ é diferenciável no ponto $a$ sse $f$ tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$.*

*Dem.* Exercício simples. □

**Exemplo 3.10.** A função módulo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x < 0, \\ x\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 24, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.
De facto,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1 \quad \text{e}$$

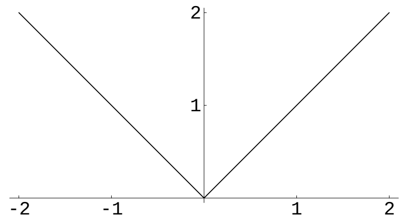


Figura 24. Gráfico da função módulo.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1\,.$$

Logo $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$, pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

**Exemplo 3.11.** $f(x) = \sqrt{x}$ em $a = 0$: neste caso a derivada à esquerda não está definida e à direita temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Como o limite não existe em $\mathbb{R}$, $f$ não é diferenciável em 0. Verifique que também a função $\sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $a = 0$.

**Exemplo 3.12.** Função de Heaviside (Exemplo 2.64) em $x = 0$:

$$H'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0,$$

$$H'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Logo, $H$ não é diferenciável em 0. Notem que

$$H'_e(0) \neq \lim_{x\to 0^-} H'(x) = 0,$$

já que $H'(x) = 0$, $x \neq 0$.

**Diferenciabilidade e Continuidade.** Deve ser claro que uma função que possui derivada é "mais bem comportada" que uma função que é apenas contínua. Esta ideia é tornada precisa pelo:

**Teorema 3.13.** *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $a \in D$ então $f$ é contínua em $a$.*

*Dem.* Considermos a função $\rho : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,\ \forall\, x \in D \setminus \{a\}\,.$$

Como $f$ é por hipótese diferenciável no ponto $a \in D$, sabemos que

$$\lim_{x\to a} \rho(x) = f'(a) \in \mathbb{R}\,.$$

Por outro lado,

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\rho(x)\,,\ \forall\, x \in D \setminus \{a\}\,.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= f(a) + \lim_{x\to a} (x-a)\cdot\rho(x) \\ &= f(a) + 0\cdot f'(a) = f(a)\,, \end{aligned}$$

pelo que $f$ é contínua em $a \in D$. $\square$

**Nota 3.14.** O Teorema 3.13 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ contínua em } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função módulo do Exemplo 3.10 é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Por outro lado, o Teorema 3.13 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ não é contínua em } a \Rightarrow f \text{ não é diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo 2.64) pelo que também não é diferenciável nesse ponto (note-se que nestes casos não é preciso calcular derivadas laterais como fizemos anteriormente).

**Regras Algébricas de Derivação.**

**Teorema 3.15.** *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e $f/g$ (se $g(a) \neq 0$) também são diferenciáveis no ponto $a$, sendo as suas derivadas dadas por:*

$$\begin{aligned}
(c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \\
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) && \text{(Regra de Leibniz)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

**Nota 3.16.** As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema dizem-nos que a derivação é uma operação *linear.*

*Dem.* Provaremos apenas a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left( g(a+h) \cdot \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\
&= \left( \lim_{h \to 0} g(a+h) \right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a) \,,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou naturalmente o facto de $f$ e $g$ serem diferenciáveis em $a$, bem como o facto de $g$ ser também contínua em $a$ (Teorema 3.13). □

**Exemplo 3.17.** Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mostremos pelo método de indução que a função $f(x) = x^n$ possui derivada em todos os $x \in \mathbb{R}$ e que a sua função derivada é: $f'(x) = n\, x^{n-1}$:

- Para $n = 1$ temos $(x^1)' = x' = 1$ (é um caso particular do Exemplo 3.3).
- Supondo agora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, queremos provar que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Ora isso é verdade, já que:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^{n+1},$$

onde na segunda igualdade usámos a fórmula para a derivada do produto, e na terceira igualdade usámos a hipótese de indução.

**Exemplo 3.18.** É possível mostrar que, para qualquer expoente $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = x^\alpha$ possui derivada em todos os ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e que a sua função derivada é $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Voltaremos a este ponto após revermos a derivação da função composta.

**Exemplo 3.19.** As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (\text{cf. Exemplo 2.6}).$$

Usando a derivada da função exponencial (Exemplo 3.6) e a fórmula do Teorema 3.15 para a derivada do quociente, temos que

$$\left(e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{(1)' \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}\,.$$

Usando também a linearidade da derivação, especificada pelas duas primeiras regras algébricas do Teorema 3.15, obtemos o seguinte resultado para as derivadas das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,; \tag{18}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x\,. \tag{19}$$

**Exemplo 3.20.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tangente, i.e. definida por

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,,\ \forall\, x \in D = D_{\tan} \ (\text{cf. Exemplo 2.5}).$$

Usando a fórmula do Teorema 3.15 para a derivada do quociente, podemos calcular a derivada desta função tangente num qualquer ponto $x \in D_{\tan}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{(\cos)^2(x)} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,
\end{aligned}$$

onde se usaram as derivadas das funções seno e cosseno (Exemplo 3.4 e Exercício 3.5), bem como a relação fundamental (4) entre o seno e o cosseno.

Concluimos assim que

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\ \forall\, x \in D_{\tan}\,. \tag{20}$$

Note-se que, definindo a função secante como sendo $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, vem

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x.$$

Refira-se que a função cossecante é definida como sendo $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

**Exercício 3.21.** Mostre que $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$.

**Derivada de Funções Compostas.**

**Teorema 3.22.** *Sejam $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in D_f$. Então, a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f\circ g}$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

*Dem.* Vamos assumir que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $h \in ]-\delta, \delta[$ com $(a+h) \in D_g$, tem-se $g(a+h) \neq g(a)$. Caso contrário, prova-se facilmente que $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$ (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Usando a definição de derivada, temos então que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(g(a+h)) - f(g(a))) \cdot (g(a+h) - g(a))}{h \cdot (g(a+h) - g(a))} \qquad (g(a+h) \neq g(a)) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Como $g$ é por hipótese diferenciável em $a$, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$, em que $h \to 0 \Rightarrow y \to g(a) = b$ (porque, pelo Teorema 3.13, $g$ é contínua em $a$), e usando o Teorema 2.42 referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y \to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b),$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de $f$ ser por hipótese diferenciável no ponto $b = g(a)$.

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 3.23.** Estamos por fim em condições de mostrar o resultado enunciado no Exemplo 3.18. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, observe-se que

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = f \circ g(x), \qquad \text{para} \;\; g(x) = \alpha \ln x \;\; \text{e} \;\; f(x) = e^x.$$

Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$, vem então:

$$(x^\alpha)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

**Exemplo 3.24.** Seja $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função positiva e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos a função $g^\alpha : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $(g^\alpha)(x) = g(x)^\alpha$, $\forall x \in D$. Observando que $g^\alpha = (f \circ g)$, com $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(y) = y^\alpha$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, podemos usar o Teorema 3.22 e o resultado do Exemplo 3.23 para concluir que, se $g$ é diferenciável num ponto $a \in D$, então $g^\alpha$ também é diferenciável nesse ponto $a$ e

$$\begin{aligned}
(g^\alpha)'(a) &= (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \\
&= \left(\alpha y^{\alpha - 1}\right)|_{y = g(a)} \cdot g'(a) \\
&= \alpha \, g(a)^{\alpha - 1} \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d}{dx} g^\alpha(x) = \alpha \, g(x)^{\alpha - 1} \frac{d}{dx} g(x).$$

**Exemplo 3.25.** Quando o expoente $\alpha$ do exemplo anterior é um número inteiro, não é necessário que a função $g$ seja positiva para a validade do resultado. Na realidade, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e qualquer função $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável num ponto $a \in D$, a função $g^n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é diferenciável nesse ponto $a \in D$ e

$$\frac{d}{dx} g^n(x) = n\, g(x)^{n-1} \frac{d}{dx} g(x)\,. \tag{21}$$

Por exemplo, temos que:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^5(x) = 5 \operatorname{sen}^4(x) \cos(x).$$

**Exercício 3.26.** Mostre que $(a^x)' = (\ln a) a^x$ e que $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a, x > 0)$.

**Nota 3.27.** Na notação de Leibniz a regra da função composta pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dy} f(y)\bigg|_{y=g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x).$$

Muitas vezes esta fórmula é expressa na seguinte forma abreviada: se $y = g(x)$ e $z = f(y)$, então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{22}$$

Chama-se a isto a *regra da cadeia* (verão em Cálculo Diferencial e Integral II uma generalização disto para funções que dependem de mais do que uma variável).

Na forma (22) existe um certo abuso de linguagem pois, por exemplo, $z$ no lado esquerdo significa a função composta $f(g(x))$ enquanto que $z$ no lado direito significa a função $f(y)$. No entanto, este tipo de expressão é útil como ilustramos de seguida.

Suponhamos que queremos calcular a derivada da função $\ln(x^2 + 1)$. Então tomamos $z = \ln y$ e $y = x^2 + 1$. Temos pois:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot (2x).$$

No final devemos substituir $y$ por $x^2 + 1$, obtendo:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

que é o resultado correcto.

**Derivada de Funções Inversas.** Já vimos em que condições a continuidade de $f$ implica a continuidade de $f^{-1}$ (recorde-se o Teorema 2.61). Vamos agora ver o que podemos concluir sobre $f^{-1}$ quando $f$ é diferenciável.

**Nota 3.28.** Notem que, dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua injectiva e definida num intervalo, se $f$ é crescente (resp. decrescente) então $f^{-1}$ é crescente (resp. decrescente).

**Teorema 3.29.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo $I$, e seja $f^{-1} : f(I) \to I$ a sua inversa. Se $f$ é diferenciável num ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então $f^{-1}$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

*Dem.* Para a prova completa deste resultado podem consultar o Teorema 4.1.9 deste livro. Aqui, assumindo que $f$ é diferenciável em todo o intervalo $I$, com $f'(x) \neq 0$, provaremos apenas que, se $f^{-1}$ é diferenciável em $f(I)$, o valor da sua derivada é, de facto, o especificado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa e o Teorema 3.22, temos que

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) = x &\Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,,\ \forall x \in I\,.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$, obtemos assim o resultado pretendido. $\square$

**Exemplo 3.30.** Consideremos a função $f(x) = x^n$ e a sua inversa $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ que estão definidas em $\mathbb{R}$, para $n$ ímpar, e em $[0, +\infty]$, para $n$ par. Concluímos do Teorema 2.61, que a raíz-n é uma função contínua em todo o seu domínio. Por outro lado, temos que (Exercício 3.17):

$$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0, \text{ se } x \neq 0.$$

Segue-se do Teorema 3.29 que $f^{-1}$ é diferenciável para $y \neq 0$ e que a sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

Note-se que este é um caso particular do Exemplo 3.23 (aqui para $\alpha = \frac{1}{n}$), deduzido com recurso a outros métodos.

**Exemplo 3.31.** Como a função sen é contínua, concluímos do Teorema 2.61 que a função arcsen é contínua. Como sen é diferenciável e

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq 0\,,\ \forall x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\ ,$$

temos pelo Teorema 3.29 que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto $x \in \,]-1, 1[$. Para calcular a sua derivada observamos que

$$(\operatorname{arcsen} x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}\ ,\ \forall x \in \,]-1, 1[\ .$$

Como

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}\,,\ \forall x \in [-1, 1] \quad \text{(exercício)},$$

concluímos que:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall x \in \,]-1, 1[\ . \tag{23}$$

**Exercício 3.32.** Mostre que arccos é diferenciável em $]-1, 1[$ com derivada dada por:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \forall x \in \,]-1, 1[\ . \tag{24}$$

**Exemplo 3.33.** Como a tangente é uma função contínua, a função arco tangente também é uma função contínua. Por outro lado, pela fórmula (20) para a derivada da tangente, temos que

$$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0\,,\ \forall x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\ .$$

Podemos então aplicar o Teorema 3.29 para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(exercício)},$$

temos então que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{25}$$

**Exemplo 3.34.** A função exponencial é estritamente crescente, e portanto injectiva, em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, com contradomínio $\mathbb{R}^+$. A sua inversa é a função *logaritmo*. Como a função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$, a função logaritmo também é contínua. Como

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

temos pelo Teorema 3.29 que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e

$$f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow (\ln x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Como a derivada da função exponencial $f$ é a própria função exponencial $f$, temos então que

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+ . \tag{26}$$

Obtivemos assim de novo, mas com outro argumento, a expressão da derivada de $\ln x$ (recorde-se que no Exemplo 3.7 usámos a definição de derivada).

**Exercício 3.35.** Considere a função seno hiperbólico definida no Exemplo 2.6. Mostre que a sua função inversa, $\operatorname{argsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é tal que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

**Exercício 3.36.** Considere a restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo $[0, +\infty[$ (cf. Exemplo 2.6). Mostre que a sua função inversa, $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[ \to [0, +\infty[$, é tal que

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\,,\ \forall x \in [1, +\infty[\,, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in ]1, +\infty[\,.$$

Para resumir, apresenta-se de seguida uma tabela com a derivada de algumas funções. Na coluna da direita, $u$ representa uma função de $x$. Devem decorar a coluna da esquerda como se se tratasse da tabuada! Observe-se como a coluna da direta resulta da da esquerda em combinação com o Teorema da Derivada da Composta.

| | |
|---|---|
| $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ | $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(e^u)' = e^u u'$ |
| $(a^x)' = (\ln a) a^x$ | $(a^u)' = (\ln a) a^u u'$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ |
| $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ | $(\operatorname{senh} u)' = u' \cdot \cosh u$ |
| $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$ | $(\cosh u)' = u' \cdot \operatorname{senh} u$ |
| $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ | $(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$ |
| $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ | $(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$ |
| $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ | $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u$ |
| $(\cot x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$ | $(\cot u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u' \cdot \csc^2 u$ |
| $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$. |

**Diferenciabilidade e Extremos Locais.**

**Definição 3.37.** Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que $f$ tem um *máximo local em $c$* (resp. um *mínimo local em $c$*) se existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(c)\,,\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (resp. $f(x) \geq f(c)\,,\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$). Diremos que $f$ tem um *extremo local em $c$* se $f$ tiver um máximo ou mínimo locais em $c \in D$.

**Teorema 3.38.** *Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto $I = ]a, b[$, tal que $f$ tem um extremo local num ponto $c \in I$. Então, se $f$ é diferenciável no ponto $c$, tem-se $f'(c) = 0$.*

*Dem.* Suponhamos que $f$ tem um máximo local no ponto $c \in I = ]a,b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in V_\delta(c) = ]c-\delta, c+\delta[$,

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0.$$

Usando este facto, temos então

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0\,,$$

enquanto

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0\,.$$

Como $f$ é por hipótese diferenciável no ponto $c$, podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

□

**Nota 3.39.** O Teorema 3.38 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Por exemplo, a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na Figura 25, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, mas não tem um extremo local nesse ponto.

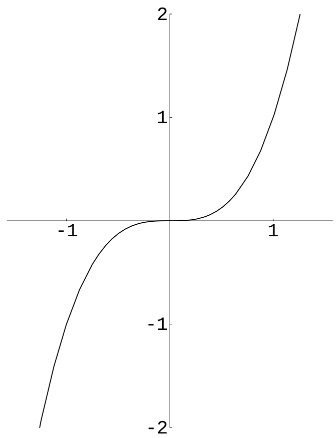


FIGURA 25. Gráfico da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Um ponto $c$ onde $f'(c) = 0$ chama-se *ponto crítico* de $f$. Assim, resumindo a nossa discussão, um extremo local é também um ponto crítico, mas podem existir pontos críticos que não são extremos locais.

**Nota 3.40.** Uma função pode ter um extremo local num ponto sem que seja diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a função módulo do Exemplo 3.10 tem um mínimo no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

**Exemplo 3.41.** O Teorema 3.38 fornece-nos um método para calcular o máximo e o mínimo de uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (recorde-se que, pelo Teorema Weierstrass, sabemos que existe um máximo e um mínimo), De facto, os pontos onde $f$ pode ter um máximo ou mínimo são:

(1) Os pontos de $]a,b[$ onde $f$ não é diferenciável;
(2) Os pontos críticos de $f$ em $]a,b[$;

(3) Os extremos $a$ e $b$.

Assim, apenas há que determinar estes pontos e depois calcular $f$ em cada um destes pontos para verificar se são máximos ou mínimos de $f$.

Por exemplo, seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 - x$. Esta função tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ para todo o $x \in [-1, 2]$. Assim, não existem pontos do primeiro tipo a considerar. Como $f'(x) = 0$ sse

$$3x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in ]-1, 2[$, estes são os pontos do segundo tipo a considerar. Finalmente, temos os extremos do intervalo $x = -1$ e $x = 2$.

Temos então que calcular os valores de $f$ em cada um destes pontos. Verifiquem que:

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Portanto, o máximo de $f$ é 6 e ocorre em $x = 2$; o mínimo é $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ e ocorre em $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Teorema de Rolle.**

**Teorema 3.42.** (Teorema de Rolle) *Seja $f$ uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in ]a, b[ \;:\; f'(c) = 0\,.$$

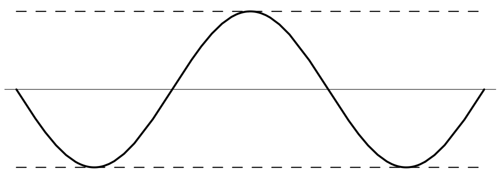

FIGURA 26. Versão geométrica do Teorema de Rolle.

*Dem.* Como $f$ está nas condições do Teorema 2.77 - Weierstrass, sabemos que $f$ tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f\,.$$

Se $M = m$, então $f$ é uma função constante em $[a, b]$ pelo que

$$f'(c) = 0\,,\ \forall\, c \in ]a, b[\ .$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores $M$ ou $m$ seja assumido por $f$ num ponto $c \in ]a, b[$. Temos então que $f$ tem um extremo nesse ponto $c$. Como $f$ é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 3.38 para concluir que então $f'(c) = 0$. □

**Corolário 3.43.** *Entre dois zeros de uma função diferenciável existe sempre (pelo menos) um zero da sua derivada*

*Dem.* Basta aplicar o Teorema 3.42 a uma função $f$, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. □

**Corolário 3.44.** *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

*Dem.* Redução ao absurdo + Corolário 3.43. Exercício. □

**Exemplo 3.45.** Se $f$ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem 3 raízes, então $f''$ tem (pelo menos) um zero: se $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$, com $r_1 < r_2 < r_3$, então do Teorema de Rolle vem $f'(s_1) = f'(s_2) = 0$ para alguns $s_1 \in ]r_1, r_2[$ e $s_2 \in ]r_2, r_3[$. Aplicando agora o Teorema de Rolle a $f'$ - que é também diferenciável em $\mathbb{R}$ - temos que $f''$ tem (pelo menos) um zero em $]s_1, s_2[$.

**Exemplo 3.46.** A equação $e^x = 3x$ tem exactamente 2 soluções: Vemos separadamente que:

(1) tem pelo menos 2 soluções. (Exercício, usando o Teorema de Bolzano).
(2) tem no máximo 2 soluções (pelo Teorema de Rolle).

Logo terá exactamente 2 soluções. Para ver (b): seja $f(x) = e^x - 3x$, diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = e^x - 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ tem uma só solução. Segue-se do Teorema de Rolle que $f$ tem no máximo dois zeros.

Geometricamente, o Teorema de Rolle diz que há um ponto $c \in ]a, b[$ tal que a reta tangente é horizontal, ou seja, paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (já que assumimos $f(a) = f(b)$).

**Teorema de Lagrange.** O próximo teorema é um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial, a partir do qual se deduzem várias propriedades fundamentais.

**Teorema 3.47.** (Teorema de Lagrange) *Seja $f$ uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in\ ]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

**Nota 3.48.** O Teorema de Rolle é o caso particular do Teorema de Lagrange que se obtém quando $f(a) = f(b)$. Geometricamente, o Teorema de Lagrange diz que há um ponto $c \in ]a, b[$ tal que a reta tangente é paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

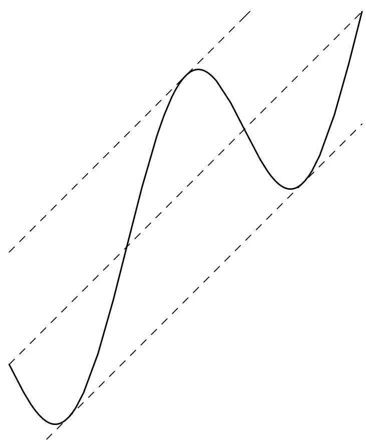

FIGURA 27. Versão geométrica do Teorema de Lagrange.

**Nota 3.49.** No caso em que $f = f(t)$ representa a posição de um objecto em movimento ao longo de uma reta entre os instantes de tempo $t = a$ e $t = b$, o Teorema de Lagrange afirma que há sempre um instante de tempo onde a velocidade instantânea é igual à velocidade média.

*Dem.* Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R}\,.$$

Temos assim que

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \Rightarrow f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a\,.$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \lambda x\,,\ \forall\, x \in [a, b]\ .$$

Como
$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a \Rightarrow g(b) = g(a)$$
e $g$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in ]a, b[$ tal que
$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$
□

**Exemplo 3.50.** Prove-se que $e^x > 1 + x$, $x > 0$.

Vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in ]0, x[$ tal que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$
Como $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$ e $x > 0$, logo
$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$
(Também é verdade que $e^x > 1 + x$, para $x < 0$. Reparem que $y = x + 1$ é a equação da recta tangente em $x = 0$.)

**Exemplo 3.51.** Prove-se que $x < \tan x$, $x \in ]0, \pi/2[$.

De novo, vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = \tan x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in ]0, x[$ tal que
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1$$
já que $\cos^2 x < 1$ em $]0, \pi/2[$. Logo como $x > 0$, segue-se que $\tan x > x$.

O Teorema de Lagrange está na base de tudo o que veremos a seguir, já que nos permite estudar o comportamento de uma função a partir de propriedades (muitas vezes simples) da sua derivada. É fundamental em:

- estudo de monotonia e classificação de extremos a partir do sinal da derivada;
- cálculo de limites - levantamento de indeterminações (Regra de Cauchy);
- estudo de concavidades a partir do sinal da segunda derivada;
- aproximação de funções por polinómios (Polinómio de Taylor);

**Exemplos de Aplicação do Teorema de Lagrange.**

**Corolário 3.52.** *Se $f$ é uma função nas condições do Teorema de Lagrange, então:*

(i) $f'(x) = 0$, $\forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$ *é constante em* $[a, b]$*;*
(ii) $f'(x) > 0$, $\forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$ *é estritamente crescente em* $[a, b]$*;*
(iii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$ *é estritamente decrescente em* $[a, b]$*.*

*Dem.* Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$. Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in ]x_1, x_2[$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f'(c) = 0; \\ > 0\,, & \text{se } f'(c) > 0; \\ < 0\,, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$
Logo,
$$\text{a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante,} & \text{se } f'(c) = 0; \\ \text{crescente,} & \text{se } f'(c) > 0; \\ \text{decrescente,} & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$
□

**Exemplo 3.53.** Consideremos a função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente no Exemplo 3.41. Vimos então que $f'(x) = 3x^2 - 1$ tem dois zeros (pontos críticos) em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Temos que:

- $f'(x) > 0$ no intervalo $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo;
- $f'(x) < 0$ no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente decrescente neste intervalo;
- $f'(x) > 0$ no intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2)$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo.

Estes intervalos de monotonia mostram que $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local de $f$.

**Corolário 3.54.** *Seja $f$ uma função nas condições do Teorema de Lagrange. Então, se existir o $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_d(a)$ e*

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)\,.$$

*Analogamente, se existir o $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_e(b)$ e*

$$f'_e(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)\,.$$

*Dem.* Para cada $x \in ]a, b[$, sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um $\xi = \xi(x) \in ]a, x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x\to a+} \xi(x) = a^+\,,$$

podemos usar o Teorema 2.42, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi)\,. \qquad \square$$

Este último resultado é especialmente útil para verificar a diferenciabilidade nalguns pontos delicados de funções definidas por ramos, já que permite evitar em muitos casos o cálculo de derivadas à esquerda e à direita por definição.

**Exemplo 3.55.** Pretende-se determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2/2} = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0; \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x < 0 \end{cases}$$

é diferenciável, bem como calcular a sua derivada nesses pontos.

Para $x > 0$ a função $f$ é definida por $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, pelo que é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(x\, e^{-x^2/2}\right)' = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (1 - x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Para $x < 0$ a função $f$ é definida por $f(x) = -x\, e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$, pelo que também é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(-x\, e^{-x^2/2}\right)' = (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^-\,.$$

Para $x = 0$, podemos usar o Corolário 3.54 do Teorema de Lagrange para calcular as derivadas laterais de $f$:

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2)\, e^{-x^2/2} = 1 \quad \text{e}$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2} = -1\,.$$

Como $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_e(0)$, concluimos que $f$ não é diferenciável no ponto zero.

**Exemplo 3.56.** Seja $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, $f(0) = \pi/2$.

Temos $f$ contínua em 0 e $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$, $x > 0$, logo $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$ e assim $f'_d(0) = -1$. Para $x < 0$ temos $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ logo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ e assim $f'_e(0) = 1$. Conclui-se que $f$ não é diferenciável em 0.

**Teorema de Cauchy.**

**Teorema 3.57.** (Teorema de Cauchy) *Sejam $f$ e $g$ funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciáveis em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\, ]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in\, ]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

**Nota 3.58.** O Teorema de Lagrange é o caso particular do Teorema de Cauchy que se obtém quando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x\,,\ \forall\, x \in [a,b]$.

*Dem.* Sabemos pelo Teorema de Rolle que

$$g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\, ]a,b[\ \Rightarrow g(a) \neq g(b)\,.$$

Seja então

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \mathbb{R}\,,$$

e consideremos a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)\,,\ \forall\, x \in [a,b]\ .$$

Temos então que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (verifiquem que de facto assim é), e $\varphi$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Podemos portanto aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in\, ]a,b[$ tal que

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,. \qquad \square$$

**Regra de Cauchy ou de L'Hôpital.**

**Teorema 3.59.** (Regra de Cauchy – primeira versão) *Sejam $f$ e $g$ funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto $]a,b[$. Suponhamos também que:*

(i) $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in\, ]a,b[$;
(ii)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a^+} g(x)\,.$$

*Então,*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ \textit{existe em}\ \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}\ \textit{existe em}\ \overline{\mathbb{R}}$$

*e*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

**Nota 3.60.** As versões análogas deste teorema para os limites

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } a = -\infty), \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } b = +\infty),$$

também são válidas e serão usadas na sequência.

*Dem.* Faremos apenas o caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Podemos então prolongar $f$ e $g$ por continuidade ao ponto $a \in \mathbb{R}$, fazendo $f(a) = 0 = g(a)$, e usar o Teorema de Cauchy para mostrar que, para cada $x \in ]a, b[$, existe um $\xi = \xi(x) \in ]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Como $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$, podemos então concluir que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \qquad \square$$

**Corolário 3.61.** (Regra de Cauchy – segunda versão) *Sejam $I$ um intervalo aberto, $a \in I$ um ponto desse intevalo (ou $a = -\infty$ se $I = ]-\infty, c[$, ou $a = +\infty$ se $I = ]c, +\infty[$, com $c \in \mathbb{R}$), $f$ e $g$ funções definidas e diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I \setminus \{a\}$. Suponhamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

*Então,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*sempre que o limite da direita existir em $\overline{\mathbb{R}}$.*

Temos assim que a Regra de Cauchy é um método para

resolver indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ em limites de funções diferenciáveis.

**Exemplos de Aplicação da Regra de Cauchy.**

**Exemplo 3.62.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1\,.$$

**Exemplo 3.63.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{27}$$

**Exemplo 3.64.**

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^+ \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0\,. \tag{28}$$

**Exemplo 3.65.** O cálculo seguinte ilustra mais uma aplicação simples da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty\,.$$

De facto, combinando este tipo de cálculo com o Método de Indução Matemática, obtém-se facilmente que:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{29}$$

Efetuando a mudança de variável $y = e^x$, deduzimos que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

**Exemplo 3.66.** Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,.$$

Uma primeira tentativa poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{0}{0} = \cdots$$

Uma segunda abordagem, com melhores resultados, poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

De facto, e tendo em conta o resultado (29) do Exemplo 3.65, a melhor abordagem seria neste caso a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0\,,$$

onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty$.

**Exemplo 3.67.** Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^0 = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que

$$x^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln(x^{\operatorname{sen} x})} = e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x}$$

(onde usámos a continuidade da função exponencial), podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{-\infty}{+\infty} &\overset{\text{RC}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot\frac{0}{1} = 0\,.\end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x} = e^0 = 1\,.$$

**Nota 3.68.** O método do exemplo anterior, que permitiu resolver uma indeterminação do tipo $0^0$, também pode ser usado para resolver indeterminações do tipo $\infty^0$ e $1^\infty$.

**Exemplo 3.69.** Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = 1^\infty = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer $x \in\, ]-\pi/2, \pi/2[$,

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\ln((\cos x)^{1/x^2})} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}}\,,$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} = -1\cdot\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

**Derivadas de Ordem Superior à Primeira.**

**Definição 3.70.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo $I = ]a, b[$. Se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável, a sua derivada $(f')'$ é designada por *segunda derivada de f* e representa-se por

$$f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f^{(2)} .$$

Mais geralmente, a *n-ésima derivada de f* define-se, por recorrência, como a derivada da $(n-1)$-ésima derivada de $f$, quando esta existir:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right) .$$

**Definição 3.71.** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I = ]a, b[$. Se existir a $n$-ésima derivada de $f$ em todo o intervalo $I$, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que *$f$ é uma função de classe $C^n(I)$*, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que $f$ é uma função de classe $C^0(I)$ se $f$ for contínua em $I$, e que $f$ é uma função de classe $C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 3.72.** Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ x^2\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \qquad (H \text{ representa a função de Heaviside – Exemplo 2.22.})$$

Esta função é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = 2x \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2x\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada $f'$ é por sua vez contínua em todo o $\mathbb{R}$, mas diferenciável apenas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2\,, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $f''_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$, não existe de facto segunda derivada de $f$ no ponto zero.

Assim, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ mas $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

**Exemplo 3.73.** Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = (x^2 \cos(1/x))' = 2x{\cdot}\cos(1/x) + x^2{\cdot}((-1/x^2)(-\operatorname{sen}(1/x))) = 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,,\ \forall\, x \neq 0 .$$

Pelo Princípio do Encaixe (Teorema 2.40) tal como já tinha sido feito no Exemplo 2.36, temos:

$$\lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = (\text{infinitésimo}) \times (\text{função limitada}) = 0 .$$

Assim, vemos que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x) = \text{ não existe (cf. Exemplo 2.35)},$$

pelo que neste caso não é possível recorrer ao Corolário 3.54.

De facto, a função $f$ é diferenciável no ponto zero com derivada $f'(0) = 0$, como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0 .$$

Temos assim que $f$ é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, como o $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe, esta função $f'$ não é contínua no ponto zero.

Temos então que $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas $f' \notin C^0(\mathbb{R})$ pelo que $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

**Exemplo 3.74.** A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$ , $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a $n$-ésima derivada de $f$ existe e é contínua em todo o $\mathbb{R}$:

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \text{ dada por } f^{(n)}(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

**Segunda Derivada e Extremos Locais.** A segunda derivada fornece-nos um teste simples para verificar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local:

**Teorema 3.75.** *Seja $f$ uma função de classe $C^2(]a,b[)$ e $c \in ]a,b[$ um ponto crítico de $f$. Então,*

(i) *$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ tem um mínimo local em $c$;*
(ii) *$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ tem um máximo local em $c$.*

**Nota 3.76.** Quando $f''(c) = 0$, e tendo apenas essa informação, nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico $c$.

*Dem.*
(i) Temos por hipótese que $f''$ é uma função contínua, com $f''(c) > 0$. Pelo Corolário 2.72, sabemos então que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f''(x) > 0 \text{ para todo o } x \in ]c-\delta, c+\delta[.$$

Podemos agora usar o Corolário 3.52 do Teorema de Lagrange para concluir que

$$\text{a função } f' \text{ é estritamente crescente no intervalo } ]c-\delta, c+\delta[.$$

Como por hipótese $c$ é um ponto crítico de $f$, sabemos que $f'(c) = 0$ pelo que

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in ]c-\delta, \delta[ \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x \in ]c, c+\delta[\ .$$

Usando novamente o Corolário 3.52 do Teorema de Lagrange, podemos finalmente concluir que

$$f \text{ é decrescente em } ]c-\delta, \delta[ \quad \text{e} \quad f \text{ é crescente em } ]c, c+\delta[,$$

pelo que $f$ tem, de facto, um mínimo local no ponto $c \in ]a,b[$.
(ii) Exactamento análogo a (i). ☐

**Exemplo 3.77.** Voltemos ao exemplo da função $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente. Vimos que os pontos críticos de $f$ eram $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $f''(x) = 6x$, temos que:

$$f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0, \quad f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0,$$

logo $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local. Esta mesma informação tinha sido obtida anteriormente analizando o sinal da primeira derivada.

**Concavidades e Inflexões.**

**Definição 3.78.** Seja $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $c \in ]a,b[$. Diremos que $f$ é *convexa* em $c$ (resp. *côncava* em $c$), ou que $f$ tem a *concavidade voltada para cima* em $c$ (resp. *concavidade voltada para baixo* em $c$), se o gráfico de $f$ estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de $c$) por *cima* (resp. *baixo*) da *recta tangente* ao gráfico de $f$ no ponto $c$. Ou seja, $f$ é *convexa* em $c$ (resp. *côncava* em $c$) se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c)\cdot(x-c)\,,\ \text{para todo o } x \in ]c-\delta, c+\delta[$$

$$(\text{resp. } f(x) - f(c) \leq f'(c)\cdot(x-c)\,,\ \text{para todo o } x \in ]c-\delta, c+\delta[).$$

Diremos que $f$ tem um *ponto de inflexão* em $c$ se existir $\delta > 0$ tal que, $f$ é convexa num dos intervalos $]c-\delta, c[$ ou $]c, c+\delta[$ e côncava no outro.

**Teorema 3.79.** *Sejam $f \in C^2(]a,b[)$ e $c \in ]a,b[$. Então:*

(i) *$f''(c) > 0 \Rightarrow f$ é convexa em $c$;*
(ii) *$f''(c) < 0 \Rightarrow f$ é côncava em $c$;*
(iii) *$(f''(c) = 0$ e $f''$ muda de sinal em $c) \Rightarrow f$ tem um ponto de inflexão em $c$.*

*Dem.* Consideremos a função auxiliar $g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c) \cdot (x - c)\,,\ \forall\, x \in ]a,b[\ .$$

Tendo em conta a Definição 3.78, temos que estudar o sinal desta função auxiliar $g$ numa vizinhança de $c \in ]a,b[$.

Observemos primeiro que:

$$g(c) = 0\,; \quad g'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow g'(c) = 0\,; \quad g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(c) = f''(c)\,.$$

Tendo em conta o Teorema 3.75, podemos então concluir que:

(i) $(f''(c) > 0) \Rightarrow (g''(c) > 0) \Rightarrow$ ($g$ tem um mínimo local em $c$) $\Rightarrow$ ($g(x) \geq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c$) $\Rightarrow$ ($f$ é convexa em $c$);

(ii) $(f''(c) < 0) \Rightarrow (g''(c) < 0) \Rightarrow$ ($g$ tem um máximo local em $c$) $\Rightarrow$ ($g(x) \leq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c$) $\Rightarrow$ ($f$ é côncava em $c$);

(iii) ($f''$ muda de sinal em $c$) $\Rightarrow$ ($f$ muda de convexidade em $c$).

□

**Assímptotas ao Gráfico de Uma Função.**

**Definição 3.80.** (Assímptotas Verticais) Sejam $I$ um intervalo, $a \in I$ e $f$ uma função definida em $I \setminus \{a\}$. Diremos que a recta vertical de equação $x = a$ é uma *assímptota vertical* ao gráfico de $f$ se

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \text{(qualquer uma das 4 combinações de sinais serve).}$$

**Definição 3.81.** (Assímptotas Oblíquas) Seja $f$ uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diremos que a recta de equação

$$y = m \cdot x + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}\,,$$

é uma *assímptota à esquerda* ao gráfico de $f$ (resp. *assímptota à direita* ao gráfico de $f$) se

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$$
$$\text{(resp.} \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0)\,.$$

No caso particular em que $m = 0$, diremos que o gráfico de $f$ tem uma *assímptota horizontal à esquerda* (resp. *assímptota horizontal à direita*).

**Teorema 3.82.** *Seja $f$ uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de $f$ tem uma assímptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$(a) \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b) \quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$
$$(\textit{resp.} \quad (a) \quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b) \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x)\,)\,.$$

*Nesse caso, a assímptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação*

$$y = m \cdot x + p\,.$$

*Dem.* Faremos apenas o caso da assímptota à esquerda, sendo o da assímptota à direita completamente análogo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a recta de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$, é uma assímptota à esquerda ao gráfico de $f$. Então

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a função auxiliar $\varphi$, definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p))\ , \text{ satisfaz } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+p+\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(m+\frac{p}{x}+\frac{\varphi(x)}{x}\right)=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}(p+\varphi(x))=p\in\mathbb{R}\,,$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores $m,p\in\mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(m\cdot x+p))=0\,,$$

pelo que a recta de equação $y=mx+p$ é uma assímptota à esquerda ao gráfico de $f$. $\square$

**Exemplo de traçado do gráfico de uma função.**

**Exemplo 3.83.** Pretende-se determinar intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=x\cdot e^{1/x}\,,\ \forall\, x\neq 0\,,$$

bem como esboçar o seu gráfico.

A função $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f'(x)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\,,\ \forall\, x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f'(x)=\begin{cases}>0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[;\\ =0\,, & \text{se } x=1;\\ <0\,, & \text{se } x\in\,]0,1[;\end{cases}$$

logo concluímos que

$$f \text{ é }\begin{cases}\text{crescente}\,, & \text{em } ]-\infty,0[\text{ e em } ]1,+\infty[;\\ \\ \text{decrescente}\,, & \text{em } ]0,1[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que $f$ tem um mínimo local em $x=1$.

A derivada $f'$ é também diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f'':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f''(x)=\frac{e^{1/x}}{x^3}\,,\ \forall\, x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f''(x)=\begin{cases}<0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[;\\ >0\,, & \text{se } x\in\,]0,+\infty[;\end{cases}\Rightarrow f \text{ é }\begin{cases}\text{côncava}\,, & \text{em } ]-\infty,0[;\\ \text{convexa}\,, & \text{em } ]0,+\infty[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que $f$ não tem pontos de inflexão (notem que $f$ não está sequer definida no ponto zero).

O único ponto onde $f$ pode ter uma assímptota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x\cdot e^{1/x}=0\cdot e^{-\infty}=0\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\cdot e^{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\frac{+\infty}{+\infty}\overset{\text{RC}}{=}\lim_{x\to0^+}e^{1/x}=+\infty\,.$$

O resultado deste segundo limite diz-nos que a recta vertical de equação $x=0$ é de facto uma assímptota vertical ao gráfico de $f$.

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot e^{1/x}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{y\to 0^\pm}\frac{e^y-1}{y}=1=p\in\mathbb{R}$$

(onde se fez a mudança de variável $y=1/x$, em que $x\to\pm\infty\Leftrightarrow y\to 0^\pm$), temos que a recta de equação $y=x+1$ é uma assímptota ao gráfico de $f$, tanto à direita como à esquerda.

A Figura 28 apresenta o esboço do gráfico de $f$.

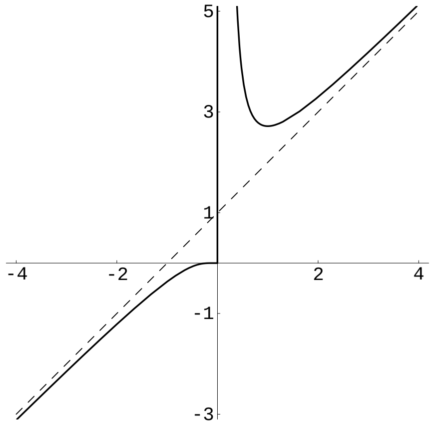


FIGURA 28. Esboço do gráfico da função $f$ do Exemplo 3.83.

**Polinómio de Taylor.** Seja $f:D\to\mathbb{R}$ uma função real que é diferenciável em $x=a$. Recordemos que a recta tangente ao gráfico de $f$ em $a$ é dada pelo gráfico do polinómio do 1º grau:

$$p_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Podemos ver este polinómio $p_{1,a}(x)$ do 1º grau como uma aproximação de 1ª ordem à nossa função $f$, em torno de $x=a$.

Suponhamos que, em vez de aproximar $f(x)$ por um polinómio do 1º grau, queríamos aproximar $f(x)$ por um polinómio do 2º grau, em torno de $x=a$. Vamos escrever este polinómio na forma:

$$p_{2,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2.$$

O seu gráfico é a parábola que melhor aproxima o gráfico de $f$ em torno de $x=a$, como sugerido na figura abaixo.

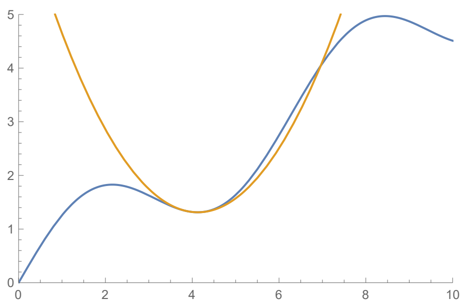


FIGURA 29. A função $f(x)=\operatorname{sen}(x)+x/2$ e a aproximação por um polinómio de grau 2 em torno de $x=4$.

Notem que se $p_{2,a}(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ em torno de $a$, então os valores $p_{2,a}(x)$ e de $f(x)$ em $a$, bem como os das suas derivadas, deverão coincidir:

$$f(a)=p_{2,a}(a)=a_0,$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= p'_{2,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{2,a}(a) = 2a_2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o polinómio $p_{2,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ em $2^{\text{a}}$ ordem em torno de $x = a$ deverá ser dado por:

$$p_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

É claro que nada nos impede de tentar aproximar $f$, em torno de $a$, por um polinómio de grau $n$ qualquer. Nesse caso, escrevendo o polinómio na forma:

$$p_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

e impondo que $f(x)$ e $p_{n,a}(x)$ tenham as mesmas derivadas até ordem $n$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= p_{n,a}(a) = a_0, \\ f'(a) &= p'_{n,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{n,a}(a) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(a) &= p^{(k)}_{n,a}(a) = k!a_k, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= p^{(n)}_{n,a}(a) = n!a_n. \end{aligned}$$

Concluímos que se $f$ é diferenciável até ordem $n$, o polinómio $p_{n,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ até ordem $n$, em torno de $x = a$, deverá ser dado por:

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{30}$$

**Definição 3.84.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem $n$ em $a \in D$. Chama-se **polinómio de Taylor de grau $n$ de $f$ em $a$**, ao polinómio de grau $n$ dado por (30).

No caso das funções elementares este polinómio é muito simples de calcular.

**Exemplo 3.85.** Seja $f(x) = e^x$. Notem que, para qualquer natural $k$,

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Assim, temos que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, logo o polinómio de Taylor de $e^x$ de grau $n$, em $x = 0$, é:

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

**Exemplo 3.86.** Seja $f(x) = \ln x$. Vamos calcular o polinómio de Taylor de grau $n$, em $x = 1$. Um cálculo simples fornece:

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{x}, & \ln'(1) &= 1; \\ \ln''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \ln''(1) &= -1; \\ \ln'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \ln'''(1) &= 2; \\ &\vdots \\ \ln^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}, & \ln^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)!. \end{aligned}$$

Logo o polinómio de Taylor de $\ln x$ de grau $n$, em $x = 1$, é:

$$p_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}.$$

**Exemplo 3.87.** Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Notem que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x),\ \operatorname{sen}''(x) = \cos'(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}''' x = -\operatorname{sen}' x = -\cos x,\ \operatorname{sen}''''(x) = -\cos' x = \operatorname{sen} x.$$

Tendo obtido $\operatorname{sen} x$ de novo, não precisamos de calcular mais derivadas: as derivadas repetem-se num ciclo de 4. Em particular, em $x = 0$ obtemos:

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}^{(4)}(0) = \operatorname{sen}^{(8)}(0) = \cdots = 0,$$
$$\operatorname{sen}'(0) = \operatorname{sen}^{(5)}(0) = \operatorname{sen}^{(9)}(0) = \cdots = \cos(0) = 1,$$
$$\operatorname{sen}''(0) = \operatorname{sen}^{(6)}(0) = \operatorname{sen}^{(10)}(0) = \cdots = -\operatorname{sen}(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = \operatorname{sen}^{(7)}(0) = \operatorname{sen}^{(11)}(0) = \cdots = -\cos(0) = -1.$$

Portanto, o polinómio de Taylor de $\operatorname{sen} x$, em $x = 0$, é:

$$p_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Exercício 3.88.** Mostrem que o polinómio de Taylor de $\cos x$, em $x = 0$, é:

$$p_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

O resultado seguinte torna precisa a ideia de que o polinómio de Taylor de grau $n$ é uma boa aproximação da função até ordem $n$:

**Teorema 3.89.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem $n$ em $a \in D$ e seja $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau $n$ em $a$. Então:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

*Demonstração.* Notem que se separarmos o termo de grau $n$ no polinómio de Taylor, obtemos:

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Basta pois mostrar que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Para isso, vamos aplicar a regra de Cauchy: Seja $h(x) := f(x) - p_{n-1,a}(x)$ o numerador e $g(x) := (x-a)^n$ o denominador. Deve ser claro que:

- $h^{(k)}(x)$ é contínua em $a$ para $0 \le k \le n-1$;
- $h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0$, pois $f(x)$ e $p_{n-1,a}(x)$ têm as mesmas derivadas em $a$ até ordem $n-1$;
- $g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$.

Podemos pois aplicar a regra de Cauchy $n-1$ vezes, obtendo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - p_{n-1,a}^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Observem que como $p_{n-1,a}(x)$ é um polinómio de grau $n-1$, a sua derivada de ordem $n-1$ é constante. De facto, $p_{n-1,a}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$, logo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

onde a última igualdade é simplesmente o facto de que $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. □

**Resto e Teorema de Taylor.** Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau $n$. Definimos o **resto de ordem** $n$ como sendo a função:

$$R_{n,a}(x) := f(x) - p_{n,a}(x).$$

Desta forma, podemos enunciar o Teorema 3.89 na forma equivalente:

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem $n$ em $a \in D$, tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O resultado seguinte fornece uma expressão para o resto, que facilita a determinação de estimativas para o seu valor.

**Teorema 3.90** (Teorema de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Seja $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a sua derivada de ordem $n+1$ existe. Seja $a \in [b,c]$. Então:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

*onde o resto é dado pela fórmula:*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{para algum } \theta \text{ entre } x \text{ e } a.$$

*Demonstração.* Seja $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Repare-se que $R(a) = \cdots = R^{(n)}(a) = 0$ e $g(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$. Pelo Teorema de Cauchy, existe um ponto $\theta_1$ entre $a$ e $x$ tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x) - R(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)}.$$

Aplicando novamente o teorema, existe $\theta_2$ entre $a$ e $\theta_1$ (em particular entre $a$ e $x$) tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)} = \frac{R(\theta_1) - R(a)}{g(\theta_1) - g(a)} = \frac{R''(\theta_2)}{g''(\theta_2)}.$$

Procedendo indutivamente, concluímos que existe $\theta_{n+1}$ entre $a$ e $x$ tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{g^{(n+1)}(\theta_{n+1})}.$$

Repare-se que

$$R^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = f^{(n+1)}(\theta_{n+1}), \quad g^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = (n+1)!.$$

Logo

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

**Exemplo 3.91.** A expansão de Taylor com resto do seno, em $x = 0$, é dada por:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Atendendo a que

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)| \le 1, \forall \theta,$$

podemos estimar facilmente o resto:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Se, por exemplo, queremos calcular o valor de $\operatorname{sen} 2$ com um erro inferior a $0.0001 = 10^{-4}$, então devemos escolher o natural $n$ de forma que:

$$\frac{|2|^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Experimentando $n = 1, 2, \ldots$, vemos que $n = 5$ funciona. Assim,

$$\operatorname{sen} 2 \simeq 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} = 0,90929$$

com um erro inferior a $0,0001$.

**Extremos locais de ordem superior.** Podemos utilizar o polinómio de Taylor para obter um teste para extremos locais que aperfeiçoa o teste que tínhamos estudado anteriormente no Teorema 3.75:

**Proposição 3.92.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem $n$ em $a \in D$ e suponha-se que:*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0$$

*Então:*

*(i) Se $n$ é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então $f$ tem um máximo local em $x = a$;*
*(ii) Se $n$ é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então $f$ tem um mínimo local em $x = a$;*
*(iii) Se $n$ é ímpar então $f$ não tem nem um máximo local nem um mínimo local em $x = a$.*

Por outras palavras, o comportamento de $f(x)$ em $x = a$ é idêntico ao comportamento do polinómio $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ em $x = a$:

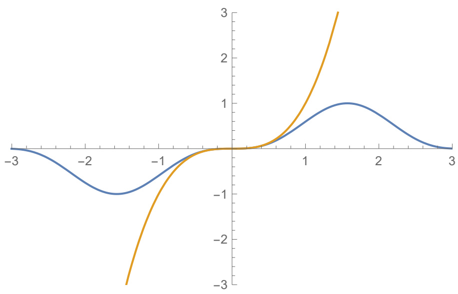


Figura 30. A função $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ e o polinómio $x^3$.

*Demonstração.* Como

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

o Teorema 3.89 diz-nos que:

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, concluímos que para $x$ suficientemente perto de $a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \text{ tem o mesmo sinal que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

O resultado da proposição é uma consequência imediata deste facto. $\square$

**Exemplo 3.93.** Consideremos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = (x-1)^3 \ln x.$$

Em $x=1$ as derivadas desta função são:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)^3}{x} + 3(x-1)^2\ln x & f'(1) &= 0\\
f''(x) &= -\frac{(x-1)^3}{x^2} + 6\frac{(x-1)^2}{x} + 6(x-1)\ln x & f''(1) &= 0\\
f'''(x) &= 2\frac{(x-1)^3}{x^3} - 9\frac{(x-1)^2}{x^2} + 18\frac{x-1}{x} + 6\ln x & f'''(1) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= -6\frac{(x-1)^3}{x^4} + 24\frac{(x-1)^2}{x^3} - 36\frac{x-1}{x^2} + \frac{24}{x} & f^{(4)}(1) &= 24
\end{aligned}$$

Concluímos que $f$ possui um mínimo local em $x=1$.

**Nota 3.94.** Este teste não resolve completamente o problema de determinar os extremos locais, mesmo de funções que possuam derivadas de todas as ordens. Por exemplo, a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0\\ 0, & \text{se } x = 0,\end{cases}$$

possui derivadas de todas as ordens. Em $x=0$, temos que $f^{(n)}(0)=0$ para todo o $n$, logo o teste não nos permite concluir nada. Na realidade, em $x=0$ a função possui um mínimo pois $f(x)>0$ se $x\neq 0$. Notem, ainda, que para esta função o polinómio de Taylor (de qualquer grau) em $x=0$ é identicamente zero!

**O número $e$ é irracional.** Uma outra aplicação curiosa da fórmula do resto é a seguinte:

**Teorema 3.95.** *O número* **e** *é irracional.*

*Demonstração.* Como $(e^x)' = e^x$ a expansão de Taylor com resto da exponencial em $x=0$ é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Se $\theta \leq x$ então $e^\theta \leq e^x$, logo podemos estimar o resto, para $x>0$, da seguinte forma:

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como sabemos que $e = e^1 \leq 3$, concluímos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R.$$

onde o resto satisfaz $0 < R < 3/(n+1)!$.

Suponhamos então, por absurdo, que $e$ era um número racional $a/b$ e escolha-se um natural $n > b$ e maior do que 3. Então, obtemos:

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R.$$

Como todos os termos, com excepção possivelmente de $n!R$, são números naturais, concluímos que $n!R$ também tem de ser um número natural. Este número natural deverá satisfazer a desigualdade:

$$0 < n!R < \frac{n!3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1.$$

Isto é uma contradição, pois é claro que não há nenhum número natural entre 0 e 1. $\square$

**Recursos para auxílio ao estudo.** Aconselha-se a utilização desta aplicação em Geogebra para acompanhar o estudo da secção sobre o Polinómio de Taylor. Na aplicação pode escolher-se: a função $f(x)$ a aproximar; o ponto $a$; $n$ - a ordem do polinómio de Taylor. Recomenda-se a escolha de várias funções e a escolha de $n$'s cada vez maiores; observe o que acontece com o gráfico do polinómio de Taylor (a vermelho), quando comparado com o gráfico da função $f(x)$ (a azul).

## 4. Primitivação

**Conteúdo**



---

**I. Definição de primitiva. Aplicações.** Primitivação é a operação "inversa" da derivação. Mais precisamente:

Uma **primitiva** de uma função $f$ é uma função $F$ com derivada $F' = f$, i.e., tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\,.$$

Escreveremos então que

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

o que significa precisamente " $F$ é uma função com derivada $F' = f$ ".

Também se pode escrever $F(x) = P(f)(x)$, com o mesmo significado. Notem que

$$F' = f \implies (F + c)' = f \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

pelo que, se $F$ é uma primitiva de $f$, então $F + c$ também é uma primitiva de $f$. Vejamos agora que, para funções definidas em intervalos, a família de todas as primitivas é necessariamente desta forma:

**Proposição 4.1**

Se $F, G : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de uma dada função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$, então $F - G$ é constante.

*Demonstração.* Pela definição de primitiva,

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in ]a, b[.$$

Pelo Corolário 3.52-(i), concluímos que $F - G$ é constante. □

A $F(x) = \int f(x)dx + c$ chamamos a *forma geral das primitivas* de $f$ no intervalo $I$, ou seja, a família de todas as primitivas de $f$ em $I$.

Poderá ser dada uma condição adicional que determine a constante $c$, por exemplo da forma $F(x_0) = a$. Se uma função estiver definida numa união de intervalos abertos disjuntos, a proposição anterior permite concluir que todas as primitivas diferem por uma constante em cada um dos intervalos, podendo essa constante mudar de intervalo para intervalo.

**Exemplo 4.2:**

(1) $\int 1dx = P(1) = x$. A forma geral das primitivas (em $\mathbb{R}$) é $F(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ constante. Se quisermos a (única) primitiva $F$ tal que $F(2) = 3$, então

$$F(2) = 2 + c = 3 \implies c = 1,$$

logo $F(x) = x + 1$.

(2) Determinar $F$ tal que $F'(x) = 2x$ e $F(0) = 3$: $\int (2x)dx = x^2$, logo $F(x) = x^2 + 3$.

(3) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x^2$. A família de todas as primitivas de $f$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x < 0 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.3**

Nem todas as funções são primitiváveis. Recorde-se a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se $H$ fosse primitivável, i.e., se existisse $F$ diferenciável tal que $F'(x) = H(x)$, então

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1, & x > 0 \\ c_2, & x < 0. \end{cases}$$

No entanto, desta expressão concluiríamos que $F$ não seria diferenciável em 0 (neste caso, $F'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$ e $F'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0$). **Veremos mais à frente que todas as funções *contínuas* são primitiváveis.**

Em geral, a menos que seja pedido explicitamente, vamos determinar uma primitiva qualquer. O objectivo desta secção é aprender a encontrar primitivas de algumas funções elementares, quando essas primitivas podem também ser expressas como funções elementares. Aqui, o termo **função elementar** significa uma função que pode ser expressa por adição, multiplicação, divisão e composição de funções polinomiais, potências, funções trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas, e funções exponencial e logaritmo.

No próximo capítulo (integração), veremos que o cálculo de primitivas tem aplicações ao cálculo de áreas de figuras planas. Para já, damos 3 aplicações mais imediatas.

**Aplicação 1.** Seja $x(t)$ uma função que representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo $t$ ao longo de uma reta (pensem por exemplo num automóvel ao longo de uma longa reta na autoestrada) e suponhamos conhecer a expressão da velocidade através de uma função $f(t)$ (ou seja, conseguimos obter a informação do velocímetro do automóvel). Será que conseguimos reconstruir o movimento do objeto? A função posição irá satisfazer a relação:

$$x'(t) = f(t),$$

ou seja, a função posição é uma primitiva da função velocidade. Obviamente que conhecer a velocidade do objeto **não determina de forma única** a sua posição: é necessário saber onde o objeto estava num dado instante (ou seja, dar uma condição do tipo $x(t_0) = x_0$)! Este é, por outras palavras, o conteúdo do que acabámos de estudar: as primitivas em intervalos são únicas a menos de uma constante aditiva.

**Aplicação 2.** Seja $x(t)$, de novo, uma função que representa a posição de um objecto em movimento retilíneo no instante de tempo $t$ e recordemos a segunda lei de Newton: massa vezes aceleração é igual a força. Se tivermos uma força $f(t)$ que apenas depende do tempo, nesse caso a relação é:

$$mx''(t) = f(t).$$

Assim, dada uma força $f$ específica, para determinarmos o movimento deveremos primitivar duas vezes. No caso concreto de um objeto atirado verticalmente e não contando com a resistência do ar, temos $f(t) = -mg$, onde $g$ é a aceleração da gravidade, ou seja, uma constante. Então

$$x''(t) = -g \implies x'(t) = -gt + b \implies x(t) = -gt^2/2 + bt + c,$$

para certas constantes $b, c$. Observe-se que estas constantes determinam-se através da posição e velocidades iniciais, ou seja, prescrevendo $x(0)$ e $x'(0)$. Vimos assim, noutro contexto, uma aplicação da operação de primitivação: dada uma força $f(t)$, para determinar a posição $x(t)$ terei de primitivar duas vezes a função $f$.

**II. Primitivas Imediatas.** As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} &\implies \int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1 \\
\frac{d}{dx}(e^x) = e^x &\implies \int e^x\, dx = e^x \\
\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x &\implies \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\
\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} &\implies \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|\,,\ \forall x \neq 0 \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x &\implies \int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x \\
\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x &\implies \int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x &\implies \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \\
\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x &\implies \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \\
\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan x \\
\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\, dx = -\cot x \\
\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\implies \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x \\
\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} &\implies \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x
\end{aligned}$$

Além disso, das regras de derivação

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx},\ \text{para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

vem que

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx \quad \text{e} \quad \int cf\,dx = c\int f\,dx\,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

**Nota 4.1.** A última propriedade não é válida se $c$ não for uma constante!

**Exemplo 4.4**

(1) $\int (\sqrt{x}+2)x\,dx = \int x^{3/2}dx + \int 2x\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x^2.$

(2) $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|.$

(3) $\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}.$

(4) $\int (x+1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^4.$

(5) $\int (1-x)^3\,dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4.$

(6) $\int (2e^x - \operatorname{sen} x)\,dx = 2e^x + \cos x.$

(7) $\int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\arctan x.$

**III. Primitivas Quase-Imediatas.** A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) \text{ diz-nos que } \int F'(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x)).$$

Assim, se $F$ for a primitiva de uma função $f$, ou seja, se $F(x) = \int f(x)\,dx$, então ficamos com a fórmula:

(31) $$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = F(u(x)).$$

Esta fórmula, combinada com o que foi visto anteriormente para primitivas imediatas, conduz por fim à seguinte tabela de primitivas.

**Tabela de primitivas imediatas e quase-imediatas**

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$ | $\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$ |
| $\int e^x\,dx = e^x$ | $\int e^{u(x)}u'(x)\,dx = e^{u(x)}$ |
| $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ | $\int a^{u(x)}u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ |
| $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\,,\ \forall x \neq 0$ | $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|$ |
| $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$ | $\int \operatorname{senh}(u(x))u'(x)\,dx = \cosh(u(x))$ |
| $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$ | $\int \cosh(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{senh}(u(x))$ |

| | |
|---|---|
| $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$ | $\int \cos(u(x))u'(x)\, dx = \operatorname{sen}(u(x))$ |
| $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x$ | $\int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\, dx = -\cos(u(x))$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan x$ | $\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\, dx = \tan(u(x))$ |
| $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\, dx = -\cot x$ | $\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\, dx = -\cot(u(x))$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x$ | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\, dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$ | $\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\, dx = \arctan(u(x))$ |

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\ln|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \ln|\operatorname{sen} x|$$

**Exemplo 4.5**

Calculemos uma primitiva de $f = 2xe^{x^2}$: como

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = \int (x^2)'e^{x^2}\, dx,$$

podemos aplicar a regra de primitivação da exponencial com $u = x^2$:

$$\int 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2}.$$

**Exemplo 4.6**

Calculemos uma primitiva de $f = \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))$: como

$$\cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))'\cos(\operatorname{sen}(x)) = u'\cos u, \text{ com } u = \operatorname{sen}(x),$$

podemos aplicar a regra de primitivação do cosseno:

$$\int \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))dx = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)).$$

Por vezes, é preciso ajustar uma constante a multiplicar para podermos aplicar as regras de primitivação.

**Exemplo 4.7**

Calculemos uma primitiva de $f = e^{2x}$: como a derivada do expoente é 2, precisamos de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 2:

$$\int e^{2x}dx = \int \frac{1}{2} \times 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

**Exemplo 4.8**

Calculemos uma primitiva de $f = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. A derivada do argumento do seno é $3x^2$, que é *quase* o que está a multiplicar do lado de fora. Precisamos só de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 3:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \int \frac{1}{3} \times 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\cos(x^3).$$

**Exemplo 4.9**

Calculemos uma primitiva de $f = 1/(4+x^2)$. A expressão é semelhante à da fórmula da primitivação do arco-tangente: em vez de 4, deveria estar 1. Vamos então colocar o 4 em evidência:

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^2/4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx.$$

A derivada do que está dentro do quadrado é $1/2$, pelo que precisamos de acertar constantes:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{4}\int 2\frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x/2)'}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(x/2).$$

**Nota 4.2.** Para o cálculo de primitivas, é importante relembrar algumas identidades de trigonometria:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x &= 1, & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \\ \operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen} x \cos x, & \cos(2x) &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \end{aligned}$$

**IV. Primitivação por Partes.** A fórmula para a derivada do produto de duas funções $u$ e $v$,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \iff u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v\,,$$

dá origem à:

**Fórmula de primitivação por partes**:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função $u$, cuja derivada é mais simples do que $u$, com uma função $v'$ com primitiva imediata ou quase-imediata $v$.

**Exemplo 4.10:**

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$, fazendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$.

(2) Para calcular $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$, escolhemos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = \operatorname{sen}(2x)$, e depois fazemos outra primitivação por partes (exercício).

(3) $\displaystyle\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$, fazendo $u(x) = \ln x$ e $v'(x) = x^2$.

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$

Quando $\ln x$ ou $\arctan x$ figuram num produto, é frequentemente útil escolhê-los como $u(x)$, isto é, como termos a derivar (mas isto não é uma regra para aplicar às cegas, atenção!).

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\,dx = \int 1 \cdot f(x)\,dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtém-se então que

$$\int f(x)\,dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\,dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ e reencontrar de novo $\int f$ com outros coeficientes, resolvendo-se depois a equação obtida em ordem à incógnita $\int f$. Por exemplo, para $x > 0$,

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Note-se que reencontrámos do lado direito a nossa incógnita $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ com coeficiente $-1$, pelo que

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\,.$$

**Exemplo 4.11:**

(1) $\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t \cos t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \left(e^t \cos t + \int e^t \operatorname{sen} t\,dt\right)$, e portanto

(32) $$\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{2} e^t (\operatorname{sen} t - \cos t).$$

(2) $\int \arctan(x)\,dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$. [Exercício, por partes]

(3) $\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$. [Exercício, por partes]

**V. Primitivas de Funções Racionais.** É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com $p$ e $q$ polinómios, em termos de funções elementares (cf. livro de Spivak, que consta na bibliografia da cadeira). Aqui mostramos como proceder num caso particular, o que nos guiará para perceber o que acontece no caso geral.

**Caso particular.** Primitiva de

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

quando $p$ é um polinómio de grau $\leq 2$ e $q$ é um polinómio de grau 3 da forma $q(x) = x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. **Note-se que o grau do denominador é maior que o do numerador.**

A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza do polinómio em denominador.

**Caso 1.** O polinómio denominador $q$ tem 3 raízes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,,\ \text{com } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C\ln|x-\gamma|\,.$$

**Exemplo 4.12**

Decompondo em fracções simples,

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

Logo,

$$x+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2),\ \forall x$$

Para determinar $A$,$B$ e $C$, temos essencialmente duas técnicas: *comparar coeficientes* (note-se que temos uma igualdade entre dois polinómios) ou *dar valores a $x$*. Usemos a segunda técnica: fazendo $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ temos $A = 1, B = -3$, $C = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-3}\,dx\\ &= \ln|x-1| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3|.\end{aligned}$$

**Caso 2.** O polinómio denominador $q$ tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,,\ \text{com } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

**Exemplo 4.13**

Decompondo,

$$\begin{aligned}\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\\ &= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}\end{aligned}$$

Logo,

$$3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1),\ \forall x,$$

e fazendo, por exemplo, $x = -1 \Rightarrow A = 1/3$, $x = 2 \Rightarrow C = 1$ e vendo o coeficiente de $x^2$ temos $0 = A + B \Rightarrow B = -1/3$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(x+1)(x-2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1/3}{x+1} - \frac{1/3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2}.\end{aligned}$$

**Caso 3.** O polinómio denominador $q$ tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

**Caso 4.** O polinómio denominador $q$ tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2 + b^2)\,, \text{ com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx + C}{(x-a)^2 + b^2}\,, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

**Exemplo 4.14**

Mostremos que $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan(x/2)$

Decomposição:

$$\frac{x+2}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)x}{x(x^2+4)}$$

Logo,

$$x + 2 = A(x^2+4) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

e, comparando coeficientes, vem $A = 1/2, C = 1$ e $A + B = 0 \Rightarrow B = -1/2$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x(x^2+4)} &= \int \frac{1/2}{x}\,dx + \int \frac{-x/2+1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{4+x^2}\,dx,\end{aligned}$$

donde o resultado segue.

**Caso Geral.** O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

**Teorema 4.15: Decomposição em Fracções Parciais**

Seja $n < m$, e considere-se a função racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}.$$

Então o denominador pode ser factorizado na forma:

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}([x-a_1]^2 + b_1^2)^{s_1} \cdots ([x-a_l]^2 + b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] + \\ &+ \left[\frac{A_{1,1}+B_{1,1}x}{(x-a_1)^2+b_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1}+B_{1,s_1}x}{((x-a_1)^2+b_1^2)^{s_1}}\right] + \cdots + \\ &+ \left[\frac{A_{l,1}+B_{l,1}x}{(x-a_l)^2+b_l^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l}+B_{l,s_l}x}{((x-a_l)^2+b_l^2)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Notem que a factorização de $q(x)$ dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $r_1, \ldots, r_k$;
- $a_1 \pm i\, b_1, \ldots, a_l \pm i\, b_l$ são as raízes complexas de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $s_1, \ldots, s_l$;

Não demonstraremos este teorema, mas sublinhamos o facto de ser importante o grau do polinómio em denominador ser estritamente maior que o grau do numerador (veja-se mais à frente o que fazer se isto não acontecer). **Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos**, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\, dx = \begin{cases} a\ln(x-\alpha)\,, & \text{se } r = 1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\,, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A+Bx}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx + (A+aB)\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição $t = (x-a)^2 + b^2$ (ver a secção VI à frente). A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

**Exercício 4.3.** Usando primitivação por partes, mostre que, para $s > 1$,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^s}\, dx = \frac{1}{2s-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{s-1}}\, dx.$$

**Exemplo 4.16**

Calculemos uma primitiva de $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-1}\, dx = \int \frac{4}{(x-1)(x+1)}\, dx.$

Escrevemos

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

logo $4 = A(x+1) + B(x-1)$. Fazendo $x = 1$ temos $4 = 2A \Rightarrow A = 2$ e fazendo $x = -1$, temos $4 = -2B$, logo $B = -2$. Temos assim

$$\int \frac{4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

**Exemplo 4.17**

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2+2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

**Exemplo 4.18**

Calculemos a primitiva de
$$\frac{4x}{x^4-1}.$$
Em primeiro lugar, devemos factorizar o denominador:
$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
Decompondo em fracções simples,
$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$
Logo,
$$4x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$
e, fazendo $x = 1 \Rightarrow A = 1$, $x = -1 \Rightarrow B = 1$ $x = 0 \Rightarrow 0 = A - B - D \Rightarrow D = 0$, vendo o coeficiente de $x^3$, $0 = A + B + C \Rightarrow C = -2$. Assim sendo,
$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x^2+1|.\end{aligned}$$

**E se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador?** Ao primitivar uma função racional $p(x)/q(x)$ **no caso de o grau de $p$ ser maior ou igual ao de $q$**, é possível reduzir aos casos anteriores através de manipulações algébricas, como a **divisão de polinómios.** Veja-se desde já um exemplo simples:

**Exemplo 4.19**

Considere-se o cálculo de $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. Como o grau dos polinómios em numerador e denominador são iguais, deveremos primeiramente manipular a fração:
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \arctan x.$$

Para ver o caso geral, comecemos por recordar que, dados dois números naturais $D$ (o dividendo) e $d$ (o divisor), podemos escrever
$$D = dQ + R, \quad Q, R \in \mathbb{N},\ R < d, \quad Q \text{ quociente},\ R \text{ resto}.$$
Esta decomposição implica
$$\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}, \quad R < d.$$
Para obtermos $Q$ e $R$, aplicamos o algoritmo clássico de divisão. **O mesmo pode ser feito para polinómios**:

Dados dois polinómios $p(x)$ e $q(x)$, se $p$ tiver grau igual ou superior a $q$, podemos escrever

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}, \quad \text{com grau de } R(x) < \text{grau de } q(x).$$

Assim, teremos

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx.$$

A primitiva $\int Q(x)\,dx$ é simples de calcular ($Q$ é um polinómio) e para calcular $\int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx$, como o grau de $q$ já é maior que o de $R$, podemos aplicar a decomposição vista anteriormente.

**Exemplo 4.20**

Pretendemos calcular $\int \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx$. Queremos para isso dividir $x^3-3x+1$ por $x^2-1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2-1 \\ \cline{8-8} \end{array}$$

Em $x^3$, quantas vezes cabe $x^2$? Cabe $x$ vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2-1 \\ \cline{8-8} -x^2\times x & + & 0 & + & 1\times x & & & x \end{array}$$

Agora faço a doma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & x^2-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & 0 & + & x & & & x \\ \cline{1-7} 0 & + & 0 & - & 2x & + & 1 & \end{array}$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3-3x+1}{x^2-1} = x + \frac{-2x+1}{x^2-1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3-3x+1}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{-2x+1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x+1}{(x-1)(x+1)}\,dx = (\ldots)$$

(termine agora as contas e determine a primitiva).

**Exemplo 4.21**

Pretendemos calcular $\int \frac{x^3+2x^2-4}{x-1}\,dx$. Queremos dividir $x^3+2x^2-4$ por $x-1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} \end{array}$$

Em $x^3$, quantas vezes cabe $x$? Cabe $x^2$ vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x & & & & & x^2 \end{array}$$

Agora faço a soma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{ccccccc|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2 \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \end{array}$$

Como o resto tem grau maior que o divisor, o algoritmo continua. Em $3x^2$, quantas vezes cabe $x$? Cabe $3x$ vezes:

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8}
-x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x \\ \cline{1-7}
0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\
 & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7}
 & & 0 & + & 3x & - & 4 &
\end{array}
$$

Como o resto tem grau igual ao do divisor, o algoritmo continua. Em $3x$, quantas vezes cabe $x$? Cabe 3 vezes:

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8}
-x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x+3 \\ \cline{1-7}
0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\
 & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7}
 & & 0 & + & 3x & - & 4 & \\
 & & & & -3x & + & 3 & \\ \cline{1-7}
 & & & & 0 & - & 1 &
\end{array}
$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3+2x^2-4}{x-1} = x^2+3x+3+\frac{-1}{x-1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3+2x^2-4}{x-1}\,dx = \int (x^2+3x+3)\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x-\ln|x-1|.$$

**VI. Primitivação por Substituição.** A fórmula para a derivada da função composta, já referida nestes apontamentos em (31), dá origem à:

**Fórmula de primitivação por substituição**:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x = u(t)$ na função e multiplicar por $u'(t) = \frac{dx}{dt}$, ou seja 'substituir' $dx = u'(t)\,dt$ [5] em $\int f(x)\,dx$;

(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável $t$;

(iii) fazer a substituição inversa $t = u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Estamos obviamente a assumir que $u(t)$ admite inversa.

**Exemplo 4.22**

Calculemos a primitiva de $x\sqrt[3]{x+2}$, fazendo $t = \sqrt[3]{x+2}$, ou seja, $x = t^3-2 = u(t)$. Assim, $u'(t) = \frac{dx}{dt} = 3t^2$ e portanto (formalmente) $dx = 3t^2dx$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx = \int u(t)\sqrt[3]{u(t)+2}\cdot u'(t)dt = \int (t^3-2)t\times 3t^2dt$$

[5] Uma mnemónica para decorar isto é a seguinte: fazendo $x = u(t)$, vem $\frac{dx}{dt} = u'(t)$, donde (formalmente) $dx = u'(t)dt$.

$$= \int 3t^6 - 6t^3 dt = \frac{3}{7}t^7 - \frac{6}{4}t^4.$$

Agora temos de ter o cuidado de regressar à variável original $x$. Como $t = \sqrt[3]{x+2}$, obtemos então

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx = \int 3t^6 - 6t^3\, dt = \frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{2}t^4 = \frac{3}{7}(\sqrt[3]{x+2})^7 - \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2})^3.$$

**Exemplo 4.23**

Calculemos a primitiva de $\operatorname{sen}\sqrt{x}$, através da substituição $x = u(t) = t^2$ $(t > 0)$, assim $u'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$, o que implica que $dx = 2tdt$:

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx = \int \operatorname{sen}(\sqrt{u(t)})u'(t)dt = \int 2t\operatorname{sen} tdt.$$

Esta primitiva parece mais fácil do que a anterior, pelo que continuamos o cálculo. Esta nova primitiva não é imediata, mas facilmente se resolve com uma primitivação por partes:

$$\int 2t\operatorname{sen} tdt = -2t\cos t - \int -2\cos tdt = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t.$$

Como $t = \sqrt{x}$, obtemos então

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\operatorname{sen}\sqrt{x}.$$

**Exemplo 4.24**

Calculemos a primitiva de $e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}$. Vamos escrever $x = \operatorname{sen} t = u(t)$, para $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$ (porque $1 - x^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$). Assim, $u'(t) = \cos t$ e $dx = \cos tdt$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx = \int e^{\arccos(\sqrt{1-u^2(t)})}u'(t)\, dt = \int (e^t\cos t)\, dt.$$

Esta já foi calculada na secção anterior (cf. (32)):

$$\int e^t\cos tdt = \frac{e^t\cos t + e^t\operatorname{sen} t}{2}.$$

Regressando à variável original $x$, como $t = \operatorname{arcsen} x$, obtemos então

$$\begin{aligned}\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx &= \frac{e^t\cos t + e^t\operatorname{sen} t}{2} = \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\cos(\operatorname{arcsen} x) + e^{\operatorname{arcsen} x}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{2}\\ &= \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)}{2}.\end{aligned}$$

Mais exemplos de primitivação por substituição:

**Exemplo 4.25**

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\, dx$

Fazendo $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$, temos $\frac{dx}{dy} = 2y$ $(dx = 2ydy)$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\, dx = \int \frac{y+3}{y+y^2}\, 2y\, dy = 2\int \frac{y+3}{1+y}\, dy = 2y + 4\ln|y+1| = 2\sqrt{x} + 4\ln|\sqrt{x}+1|$$

Em geral, para funções racionais de $\sqrt[p]{x}$, faz-se: $y = \sqrt[p]{x} \Leftrightarrow x = y^p$.

(2) $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

Fazendo $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, temos $dx = \frac{1}{y}dy$ e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \int \frac{2y^2}{y^2+2y+2}\,\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy$$

Notando que $y^2+2y+2$ não tem raizes, pode ser escrito como $(y+1)^2+1$, temos

$$\int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy = \int \frac{2(y+1)}{(y+1)^2+1}\,dy - \int \frac{2}{(y+1)^2+1}\,dy$$
$$= \ln((y+1)^2+1) - 2\arctan(y+1)$$

e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \ln((e^x+1)^2+1) - 2\arctan(e^x+1).$$

Em geral, para funções racionais de $e^x$, faz-se: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy$, com $y = \ln x$. Como (ver exemplos de funções racionais)

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$

temos

$$\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x(4+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{y(4+y^2)}\,dy$, com $y = \ln x$.

(5) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx$

Fazendo $y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$ (assumindo $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$), temos $dx = \frac{1}{1+y^2}dy$ e

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = \int \frac{y}{(y+1)(1+y^2)}\,dy$$

Primitivando a função racional obtida (Exercício!) temos

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\tan x+1| + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x).$$

**VII. Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos.** Para calcular primitivas de funções polinomiais de senos e cossenos:

$$\int \operatorname{sen}^n x\cos^m x\;dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,\quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

**Caso 1.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \; dx \text{ ou } \int \cos^n x \; dx,$$

onde $n = 2k$ é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou cosseno, que eventualmente sabemos como primitivar.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \; dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \; dx \\
&= \int \frac{1}{4} \; dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \; dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) \; dx \\
&= \int \frac{1}{4} \; dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \; dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x)) \; dx
\end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

**Caso 2.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \; dx \text{ ou } \int \cos^n x \; dx,$$

onde $n = 2k + 1$ é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2k+1} x \; dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \; dx \\
&= \int (1 - u^2)^k \; du \quad (u = \operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

**Caso 3.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde $n$ ou $m$ são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \; dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \; dx \\
&= \int u^4 (1 - u^2)^2 \; du \quad (u = \operatorname{sen} x).
\end{aligned}$$

**Caso 4.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \; dx,$$

onde $n$ e $m$ são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, de forma análoga ao Caso 1.

**Exemplo 4.26**

(1) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$

Outra resolução:

$\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) \, dx = -\frac{1}{4} \cos(2x).$

NOTA: reparem que $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$ e $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ diferem de uma constante.

(2) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x) \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$

(OU por partes)

(4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.$

Usamos $\cos(2x) = \cos^2 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ou seja

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

**Nota 4.4.** Estas técnicas também resultam para produtos de funções hiperbólicas, usando $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

**VIII. Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos.** Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como já vimos, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$t = \tan(x/2) \iff x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Observamos que:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

e depois

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Em conclusão:

A substituição $x = 2\arctan t$ fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \; dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Concluímos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos numa primitiva de uma função racional usual.

**Exemplo 4.27**

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3+5\operatorname{sen}x} &= \int \frac{1}{3+5\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (t=\tan\frac{x}{2})\\ &= \int \frac{1+t^2}{3t^2+10t+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+10t+3}\,dt.\end{aligned}$$

Há dois casos particulares de funções racionais de senos e cossenos em que uma substituição bastante mais simples as transforma também em funções racionais usuais:

**Caso 1.**

$$\int R(\operatorname{sen}x)\cdot\cos x\ dx = \int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t=\operatorname{sen}x \text{ e portanto } dt=\cos x\,dx.$$

**Caso 2.**

$$\int R(\cos x)\cdot\operatorname{sen}x\ dx = -\int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t=\cos x \text{ e portanto } dt=-\operatorname{sen}x\ dx.$$

**Exemplo 4.28**

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

Fazendo $t=\operatorname{sen}x \Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen}t$ (assumindo $x\in]-\pi/2,\pi/2[$), temos

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen}x| + \frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen}x|.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}^2 x+2\cos x-2}\,dx$: fazer $t=\cos x$ (Exercício.)