CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC 1º SEMESTRE 2022/23

Informações Gerais

Docente: Miguel Abreu <miguel.abreu@tecnico.ulisboa.pt>

Página: http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/∼mabreu/CI

Horário: terças 08:30–10:00 na sala V1.23 (TP), terças 12:00–13:00 na sala P8 (P1), quintas 08:00–09:30 na sala QA1.4 (TP) e quintas 09:30–10:30 na sala P12 (P2).

Programa

1. **Números reais: revisões e propriedades.** O princípio do supremo. Método de indução.
2. **Funções reais de variável real: limite e continuidade.** Funções elementares (módulo, polinómios, raíz de índice n, funções trigonométricas e hiperbólicas, função exponencial e logaritmo). Propriedades globais de funções contínuas: o Teorema do Valor Intermédio e de Weierstrass.
3. **Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$.** O conceito de derivada; derivadas das funções elementares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Regra de l'Hôpital. Derivadas de ordem superior. Funções inversas (incluindo inversas trigonométricas e hiperbólicas). Polinómio de Taylor.
4. Primitivação: primitivas imediatas e quase-imediatas; primitivação por partes e por substituição; primitivas de funções racionais. Equações Diferenciais Ordinárias.
5. **Cálculo integral em $\mathbb{R}$.** Integral de Riemann; teorema fundamental do cálculo e fórmula de Barrow; fórmulas de integração por partes e por substituição. Aplicações: cálculo de áreas, definição de funções.
6. **Sucessões e séries numéricas.** convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

Bibliografia Principal

- M. Spivak, *Calculus, 3rd Edition*, Cambridge University Press, 2006.
- M. Abreu, R. L. Fernandes e M. Ricou, *Folhas de Cálculo Diferencial e Integral I*, 2009.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 12.ª edição, 2005.
- *Fichas de Exercícios*.

Horário de Dúvidas

terças das 14:00 às 15:30 e quintas das 14:30 às 15:30, na sala de dúvidas do Departamento de Matemática (piso 1 do Pavilhão de Matemática).

Avaliação de Conhecimentos

1MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30% na nota final - 25 de Outubro, terça-feira, 18:00.

2MAP45: teste de 45 minutos, com peso de 30% na nota final - 13 de Dezembro, terça-feira, 18:00.

Exame: teste de 60 minutos, com peso de 40% na nota final - 23 de Janeiro, segunda-feira, 08:00.

Recurso: exame de 2 horas - 08 de Fevereiro, quarta-feira, 08:00.

Nota Final (NF): será o resultado da fórmula

$$\text{NF} = \max\left\{0,3 * (\text{1MAP45}) + 0,3 * (\text{2MAP45}) + 0,4 * (\text{Exame}) \ ; \quad \text{Recurso}\right\},$$

sujeito a uma oral de confirmação de nota para $\text{NF} \geq 17,5$.

Calculadoras: na avaliação não é permitida a utilização de qualquer género de calculadoras.

Estas notas de apoio foram compiladas com a ajuda dos professores Hugo Tavares e Simão Correia a partir de material já existente produzido pelos professores Miguel Abreu, Rui Loja Fernandes, Manuel Ricou e Catarina Carvalho do Departamento de Matemática do Técnico. Quaisquer erros aqui presentes são da minha responsabilidade (Prof. Miguel Abreu).

1. Números Reais: revisões e propriedades

Conteúdo

1.1 Propriedades dos números reais 2
1.2 Módulo 7
1.3 Método de Indução 9
1.4 Somatórios 12

1.1 Propriedades dos números reais. Nestas primeiras aulas vamos rever/introduzir alguns conceitos que serão muito úteis (e utilizados) na cadeira: propriedades dos números reais, resolução de equações e inequações, módulos e distâncias, *supremos e infimos*, números naturais e recorrência, e o *método de indução matemática*.

Comecemos por recordar o conjunto dos números *naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

associados à contagem de objetos. Recorde-se também que cada natural se pode decompor, de forma única, como produto de números primos. Por exemplo: $9 = 3^2$, $21 = 3 \times 7$, $245 = 3 \times 7^2$. Em geral, dado $n \in \mathbb{N}$, tem-se $n = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$, onde $p_1, \ldots, p_m$ são números primos e $n_1, \ldots, n_m$ expoentes naturais.

O conjunto dos números *inteiros* é dado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Observe-se que os inteiros estão naturalmente ordenados,

$$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots,$$

e que podem ser representados geometricamente como pontos equidistantes numa reta:

De seguida, recordamos o conjunto dos números *racionais*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\},$$

juntamento com alguns factos importantes.

Representação decimal dos números racionais. Através do algoritmo da divisão, podemos obter uma representação decimal de qualquer número racional; o resultado é sempre ou uma dízima finita, ou uma dízima infinita periódica. Por exemplo tem-se $\frac{1}{3} = 0.(3)$, $\frac{249}{16} = 15.5625$ e $\frac{350}{21} = 16.(6)$. Por outro lado, qualquer dízima finita ou infinita periódica pode ser convertida numa fração. Considerando por exemplo $x := 0.(123) = 0.123123\ldots$, multiplicamos o número por 1000 (10 elevado ao período, 3) para obter:

$$1000x = 123.(123), \text{ donde } 1000x - x = 123 \iff x = \frac{123}{999}.$$

Observe-se que necessariamente se tem $0.(9) = 1$, $1.2(9) = 1.3$, etc (basta repetir o processo anterior para o justificar). Assim, tem-se a seguinte caracterização alternativa do conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \{\text{dízimas finitas ou infinitas periódicas}\}.$$

Propriedades básicas das operações de soma e produto entre racionais. O conjunto dos racionais é *fechado* para a soma $(+)$ e para o produto $(\cdot)$, ou seja: dados dois racionais $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, a soma $x+y := \frac{p\cdot s+r\cdot q}{q\cdot s}$ e o produto $x\cdot y := \frac{p\cdot r}{q\cdot s}$ são também números racionais. Recordemos agora algumas propriedades básica das operaçõess:

P1. Propriedades da Soma. Dados racionais a, b, c:

(1) (Propriedade Comutativa) $a + b = b + a$;
(2) (Propriedade Associativa) $(a+b)+c = a+(b+c)$. Assim, podemos escrever $a+b+c$ sem qualquer ambiguidade, por não interessar a ordem com que se soma.
(3) (Elemento Neutro) $a + 0 = 0 + a = a$;
(4) (Elemento Simétrico): $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

P2. Propriedades do Produto. Dados racionais a, b, c:

(a) (Propriedade Comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$;
(b) (Propriedade Associativa) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Assim, mais uma vez, podemos escrever abc sem qualquer ambiguidade.
(c) (Elemento Neutro) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
(e) (Elemento Inverso): $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ para $a \neq 0$ ($\frac{1}{a}$ é também indicado como a^{-1}).

Por fim, as operações de multiplicação e soma têm a seguinte relação:

(f) (Propriedade Distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é também um conjunto ordenado: dados dois números racionais a e b, tem-se $a \geq b$ ou $a \leq b$. A relação $\leq$ diz-se uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ compatível com a estrutura algébrica, uma vez que verifica as seguintes propriedades:

P3. Propriedades da relação $\leq$: Dados racionais a, b, c,

(i) (Relação de ordem) $a \leq a$; $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$; $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

(chamadas respetivamente de propriedade reflexiva, antisimétrica e transitiva).

(ii) (Compatibilidade da soma) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;
(iii) (Compatibilidade do produto) $a \leq b$ e $c > 0$ então $ac \leq bc$.

Por satisfazer estas três listas de propriedades, $\mathbb{Q}$ diz-se um *corpo ordenado.*

É possível, mais uma vez, dar uma interpretação geométrica dos números racionais. Apesar desta ser conhecida e ter sido muito trabalhada ao longo do 3.º ciclo e do secundário, vale a pena relembrar como é feita rigorosamente: estando os números inteiros marcados numa reta de forma equidistante, faz-se o seguinte:

- a um número da forma $\frac{1}{n} > 0$ com $n \in \mathbb{N}$, associamos um ponto P situado à direita da origem, de forma a que o segmento $[0P]$ resulte de uma divisão do segmento unitário em n partes;
- Um racional $\frac{m}{n} > 0$ é associado a um ponto P situado à direita da origem, de forma que o segmento [0P] corresponde à união de m segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$ colocados lado a lado a partir da origem;
- Para números negativos, repete-se o processo mas colocando o ponto P à esquerda da origem.

Será que, com a correspondência entre números racionais e pontos de uma reta, cobrimos todos os pontos desta? Ou, perguntando de outra forma: fixada uma unidade de comprimento, será que os números racionais permitem determinar os comprimentos de todos os segmentos de reta possíveis? A resposta é não: basta considerar, por exemplo o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 (que, pelo teorema de Pitágoras, mede $\sqrt{2}$, ou seja, um número positivo cujo quadrado é 2).

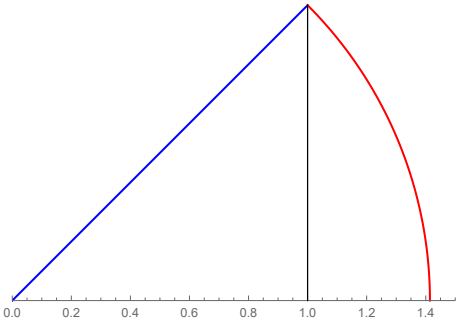

FIGURA 1. Construção geométrica do número real $\sqrt{2}$.

Teorema 1.1

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração. Vamos mostrar este resultado usando o método de "redução ao absurdo", ou seja, supomos que a conclusão NÃO é verdadeira e chegamos a uma contradição (impossibilidade). Logo, a conclusão é obrigatoriamente verdadeira.

Suponhamos então que a conclusão é falsa, isto é, que $\sqrt{2}$ (i.e., um número positivo cujo quadrado é 2) é um racional. Então existem números naturais p e q tais que $\sqrt{2} = p/q$, ou seja,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos assumir que p e q não têm nenhum divisor comum (senão começávamos por simplificar a fração, eliminando esses divisores comuns). Temos

$$p^2 = 2q^2, \tag{1}$$

donde p^2 é um número par. Concluímos então que p também é par[1], ou seja $p = 2k$, para algum natural $k \in \mathbb{N}$. Daqui e de (1), segue-se que:

$$4k^2 = p^2 = 2q^2 \;\Rightarrow\; 2k^2 = q^2.$$

Logo, q^2 é par, e portanto q também é um número par: $q = 2s$, para algum natural $s \in \mathbb{N}$.

Assim, acabámos de mostrar que tanto p como q possuem 2 como divisor comum, o que contradiz a nossa hipótese de que p e q não tinham divisores comuns. □

É então necessário "completar" $\mathbb{Q}$, considerando o conjunto dos números reais. Este pode ser definido como o conjunto de todas as dízimas (finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas):

$$\mathbb{R} = \{p, a_1a_2a_3\ldots : p \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ para todo o } i\}$$

(onde, tal como para os racionais, sempre que $a_n = 9$ para todo o $n \geq \bar{n}$, estamos na verdade na presença de uma dízima finita). Como de costume, dizemos que um elemento de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um número irracional (exemplo: $\sqrt{2}$, como foi visto no Teorema 1.1. Recorde, como trabalho extra e após a leitura deste capítulo, pode se pode concluir que $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$).

[1]De facto, se $p = p_1^{n_1} \ldots, p_m^{n_m}$ for a decomposição em primos do número p, então $p^2 = p_1^{2n_1} \ldots, p_m^{2n_m}$ é a decomposição em primos de p^2. Note-se que todos os expoentes são maiores ou iguais a 2 nesta última decomposição. Por outro lado, como p^2 é par, então 2 é um dos primos da sua decomposição, ou seja, há um dos p_i que é igual a 2. Assim, p é par.

Primeiro facto importante. Pode mostrar-se que $\mathbb{R}$, quando munido das operações de multiplicação, adição, e da relação $\leq$, também é um corpo ordenado (i.e., as três listas de propriedades enumeradas anteriormente são válidas para quaiquer **reais** a, b, c). Note-se que isto não é tão óbvio quanto se possa pensar à primeira vista: como se pode dar uma regra /algoritmo para somar ou multiplicar, por exemplo, os dois números reais:

$$x = 1.123123412345123456.... \quad \text{e} \quad y = 2.(3)?$$

Esta observação mostra como a questão é delicada e nada simples. No entanto, mostra-se que há uma forma coerente de o fazer (os detalhes podem por exemplo ser encontrados nesta página).

Segundo facto importante. Também se mostra que há uma correspondência biunívoca (e que mantém a ordem) entre o conjunto $\mathbb{R}$ descrito acima e uma reta. Isto mostra-nos que, nesse sentido, o conjunto $\mathbb{R}$ é um conjunto "completo" (no mesmo sentido impreciso em que podemos pensar que a reta é um "contínuo", sem "buracos"). Esta última propriedade é a que marca a grande diferença entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e a que mostra porque se usa, para trabalhar com funções e modelar o mundo real, o conjunto dos números reais. Para de futuro demonstrarmos teoremas, devemos no entanto enunciar esta propriedade de forma algébrica. Para isso, necessitamos de introduzir algumas noções.

Definição 1.2: Majorantes e Minorantes de um conjunto

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

i) A diz-se *majorado* se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq]-\infty, b]$). Neste caso, b diz-se um *majorante* de A;

ii) A diz-se *minorado* se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subseteq [a, +\infty[$. Neste caso, a diz-se um *minorante* de A;

iii) A diz-se *limitado* se é majorado e minorado. Neste caso, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$, para qualquer $x \in A$ (ou seja, $A \subset [\,a, b\,]$).

Exemplo 1.3:

Os conjuntos $[1, 3]$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $[1, 2[\cup\{3\}$ são limitados e têm todos o mesmo conjunto de majorantes e minorantes:

$$\text{Conj. Majorantes } = [3, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty, 1].$$

O conjunto $\mathbb{R}$ não é majorado nem minorado; $\mathbb{R}^+$ é minorado mas não é majorado. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$:

$$\text{Conj. Majorantes } = [1, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty, 0].$$

Para o conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$:

$$\text{Conj. Majorantes } = [\sqrt{2}, +\infty[, \quad \text{Conj. Minorantes } =]-\infty, 0].$$

Definição 1.4: Supremo e infímo de um conjunto

Seja $A \subset \mathbb{R}$. Define-se o *supremo* e o *ínfimo* de A como:

- $\sup A$ é o menor dos majorantes de A, se existir.
- $\inf A$ é o maior dos minorantes de A, se existir.

Exemplo 1.5

Para os conjuntos $[1, 3]$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $[1, 2[\cup\{3\}$, o supremo é 3 e o ínfimo é 1. Para o conjunto $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, o supremo é 1 e o ínfimo é 0. O conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$

tem 0 como ínfimo e $\sqrt{2}$ como supremo. O conjunto $\mathbb{R}^+$ tem 0 como ínfimo e não admite supremo. O conjunto $\mathbb{R}$ não admite supremo nem ínfimo.

Exemplo 1.6

O número π (o rácio entre o perímetro e o diâmetro de qualquer circunferência) pode também ser definido como sendo o supremo do conjunto

$$\{\text{Áreas de polígonos inscritos numa circunferência de raio } 1\};$$

$e = \sup\left\{(1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\right\}$. Pode mostrar-se que π e e são números irracionais. Qualquer real pode ser descrito como o supremo de um conjunto com números racionais: por exemplo,

$$0.3(3) = \sup\{0.3\,,\ 0.33\,,\ 0.333\,, ...\};$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots = \sup\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \ldots\}.$$

Exercício 1.1. Claramente, $\inf[1,3] = -\sup[-3,-1]$. Em geral, dado $A \subset \mathbb{R}$, mostre que $\inf A = -\sup(-A)$, em que estamos a definir $-A = \{-a : a \in A\}$.

Note-se que $\sup A$ pode ou não pertencer a A. No caso em que $\sup A \in A$, é claro que será o maior valor de A (é majorante...)

Definição 1.7: Máximo e mínimo de um conjunto

Definimos o *máximo* e *minímo* de um conjunto como o maior e o menor dos seus elementos (*se existirem*); isto é equivalente a dizer que:

- $\max A = M$ se M é majorante e $M \in A$;
- $\min A = m$ se m é minorante e $m \in A$.

Temos sempre $\max A = \sup A$, se existirem.

Exemplo 1.8

Temos $\max[1,3] = 3$, $\min[1,3] = 1$; por outro lado, o conjunto $]1,3[$ não admite máximo nem mínimo. Temos $\sup]1,3[= 3$, $\inf]1,3[= 1$, $\sup\{1,2,3\} = 3 = \max\{1,2,3\}$, $\inf\{1,2,3\} = 1 = \min\{1,2,3\}$.
O conjunto $\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ admite máximo (1), mas não mínimo.
O conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ não admite máximo; já o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$ tem máximo $\sqrt{2}$.

Estamos agora prontos para enunciar a propriedade de completude dos reais, que corresponde algebricamente ao facto da reta ser um contínuo de pontos.

Propriedade. (Princípio do Supremo ou da Completude). Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo.

Segue também que qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo (recordando, do exercício anterior, que $\inf A = -\sup(-A)$).

Este princípio é equivalente a uma propriedade enunciada (mas não demonstrada) no ensino secundário: *Toda a sucessão monótona limitada é convergente.* De facto, se uma sucessão (u_n) for crescente (i.e. $u_n \leq u_{n+1}$ para todo o n), então o seu limite é o supremo do conjunto formado pelos

seus termos, i.e., $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$; se a sucessão for decrescente, devemos tomar o ínfimo. Veremos mais tarde, no último capítulo destes apontamentos, os detalhes da prova desta propriedade.

Temos a seguinte caracterização do supremo e ínfimo de um conjunto, que em muitas situações é útil. Elas traduzem o facto do supremo de um conjunto ser a melhor aproximação deste por excesso, enquanto o ínfimo é a melhor aproximação por defeito.

Proposição 1.9

(1) $s = \sup A \Leftrightarrow s$ é majorante e $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$, para qualquer $\varepsilon > 0$,
(2) $a = \inf A \Leftrightarrow a$ é minorante e $[a, a+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ para qualquer $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Faremos apenas a prova para o supremo; a prova para o ínfimo segue da do supremo e do Exercício 1.1 [porquê?].

Se $s = \sup A$ então (por definição de supremo) s é majorante de A, isto é, $x \leq s$, para qualquer $x \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, para ver que $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$, notamos que, se não fosse esse o caso, teríamos $x \leq s - \varepsilon$, para qualquer $x \in A$. Assim, o número $s - \varepsilon$ seria majorante de A, o que é impossível, dado que $s - \varepsilon < s$ e s é o menor dos majorantes.

Reciprocamente, suponhamos que s é majorante e que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $]s-\varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$. Vamos ver que s é necessariamente o *menor* dos majorantes: se $t \in \mathbb{R}$ é tal que $t < s$, então $]s - \frac{s-t}{2}, s] \cap A \neq \emptyset$. Como $t < \frac{s+t}{2}$, existe $x \in A$ tal que $t < x \leq s$. Logo $t < x \in A$ e t não é majorante de A. □

1.2 Módulo. Recordemos:

Definição 1.10

O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real $x \in \mathbb{R}$ é definido por

$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0; \\ -x\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

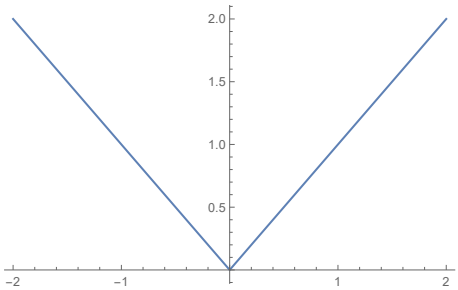

FIGURA 2. O gráfico da função $f(x) = |x|$.

Na interpretação geométrica dos números reais, $|x|$ **representa a distância de** x **à origem da reta numérica. Assim,** $|x - y|$ **representa a distância de** x **a** y.

A prova das seguintes propriedades deve ser feita como exercício.

FIGURA 3. O conjunto dos pontos cuja distância a $x = 1/4$ é menor ou igual a 1.

(1) $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
(2) $|-x| = |x|.$
(3) $|xy| = |x||y|, \quad |x|^2 = |x^2| = x^2.$
(4) $|x + y| \leq |x| + |y|.$ (desigualdade triangular)
(5) $x^2 < a^2 \Leftrightarrow |x| < |a|.$

Para resolver inequações com módulos, é útil pensar no módulo como distância: por exemplo, a inequação $|x| < 2$ tem como conjunto solução todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ que estão a uma distância de 0 inferior a 2, ou seja, o intervalo $]-2, 2[$.

Em geral: se $R > 0$,

$$|x| < R \Leftrightarrow x > -R \wedge x < R \Leftrightarrow -R < x < R$$
$$|x| > R \Leftrightarrow x < -R \vee x > R.$$

Mais geralmente, com expressões algébricas tem-se:

$$|f(x)| < g(x) \iff -g(x) < f(x) < g(x) \iff f(x) > -g(x) \ \wedge \ f(x) < g(x);$$
$$|f(x)| > g(x) \iff f(x) < -g(x) \ \vee \ f(x) > g(x).$$

Exemplo 1.11

:

(1) $|x-1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \iff x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[.$
(2) $|2x+3| > 1 \iff 2x + 3 > 1 \vee 2x + 3 < -1 \iff x > -1 \vee x < -2 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[.$
(3) $|x-2| < |x+1| \iff x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ dado que o conjunto solução corresponde aos pontos cuja distância a 2 é inferior ou igual á distância a -1.
OU $|x-2| < |x+1| \iff -|x+1| < x-2 < |x+1| \iff x > \frac{1}{2} \iff x \in]\frac{1}{2}, +\infty[.$
(4) $\dfrac{x^2-4}{|x+1|} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq -1.$
(5) $\dfrac{|x-1|-1}{|x|-1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 2.$

Usaremos nalgumas situações a seguinte notação:

Definição 1.12

Define-se *vizinhança de centro a e raio* $R > 0$,

$$V_R(a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < R\} \ =]\, a - R, a + R\,[$$

como os conjunto dos pontos cuja distância a a é inferior a R.

Por exemplo, $V_1(0) =]-1, 1[$, $V_{0.1}(-1) =]-0.9, 1.1[$, $V_{\frac{1}{2}}(1) =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

Se estivermos a aproximar um número a por x então podemos encarar $|x-a|$ também como o *erro absoluto* cometido na aproximação. Ao fazermos $|x-a| < \varepsilon$; estamos a admitir uma margem de erro de, no máximo, ε (ε - *epsilon*, letra grega correspondente ao *e* latino, designará habitualmente uma quantidade 'pequena') . Por exemplo, para aproximarmos π com erro no máximo de 10^{-2} queremos x tal que $|x-\pi| < 10^{-2}$, podemos fazer $x = 3,14$ (por defeito) ou $x = 3,15$ (por excesso) ou $x = 3,1425$ (ou...)

1.3 Método de Indução. Suponhamos que se pretende mostrar a seguinte fórmula para a soma dos primeiros $n+1$ números ímpares:

$$\text{Para todo o } n \in \mathbb{N}, \text{ tem-se } 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2. \tag{2}$$

Observe-se que pretendemos demonstrar tantas proposições quantos números naturais (ou seja, infinitas proposições): se $P(n)$ for a afirmação $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$, pretendemos ver que:

$P(1)$ é verdadeira (o que está correto: $1 = 1^2$)

$P(2)$ é verdadeira ($1+3 = 2^2$, correto)

$P(3)$ é verdadeira ($1+3+5 = 3^2$, correto)

$\vdots$

Claramente não podemos experimentar todos os números naturais, nem pedir a um computador que o faça. É então útil, em muitas situações práticas, o seguinte método de demonstração:

Método de Indução Matemática. Seja $P(n)$ uma proposição para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que:

(a) $P(1)$ é verdadeira; e

(b) sempre que $P(n)$ é verdadeira para *algum* n, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então conclui-se que $P(n)$ é verdadeira para *todo* o $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vejamos porque funciona o método: seja $A = \{n \in \mathbb{N} : \ P(n) \text{ é verdadeira}\}$; pretendemos ver que $A = \mathbb{N}$. Ora $1 \in A$. Se existir $k \notin A$ ($k > 1$), então por (b) e como $P(1)$ é verdadeira, temos que $P(2)$ é verdadeira; novamente por (b), segue-se que $P(3)$ é verdadeira; repetindo este passo um *número finito* de vezes, obtemos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja $k \in A$, o que é uma contradição. □

A "$P(1)$ verdadeira" chamamos a *base de indução*. Para provar a segunda parte, assumimos que $P(n)$ é verdadeira para dado n fixo - a esta hipótese chamamos *hipótese de indução* - e provamos que nesse caso também será verdadeira para $n+1$, a chamada *Tese*.

Talvez seja útil comparar o método de indução com uma fila de peças de dominós em queda: imaginemos uma fila de peças de dominó, em que:

- damos um empurrão à 1ª peça da fila, para que tombe para a frente;
- sempre que uma peça tomba, a seguinte também tomba.

O resultado disto é que toda a fila de peças cai. Nesta analogia, uma peça tombar no lugar n faz o papel de $P(n)$ ser verdadeira. Outro exemplo ilustrativo: se encontrarmos uma lâmpada mágica e de lá sair um génio, caso lhe peçamos "se estiver vivo num dia, estarei vivo no seguinte", então teremos a vida eterna assegurada (o $P(1)$ será estarmos vivo aquando do pedido; a parte (b) do método corresponde ao nosso pedido).

Depois destas considerações que pretendem tornar mais natural o método, apliquemo-lo de forma mais séria para demonstrar (2), mostrando também outros exemplos.

Exemplo 1.13

Mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Se $P(n)$ representa a igualdade acima, temos:

- $P(1)$ é verdadeira: $1 = 1^2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado n (fixo) se tem

  $$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$$

  queremos provar que

  $$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2.$$

  Mas por HI, temos

  $$\underbrace{1 + 3 + ... + (2n - 1)}_{n^2} + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

  como queríamos mostrar.

Exemplo 1.14: Soma dos n primeiros naturais

Consideremos a seguinte proposição, que queremos mostrar verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) = \text{é válida a seguinte fórmula: } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.

- $P(1)$: Mostrar que a fórmula dada é válida quando $n = 1$, i.e. que

  $$1 = \frac{1(1+1)}{2}\,,$$

  o que é claramente verdade.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Assumindo como verdadeira a *hipótese* $P(n)$, i.e.

  $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N}\,,$$

  há que mostrar a validade da *tese* $P(n+1)$, i.e.

  $$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\,, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}\,.$$

  Isto pode ser feito da seguinte forma:

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 1.15

Provar que $2^n \geq n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $P(1)$ é verdadeira, já que $2^1 \geq 2$.

- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado n (fixo) se tem $2^n \geq n+1$ queremos provar que $2^{n+1} \geq n+2$. Então, da HI,

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2$$

já que $n > 0$. Por transitividade, $2^{n+1} \geq n+2$, como queríamos mostrar.

Exercício 1.2. Para $a > 0$ fixo, temos a *desigualdade de Bernoulli:*

$$(1+a)^n \geq 1 + na,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostre esta desigualdade recorrendo ao método de indução.

Exemplo 1.16

Provar que $4^n - 1$ é múltiplo de 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $P(1)$ é verdadeira, já que $4^1 - 1 = 3$ é múltiplo de 3.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução, que para dado n (fixo) $4^n - 1$ é múltiplo de 3, temos

$$4^{n+1} - 1 = (1+3)4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + (4^n - 1)$$

é múltiplo de 3

Nota 1.3. (a) Provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ não é suficiente! Por exemplo, seja $P(n)$ a afirmação $\operatorname{sen}(2n\pi) = 2$, $n \in \mathbb{N}$, que é obviamente falsa, para qualquer n. Mas é fácil ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{sen}(2(n+1)\pi) = \operatorname{sen}(2n\pi).$$

(b) Se quisermos provar uma determinada proposição apenas para $n \geq n_0$, começamos por verificar $P(n_0)$ e provamos $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ como antes (é suficiente ver para $n \geq n_0$).

(c) O método de indução é particularmente útil quando os termos envolvidos estão *definidos por recorrência.* Por ex. r^n, $n!$ podem definir-se como

$$\begin{cases} 1! = 1, \\ (n+1)! = (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \begin{cases} r^1 = r, \\ r^{n+1} = r \cdot r^n \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemplo 1.17: Progressão Geométrica

Imaginem que estão 10 pessoas numa sala, e a cada hora que passa o número de pessoas duplica. Se x_n designar o número de pessoas passadas n horas, temos uma sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} x_0 = 10, \\ x_{n+1} = 2x_n, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Calculando alguns valores *conjecturamos* que $x_n = 10 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Para mostrar que a nossa conjectura é verdadeira, usamos o método de indução. Seja $P(n)$ a afirmação "$x_n = 10 \cdot 2^n$". Então:

- $P(0)$ é verdadeira: $x(0) = 10$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: assumindo, por hipótese de indução (HI), que para dado n (fixo) se tem $x_n = 10 \cdot 2^n$, então

$$x_{n+1} = 2x_n = 2 \cdot 10 \cdot 2^n = 10 \cdot 2^{n+1}$$

logo $P(n+1)$ também é verdadeira.

Conclui-se pelo método de indução que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1.4. Mostrar que $n! > 2^n$, para $n \geq 4$. (Nota: Reparem que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é válido, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, mas $P(n)$ é falso para $n = 1, 2, 3$, verdadeiro para $n = 4$.)

1.4 Somatórios. Podemos escrever as somas que surgem nos Exemplo 1.13 e Exemplo 1.14 de forma mais abreviada usando *somatórios*, que serão usados ao longo do curso.

Dada uma sucessão de números reais $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$$

(lê-se: "somatório de 1 até n de a_k") ou, por recorrência:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

Assim, no Exemplo 1.13, a igualdade aí demonstrada escreve-se:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2;$$

no Exemplo 1.14,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

O símbolo $\sum$ é um sigma grego maiúsculo, que corresponde ao S do alfabeto latino.

Nota 1.5. O índice k do somatório é um *índice mudo*, desempenhando um papel muito auxiliar. Uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \ldots + a_n\,.$$

Os extremos inferiores e superiores num somatório podem ser qualquer número. Por exemplo

$$\sum_{k=3}^{100} k^2 = 3^2 + \ldots + 100^2; \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (k+2) = \sum_{k=3}^{n+1} k = 3 + \ldots + n + 1.$$

Exemplo 1.18

Temos $0.333 = \sum_{i=1}^{3} \frac{3}{10^i}$,

$$0.(3) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{3}{10^i} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proposição 1.19: Propriedades do somatório

Se $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., n$ então:

(1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

(2) $\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

(3) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$ (propriedade telescópica).

(4) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

Estas propriedades podem ser demonstradas usando o método de indução. Exemplificamos com a propriedade telescópica:

- $P(1)$: temos $\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} = a_1 - a_{n+2}.$$

Exemplo 1.20: Soma dos termos de uma progressão geométrica

Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$ e qualquer $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,. \tag{3}$$

(ou seja, que $1 + r + \ldots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ para todo o $n \geq 0$.) Usaremos o Método de Indução começando em $n = 0$.

- $P(0)$: Mostrar que a fórmula (3) é válida quando $n = 0$, i.e. que

  $$\sum_{k=0}^{0} r^k = \frac{1 - r^1}{1 - r}\,,$$

  o que é claramente verdade (ambos os termos são iguais a 1).
  Nota: por definição $r^0 = 1$.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

  $$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\,,\ \text{para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0\,,$$

  há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

  $$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,,\ \text{para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

  Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)}\\
&= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)\text{)}\\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}\,. &&
\end{aligned}$$

Material extra para uma melhor compreensão da distribuição dos racionais e irracionais em $\mathbb{R}$.

Note-se desde já que, da definição do conjunto $\mathbb{R}$ e da caracterização de $\mathbb{Q}$ como o conjunto das dízimas finitas e periódicas, se vê imediatamente que:

Proposição 1.21

Sejam $a < b$ dois números reais. Então existem $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $x, y \in]a, b[$.

Demonstração. Suponhamos que $0 \leq a < b$ (os outros casos casos demonstram-se de forma semelhante), com

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \quad \text{e} \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$$

Uma vez que a é menor que b, é possível tomar o primeiro inteiro m tal que $\alpha_m < \beta_m$. Seja $n > m$ um inteiro em que $\alpha_n \neq 9$; então o número

$$c = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m \ldots\ldots (\alpha_n + 1)\, 0 \ldots 0 \ldots$$

é um racional que pertence ao intervalo $]a, b[$.

A construção de um irracional é deixada como exercício. Sugere-se começar por exemplos específicos: tomando por exemplo os conjuntos $]0.12123123412345 \ldots 0.122122122 \ldots [$ e $]0.(3), 1[$, determinando explicitamente irracionais nestes conjuntos). □

Daqui segue imediatamente que:

- Entre quaisquer dois números reais há *infinitos* números racionais e *infinitos* números irracionais.
- Qualquer número real pode ser aproximado com erro arbitrariamente pequeno por racionais (e por irracionais também...).

(justifique; se necessário, comece por pensar em casos concretos).

Material extra: construção axiomática dos números reais

O que vimos atrás foi uma construção, por etapas, dos números reais: começou-se por definir $\mathbb{N}$, com isto definiu-se $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e por fim $\mathbb{R}$. Note-se no entanto que na passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não demos todos os detalhes; é de facto um pormenor delicado a forma como se pode introduzir o que é verdadeiramente um número real. Há muitas formas de o fazer e, ao longo da história, tem havido várias propostas para todos os gostos, todas equivalentes (os mais interessados podem consultar esta página e/ou conversar com o professor).

Como material extra, recomendamos a leitura do método axiomático como forma de introduzir os números reais, onde se segue o caminho oposto ao que seguimos nas aulas: começa-se por definir $\mathbb{R}$ como um conjunto onde há duas operações, $+$ e $\cdot$, que verificam um certo número de propriedades. Depois disso (e apenas depois) define-se $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. É a construção seguida pela maior parte dos livros por ser sucinta e eficaz. Para ver todos os detalhes desta abordagem, recomendamos a leitura do primeiro capítulo dos apontamentos disponíveis online aqui); para uma versão resumida, recomendamos a leitura do Guia das Aulas Teóricas 1–6 neste link (da autoria do Prof. João Teixeira Pinto).

2. Funções Reais de Variável Real

Conteúdo

2.1 Classes de funções elementares 16
Função composta 19
Funções Injectivas e suas Inversas 20
Função de Heaviside e Função de Dirichlet 23
Limite de uma função num ponto 24
Exemplos 25
Propriedades do Limite de Funções num Ponto 27
Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada 29
Limite de Funções Compostas 30
Limites Relativos e Laterais 31
Recta Acabada e Indeterminações 32
Limites na recta acabada 32
Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites 33
Continuidade de Funções Reais de Variável Real 35
Continuidade Lateral 36
Exemplos de Funções contínuas 37
Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas 38
Propriedades Globais das Funções Contínuas 38
Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais 40
Material Extra: Contradomínios de funções contínuas em intervalos e continuidade da função inversa 42
Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy. 43

Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, i.e.

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \in D &\mapsto f(x)\,. \end{aligned}$$

O conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ onde a função f está definida é designado por *domínio* de f. O *contradomínio* de f é o conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \ y = f(x) \text{ para algum } x \in D\}\ .$$

Uma função f diz-se *majorada* (respectivamente *minorada*) se existir $M \in \mathbb{R}$ (respet., $m \in \mathbb{R}$) tal que $f(x) \leq M$ (respet., $f(x) \geq m$) para todo o $x \in D$. Uma função que é simultaneamente majorada e minorada diz-se *limitada*. Note-se (fazendo a ligação à Definição Definição 1.2 do capítulo anterior), que isto corresponde a dizer que o conjunto $f(D)$ é majorado, minorado ou limitado, respetivamente.

O *gráfico* de uma função f é o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\text{gráfico de } f \ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in D \text{ e } y = f(x)\right\}\ .$$

É muitas vezes útil esboçar este conjunto (já o fizemos na verdade para a função módulo). No entanto, isto nem sempre é fácil ou mesmo possível (veja-se o Exemplo 2.23 à frente).

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\begin{aligned} \textit{par} \text{ se } & f(x) = f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,, \\ \textit{ímpar} \text{ se } & f(x) = -f(-x)\,,\ \forall\, x \in D\,, \\ \textit{crescente} \text{ se } & (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))\ ,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,, \\ \text{e } \textit{decrescente} \text{ se } & (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))\ ,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,. \end{aligned}$$

Usamos a terminologia *estritamente crescente* e *estritamente decrescente* quando a última desigualdade das duas linhas anteriores é estrita.

Uma função f com domínio $D \subset \mathbb{R}$ diz-se

$$\textit{periódica} \text{ com } \textit{período } T > 0 \text{ se } f(x+T) = f(x)\,,\ \forall\, x \in D\,.$$

Recorde-se que uma função é par se a sua representação gráfica for simétrica em relação ao eixo Oy; ímpar se for simétrica em relação à origem; periódica de período T se o gráfico permanecer invariante após uma translação horizontal segundo o vetor $(T, 0)$.

2.1 Classes de funções elementares. Recordemos alguns exemplos de funções elementares já vossas conhecidas.

Exemplo 2.1. *Funções polinomiais* são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,,\ \text{com } c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

O domínio de qualquer uma destas funções é $D = \mathbb{R}$.

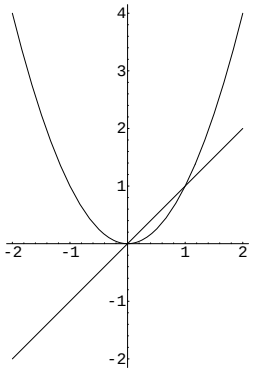

FIGURA 4. Gráfico das funções polinomiais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. A primeira é ímpar, a segunda par.

Veremos que, quando uma função polinomial tem grau ímpar, o seu contradomínio é todo o $\mathbb{R}$, enquanto quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma $[m, +\infty[$ ou $]-\infty, M]$, com $m, M \in \mathbb{R}$. A Figura 4 mostra o gráfico de duas funções polinomiais.

Exemplo 2.2. *Funções racionais* são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e., funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios.}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$.

Um exemplo simples é a função definida por $f(x) = 1/x$, cujo gráfico está representado na Figura 5.

Tanto o seu domínio como contradomínio são $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta função é ímpar, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ (mas não em todo o seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

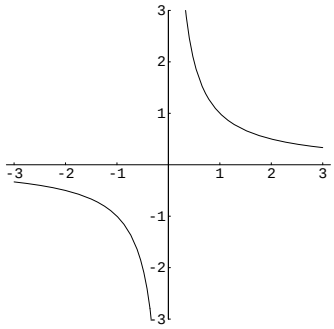

FIGURA 5. Gráfico da função racional $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Recorde-se que o seu gráfico é uma hipérbole com assíntotas nos eixos $y = 0$ e $x = 0$.

Exemplo 2.3. A *função exponencial*,[2] $f(x) = e^x$, possui domínio $D = \mathbb{R}$ e contradomínio $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, portanto é uma função minorada mas não majorada. É, também, estritamente crescente. O seu gráfico está representado na Figura 6 (juntamente com o gráfico da função logaritmo de base e, de que falaremos à frente).

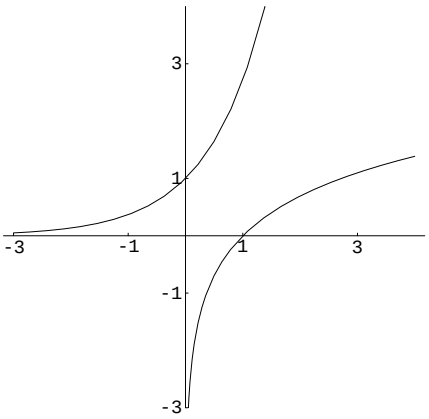

FIGURA 6. Gráfico da função exponencial e da função logaritmo.

Algumas propriedades fundamentais da função exponencial que devem recordar são as seguintes:

(i) $e^0 = 1$;
(ii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;
(iii) $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.4. As funções trigonométricas *seno* e *cosseno* são funções cujo o domínio é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 7.

Qualquer uma destas funções tem por contradomínio o intervalo $[-1, 1]$, sendo portanto funções limitadas. A função seno é ímpar e periódica de período 2π, i.e.

$$\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x)\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

[2]Recorde-se uma das formas de definir esta função. Em primeiro lugar, $e = \lim_n (1 + 1/n)^n > 1$ é o número de Neper. Para um racional da forma p/q, $e^{p/q}$ é definido como sendo $\sqrt[q]{(e^p)}$. Isto permite definir explicitamente a função exponencial (estritamente crescente) nos racionais. A forma de estender o domínio da exponencial ao conjunto $\mathbb{R}$ é a seguinte: dado um $x \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q},\ p/q < x\}$ é majorado e não vazio, logo tem supremo. Assim, para um real $x \in \mathbb{R}$, define-se: $e^x = \sup\{e^{p/q} : p/q \in \mathbb{Q},\ p/q < x\}$.

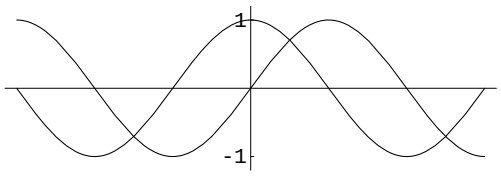

FIGURA 7. Gráfico das funções trigonométricas seno e cosseno.

A função cosseno é par e também periódica de período 2π, i.e.

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

As funções seno e cosseno satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Dito de outra forma, dado $t \in \mathbb{R}$, o ponto $(\cos(t), \operatorname{sen} t)$ pertence a uma circunferência de centro 0 e de raio 1.

Exemplo 2.5. As funções trigonométricas *tangente* e *cotangente* são definidas a partir das funções seno e cosseno:

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \text{e} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,. \tag{5}$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e o seu gráfico está representado na Figura 8. A função tangente é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\tan}\,.$$

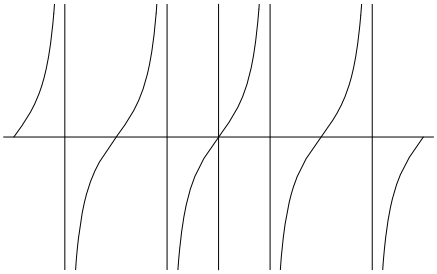

FIGURA 8. Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \operatorname{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

O seu contradomínio é $\mathbb{R}$ e a representação do seu gráfico fica como exercício. A função cotangente também é ímpar e periódica de período π, i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x + \pi) = \cot(x)\,,\ \forall\, x \in D_{\cot}\,.$$

A partir da identidade trigonométrica (4), obtêm-se também as identidades

$$1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \text{e} \quad 1+\cot^2(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)},$$

definidas respetivamente em $D_{\tan}$ e $D_{\cot}$.

Exemplo 2.6. As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* são definidas a partir da função exponencial:

$$\operatorname{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,. \tag{6}$$

O domínio das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico é todo o $\mathbb{R}$. Os seus gráficos estão representados na Figura 9.

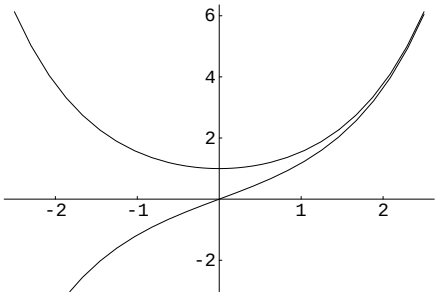

FIGURA 9. Gráfico das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por contradomínio $\mathbb{R}$. A função cosseno hiperbólico é par e tem por contradomínio o intervalo $[1,+\infty[$. Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,. \tag{7}$$

Assim, dado $t\in\mathbb{R}$, o ponto $(\cosh(t),\operatorname{senh}(t))$ pertence à hipérbole $x^2-y^2=1$; este facto está na origem do nome das funções senh e cosh.

Função composta. Uma forma de produzir novas funções a partir de funções conhecidas é compondo funções.

Definição 2.7. Sejam $f:D_f\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:D_g\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções reais de variável real. A função *composta* $(f\circ g)$ é definida por

$$\begin{aligned}(f\circ g):D_{f\circ g}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto (f\circ g)(x)\overset{\text{def}}{=}f(g(x))\,,\end{aligned}$$

onde $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\,:\ x\in D_g\ \text{ e }\ g(x)\in D_f\}$.

Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_g\supset D_{f\circ g} & \xrightarrow{\ g\ } & g(D_{f\circ g}) & \subset & D_f & \xrightarrow{\ f\ } & f(D_f) & \supset & (f\circ g)(D_{f\circ g}) \\ x & \longmapsto & g(x) & = & y & \longmapsto & f(y) & = & f(g(x)) \end{array}$$

i.e., a função composta $f\circ g$ corresponde a aplicar primeiro a função g e de seguida a função f.

Exemplo 2.8. Consideremos as funções $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$g(x)=\frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y)=\operatorname{sen}(y)\,.$$

Temos então que $(f\circ g):D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1/x)=\operatorname{sen}(1/x)\,.$$

O seu gráfico está representado na Figura 10.

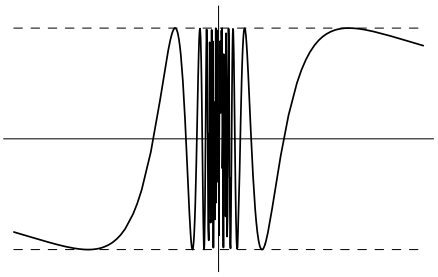

FIGURA 10. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(1/x)$.

Funções Injectivas e suas Inversas.

Definição 2.9. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *injectiva* se, para qualquer valor do contra-domínio $y \in f(D)$, existir *um só* ponto do domínio $x \in D$ tal que $f(x) = y$. De forma equivalente, f é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\,,\ \forall\, x_1, x_2 \in D\,.$$

Exercício 2.10. Mostre que qualquer função estritamente monótona é injectiva.

Nota 2.11. Há funções injectivas que *não são* estritamente monótonas, e mesmo uma função injectiva e contínua pode não ser estritamente monótona (deem um exemplo!). Após estudarmos as propriedades globais de funções contínuas (próximo capítulo) poderemos mostrar que, no entanto, toda a função $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injectiva num intervalo I é monótona e $f(I)$ é um intervalo.

Definição 2.12. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to f(D_f) \subset \mathbb{R}$ uma função injectiva. A sua função *inversa* é definida como a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(D_f) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D_f \subset \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x\,, \end{aligned}$$

onde $x \in D_f$ é o único ponto do domínio de f tal que $f(x) = y$.

Notem que $D_{f^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} f(D_f)$. Temos assim que

$$\begin{array}{ccccccccc} D_f & \stackrel{f}{\longrightarrow} & f(D_f) & = & D_{f^{-1}} & \stackrel{f^{-1}}{\longrightarrow} & f^{-1}(D_{f^{-1}}) & = & D_f \\ x & \longmapsto & f(x) & = & y & \longmapsto & f^{-1}(y) & = & x \end{array}$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x\,,\ \forall\, x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ \forall\, y \in D_{f^{-1}} = f(D_f)\,.$$

Notem que existe uma relação muito simples entre o gráfico de uma função f e o gráfico da sua inversa f^{-1}: se $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de f então $(f(x), x)$ é um ponto do gráfico de f^{-1}. Isto quer dizer que os gráficos de f e de f^{-1} são **simétricos** em relação à recta diagonal $y = x$, como se ilustra nos exemplos seguintes.

Exemplo 2.13. A função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^2\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, não é injectiva em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo $[0, +\infty[$ é estritamente crescente, temos que a função

$$\begin{aligned} f = p_{|\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow p(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

é injectiva. Tem assim a inversa f^{-1} definida em $\mathbb{R}_0^+$, que é naturalmente a função raiz quadrada:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 11.

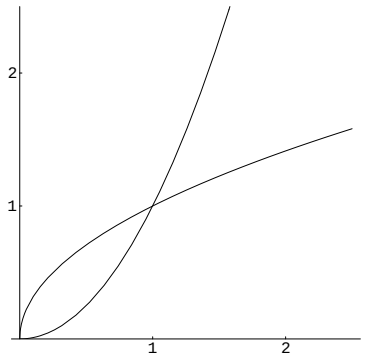

FIGURA 11. Gráfico da função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x) = x^2$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exemplo 2.14. A função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$ e o seu contradomínio é $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tem assim inversa f^{-1} definida em todo o $\mathbb{R}$, que é naturalmente a função raiz cúbica:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 12.

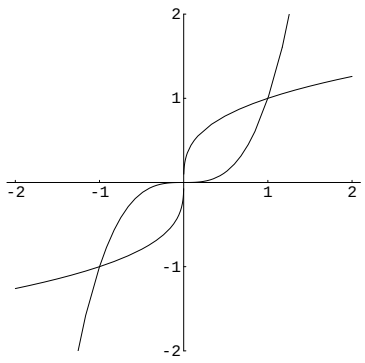

FIGURA 12. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, e da sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exemplo 2.15. Os Exemplos 2.13 e 2.14 podem ser generalizados da seguinte forma. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que a função polinomial

$$f(x) = x^n \quad \text{é injectiva em} \quad \begin{cases} [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

pelo que a função inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{tem domínio} \quad \begin{cases} f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[\,, & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\,, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 2.16. A função exponencial é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, logo invertível. À sua inversa chamamos *logaritmo* (de base e), $g(x) = \ln x$, que tem domínio $\mathbb{R}^+$ e contradomínio $\mathbb{R}$. A função logaritmo não é nem majorada nem minorada, e o seu gráfico encontra-se na Figura 6. Por definição de inversa, vale:

$$e^{\ln x} = x \ \forall x > 0, \qquad \ln(e^x) = x \ \forall x \in \mathbb{R};$$

Além disso, das propriedades vistas para a exponencial,

(i) $\ln(1) = 0$;
(ii) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)\,, \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$;
(iii) $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)\,, \ \forall\, a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$.
(iv) $a^x = e^{x \ln a}$ e $\log_a(x) = (\ln x)/(\ln a)$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

Exemplo 2.17. Sejam $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 2x + 1$. Tem-se

$$f \circ f(x) = x, \quad g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}, \quad h \circ h = 4x + 3,$$
$$h \circ g(x) = 2\sqrt{x} + 1, \qquad g \circ h(x) = \sqrt{2x+1},$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}_0^+$, $D_h = \mathbb{R}$. $D_{h\circ g} = \mathbb{R}_0^+ = D_g$ (porque $D_h = \mathbb{R}$), $D_{g\circ h} = \{x : 2x + 1 \in \mathbb{R}_0^+\} = [-1/2, +\infty[$. Note-se que, em geral, a composição não é uma operação comutativa: vimos neste exemplo um caso em que $h \circ g \neq g \circ h$.

Exercício 2.18. Mostre que o domínio de $f(x) = \ln(4 - x^2)$ é $D_f =]-2, 2[$.

Exemplo 2.19. A funções trigonométricas seno e cosseno, apresentadas no Exemplo 2.4, são periódicas pelo que não são injectivas em todo o seu domínio. De facto, para cada valor y do seu contradomínio $[-1, 1]$ há uma infinidade de pontos do domínio $\mathbb{R}$ que lhe correspondem. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0 = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2})\,, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Assim, e para que possamos definir as funções inversas destas funções trigonométricas, temos de restringir os seus domínios a intervalos onde sejam injectivas.

No caso da função seno, consideramos a sua restrição ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco seno*:

$$\operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$
$$x \longmapsto \operatorname{arcsen}(x)$$

Note-se que $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ (uma vez que $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $\pi/4 \in [-\pi/2, \pi/2]$) e $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$ (uma vez que $\operatorname{sen}(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ e $-\pi/3 \in [-\pi/2, \pi/2]$).

O gráfico da função arcsen está representado na Figura 13. Mostre que $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ e $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$ para qualquer $x \in [-1, 1]$. Por outro lado, verifique que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$ só é válida se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (porquê?).

Exercício 2.20. Verifique que a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ é estritamente decrescente, logo injectiva, e que $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco cosseno*, $\cos^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Esboce o seu gráfico.

Note-se que $\arccos(-1) = \pi$ (já que $\cos(\pi) = -1$ e $\pi \in [0, \pi]$), $\arccos(1/2) = \pi/3$ e $\arccos(\cos(-\pi/3)) = \pi/3$. Mostre que

$$\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos(\arccos x) = x$$

Quando é que se pode garantir que $\arccos(\cos x) = x$?

Exemplo 2.21. A funcão trigonométrica tangente, apresentada no Exemplo 2.5, também é periódica pelo que não é injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ é estritamente crescente, logo injectiva, e $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco tangente*:

$$\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

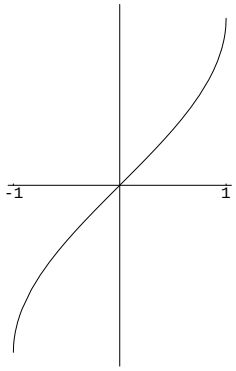

FIGURA 13. Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

$$x \longmapsto \arctan(x)$$

O seu gráfico está representado na Figura 14. Note-se que $\arctan(1) = \pi/4$, $\arctan(-1) = -\pi/4$,

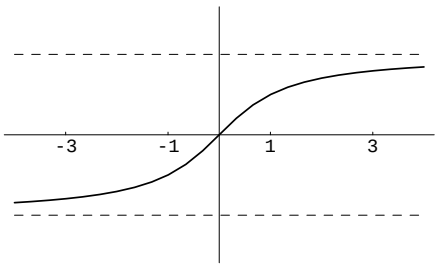

FIGURA 14. Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

$\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ (porquê?).

Função de Heaviside e Função de Dirichlet. Antes de prosseguirmos, vale a pena notar que uma função *não é* necessariamente definida por uma expressão algébrica. Na realidade, uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é apenas uma *regra* que a cada número real $x \in D$ atribui um número real $f(x) \in \mathbb{R}$. Os próximos dois exemplos são funções que não são definidas por expressões algébricas.

Exemplo 2.22. Consideremos a chamada *função de Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na Figura 15.

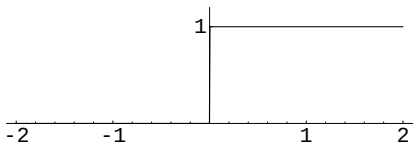

FIGURA 15. Gráfico da função de Heaviside.

Esta função é limitada, crescente, e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$.

Exemplo 2.23. Consideremos a chamada *função de Dirichlet* $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função é limitada e o seu contradomínio é $\{0, 1\}$. Reparem que não é possível esboçar o gráfico desta função da forma usual. Notem que o gráfico está sempre bem definido, e que isto não deve ser confundido com a questão de esboçar o gráfico numa folha de papel ou pedir a um computador para o fazer.

Limite de uma função num ponto. No ensino secundário, a noção de limite de uma função foi dada da seguinte forma: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ quando:

(8) Sempre que x_n é uma sucessão de termos em D_f tal que $x_n \to a$, então $f(x_n) \to b$.

Diz-se que esta é a definição de *limite segundo Heine*. Em CDI1 trabalharemos com uma noção equivalente, a definição de *limite segundo Cauchy* (a equivalência entre as duas definições será tratada na secção de material extra que se encontra no final deste capítulo). A definição que iremos usar tem a vantagem de não requerer a noção de limite de sucessões, e de estar mais próxima de outros raciocínios que faremos ao longo da cadeira. De uma forma ou de outra, note-se que se pode pensar de forma intuitiva que:

(9) Uma função f tem limite b quando x tende para a, se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos, tomando x suficientemente próximo de a.

Com esta *definição informal* é possível tratar exemplos simples de funções e calcular limites elementares. No entanto, ela pode dar lugar a alguma confusão quando pretendemos tratar exemplos mais complicados como, por exemplo, o limite de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ quando x tende para 0, ou da função de Dirichlet quando x tende para algum a.

Nota 2.24. Desta noção de limite fica subentendido que é possível aproximar-me de a por pontos no domínio de f, o que motiva a seguinte definição:

Definição 2.25. Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto *aderente* de D se qualquer vizinhança de a tiver pontos de D, ou seja,

$$\forall \delta > 0, \quad D \cap]a - \delta,\ a + \delta[\neq \emptyset.$$

Exemplo 2.26. Note-se que, se $a \in D$, então a é aderente a D. Por outro lado, se por exemplo $D =]0, 1]$ então 0 é um ponto aderente.

Daqui em diante, sempre que falarmos de limite de uma função num ponto, assumiremos que o ponto é aderente ao domínio dessa função.

Um problema da "definição" (9) está em não ser claro o que se entende por *estar próximo de*. Repare-se que dizer que $f(x)$ está próximo de b (respectivamente, x está próximo de a) deve significar que $|f(x) - b|$ (resp. $|x - a|$) é pequeno. Assim, podemos refinar a nossa "definição" para:

> Uma função f tem limite b quando x tende para a, se pudermos fazer $|f(x) - b|$ tão pequeno quanto quisermos, tomando $|x - a|$ suficientemente pequeno.

Mas agora vemos que temos um outro problema: o que é que queremos dizer com os termos *tão pequeno quanto quisermos* e *suficientemente pequeno*? Ao esclarecer o verdadeiro significado destes termos chegamos à definição precisa de limite, que é a seguinte:

Definição 2.27. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com a ponto aderente de D. Dizemos que f tem *limite* b quando x tende para a se para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o x, se $|x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$. Em notação de quantificadores, podemos escrever esta condição na forma:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in D \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,. \tag{10}$$

Recordando a definição de vizinhança de um ponto (Definição 1.12), a proposição pode escrever-se da seguinte forma equivalente:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ :\ x\in V_\delta(a)\cap D \Rightarrow f(x)\in V_\varepsilon(b). \tag{11}$$

Notem que tudo o que fizermos daqui em diante dependerá desta definição! Por isso, memorizem-na como se fosse a tabuada o mais rapidamente possível. Esta série de 4 vídeos da Khan Academy poderão ajudar na compreensão. É uma boa ideia começarem por resolver os seguintes exercícios:

Exercício 2.28. Usando a definição precisa de limite, mostre que:

(i) se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função constante, i.e., para a qual existe $c\in\mathbb{R}$ com $f(x)=c\,,\ \forall\,x\in\mathbb{R}$, então
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c\,,\ \forall\,a\in\mathbb{R}\,.$$

(ii) se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é a função identidade, i.e., $f(x)=x\,,\ \forall\,x\in\mathbb{R}$, então
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x=a\,,\ \forall\,a\in\mathbb{R}\,.$$

A proposição que se segue enuncia um critério útil para o cálculo de alguns limites.

Proposição 2.29. *Se existirem $m,M\in\mathbb{R}^+$ tais que*
$$|x-a|<m \Rightarrow |f(x)-b|<M|x-a|$$
então
$$\lim_{x\to a} f(x)=b\,.$$

Dem. Dado $\varepsilon>0$ arbitrário, seja $\delta=\min\{m,\varepsilon/M\}$. Então
$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<M|x-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\,. \qquad \square$$

Exemplos. Apresentamos de seguida alguns exemplos de cálculo de limites a partir da definição. Mais adiante, veremos alguns resultados que permitem simplificar imenso o cálculo de limites e evitar recorrer a esta definição. No entanto, é muito importante prestar atenção a estes primeiros exemplos e procurar interiorizar o seu verdadeiro significado.

Exemplo 2.30. Vejamos que, para qualquer número real $a\geq 0$ e natural p, se verifica:
$$\lim_{x\to a} x^p=a^p\,.$$
É um exercício simples [façam-no!] mostrar a igualdade:
$$a^p-b^p=(a-b)\sum_{k=1}^{p} a^{p-k}b^{k-1}.$$
Se $|x-a|\leq 1$ temos $|x|=|x-a+a|\leq |x-a|+|a|\leq a+1$, e concluímos que:
$$\begin{aligned}|x^p-a^p| &\leq |x-a|\sum_{k=1}^{p}|x|^{p-k}|a|^{k-1}\\ &\leq |x-a|\sum_{k=1}^{p}(a+1)^{p-k}a^{k-1}.\end{aligned}$$
Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 2.29 com $m=1$ e $M=\sum_{k=1}^{p}(a+1)^{p-k}a^{k-1}$ para concluir que $\lim_{x\to a} x^p=a^p$.

Exemplo 2.31. Uma análise do círculo trigonométrico e a imparidade e paridade das funções sen e cos permitem concluir que, para $|x|<\pi/2$, se tem
$$|\operatorname{sen} x|<|x| \quad \text{ e } |1-\cos x|<x^2.$$
(nesta última, use o Teorema de Pitágoras - veja os detalhes nas páginas 90 e 91 deste livro). Assim, podemos aplicar o critério da Proposição 2.29 com $m=1$ e $M=1$ e vem que
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x=0, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Exercício 2.32. Verifique que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ não satisfaz as condições da Proposição 2.29 no ponto $a = 0$. Use a definição para mostrar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$.

Mais Exemplos:

Exemplo 2.33. Consideremos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vamos ver que:

$$\lim_{x\to a} H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } a < 0; \\ 1\,, & \text{se } a > 0; \\ \text{não existe}\,, & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Suponhamos primeiro que $a > 0$. É claro que, se tomarmos $|x - a| < a$, então $-a < x - a < a$ e, em particular, $x > 0$, logo:

$$|x - a| < a \Rightarrow |H(x) - 1| = |1 - 1| = 0$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = a$ que se verifica:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |H(x) - 1| < \varepsilon$$

ou seja, $\lim_{x\to a} H(x) = 1$. De forma análoga, mostra-se que se $a < 0$ então $\lim_{x\to a} H(x) = 0$.

Vejamos agora que o $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe. Para obter o significado preciso do que significa não existir o limite, começamos por observar o que significa afirmar que uma função f não tem limite b quando x tende para a. Para isso, basta negarmos a condição na definição de limite:

> existe algum $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $\delta > 0$ existe um x que satisfaz $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| \geq \varepsilon$.

Se preferirmos, em notação de quantificadores:

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{R} :\ |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon\,.$$

Vejamos então que para qualquer número real b a função H não tem limite b quando x tende para 0. Observe que para qualquer $\delta > 0$, se $|x| < \delta$ então temos:

$$\begin{aligned} \text{se } x < 0 &\Rightarrow H(x) = 0 \Rightarrow |H(x) - b| = |b|, \\ \text{se } x > 0 &\Rightarrow H(x) = 1 \Rightarrow |H(x) - b| = |1 - b|. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{2}\max(|b|, |1 - b|)$ para que se verifique:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{R} :\ |x - a| < \delta \wedge |H(x) - b| > \varepsilon\,,$$

donde o limite não é b. Como b era um número real qualquer, concluímos que o limite $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe.

Exercício 2.34. Considere a função de Dirichlet $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} d(x)$ não existe.

Exemplo 2.35. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

O ponto 0 não pertence ao domínio da função, mas ainda faz sentido falar em $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ (cf. Nota 2.24).

Começamos por observar que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ e que $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$, para qualquer inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Seja então $x_k^+ = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ e $x_k^- = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$. Se b é um número real qualquer, temos que:

$$|f(x_k^+) - b| = |1 - b|, \quad |f(x_k^-) - b| = |-1 - b| = |1 + b|.$$

Seja então $\varepsilon = \frac{1}{2}\max(|1 - b|, |1 + b|)$. Dado $\delta > 0$, podemos sempre escolher um inteiro k suficientemente grande de forma que $0 < |x_k^{\pm}| \leq \delta$, logo:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in D :\ |x| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon\,,$$

donde o limite de f quando x tende para 0 não é b. Como b era um número real qualquer, concluímos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

Exemplo 2.36. Consideremos a função $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) .$$

O seu gráfico está representado na Figura 16.

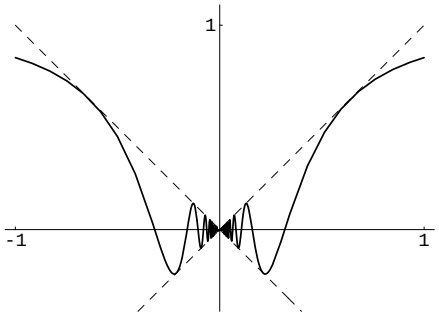

FIGURA 16. Gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

Tendo em conta que $|\operatorname{sen}(y)| \leq 1\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}$, temos para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que

$$0 \leq \left|x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|\,.$$

Segue-se que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon$ obtendo:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Ou seja, concluímos que:

$$\lim_{x \to 0}\ x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Podem encontrar muitos outros exemplos de cálculo de limites através da definição no livro de Spivak (listado na Bibliografia), que vos podem ajudar a interiorizar esta noção.

Propriedades do Limite de Funções num Ponto. Vamos agora estudar algumas propriedades elementares do limite de funções que nos ajudarão no seu cálculo, sem termos de recorrer à definição.

Teorema 2.37. (Unicidade do Limite) *Seja f uma função e suponha-se que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e que $\lim_{x\to a} f(x) = b'$. Então $b = b'$.*

Dem. Começamos por escrever, usando a definição de limite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0\ :\ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = b' \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0\ :\ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \varepsilon\,.$$

Suponhamos, por absurdo, que $b \neq b'$. Então vamos tomar $\varepsilon = \frac{|b-b'|}{2}$ e, para os δ_1 e δ_2 dados por estas definições, escolhemos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Concluímos que, para todo o x tal que $|x - a| < \delta$, temos:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \wedge |f(x) - b'| < \varepsilon.$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} |b - b'| &= |b - f(x) + f(x) - b'| \\ &< |b - f(x)| + |f(x) - b'| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$$= 2\varepsilon = |b - b'|$$

uma contradição. Assim, necessariamente, $b = b'$. □

Note que se f e g são funções então podemos formar as seguintes novas funções:

- A função $f + g$, dita a *soma* de f e g e a função diferença $f - g$, dita a *diferença* de f e g:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- A função $f \cdot g$, dita o *produto* de f e g:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

- A função $\frac{f}{g}$, dita o *quociente* de f por g:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Note que o domínio das funções soma, diferença e produto, é a intersecção $D_f \cap D_g$ dos domínios das funções parcelas. O domínio da função quociente $\frac{f}{g}$ é:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Finalmente, dada uma função f e um número real $c \in \mathbb{R}$ podemos considerar a função cf definida por:

$$(cf)(x) = c\, f(x),$$

cujo domínio é o mesmo que o domínio de f. Também podemos pensar nesta função como o produto da função constante $g(x) = c$ pela função f.

Teorema 2.38. (Limite e Operações Algébricas) *Sejam f e g funções tais que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = c\,.$$

Então:

(i) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$
(ii) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c.$
(iii) *se $c \neq 0$,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}\,.$$

Dem. Vamos demonstrar em detalhe a propriedade (i). As demonstrações das outras propriedades são análogas e podem ser encontradas no livro de Spivak (listado na Bibliografia).

Começamos por recorrer à definição de limite para escrever:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_1 > 0 :\ |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = c \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta_2 > 0 :\ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Assim, se escolhermos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \pm g)(x) - (b \pm c)| &= |(f(x) - b) \pm (g(x) - c)| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

o que mostra que:

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm c.$$ □

Exemplo 2.39. Recorrendo a este resultado é muito fácil calcular certos limites sem ter de passar pelo processo doloroso de encontrar os ε e δ correctos. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^4-3x+2}{x^2+1} &= \frac{\lim_{x\to a}(x^4-3x+2)}{\lim_{x\to a}(x^2+1)} \quad \text{(pelo Teorema 2.38 (iii))}\\ &= \frac{\lim_{x\to a}x^4-\lim_{x\to a}3x+\lim_{x\to a}2}{\lim_{x\to a}x^2+\lim_{x\to a}1} \quad \text{(pelo Teorema 2.38 (i))}\\ &= \frac{a^4-3a+2}{a^2+1} \quad \text{(pelo Exemplo 2.30)}\end{aligned}$$

Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada.

Teorema 2.40. *Sejam f, g e $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que*

$$f(x) \le g(x) \le h(x)\,,$$

para qualquer $x \in D$. Temos então que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Dem. Pela definição de limite podemos escrever (omitimos o domínio para simplificar a apresentação):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = b \;&\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta_1>0\;:\;|x-a|<\delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-b<\varepsilon\,,\\ \lim_{x\to a} h(x) = b \;&\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta_2>0\;:\;|x-a|<\delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x)-b<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Usando o facto de g estar encaixada entre f e h, obtemos:

$$|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; \begin{cases} g(x)-b \le h(x)-b < \varepsilon \\ \\ g(x)-b \ge f(x)-b > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow\; |g(x)-b|<\varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;:\;|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-b|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} g(x) = b. \qquad \square$$

Um caso em que este critério é particulamente útil é quando a função g é da forma $g(x) = u(x)v(x)$ em que $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ - u diz-se um *infinitésimo* - e v é uma função limitada numa vizinhança de a, ou seja existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \le v(x) \le M$, para x numa vizinhança de a. Neste caso, assumindo $u(x) > 0$ (senão consideramos $|u(x)|$), e fazendo $f(x) = mu(x)$, $h(x) = Mu(x)$, temos $f(x) \le g(x) \le h(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = 0$, logo $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Diz-se então que *o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.* O cálculo do limite do Exemplo 2.36 podia também ser justificado desta forma.

Exemplo 2.41 (Limite Notável)**.** Uma análise simples do círculo trigonométrico (veja-se por exemplo a página 90 – Figura 3.2 deste livro) permite mostrar que, para $|x| < \pi/2$ é válida a relação: $0 < |\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x|$, donde

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1\,.$$

Como (recorde o Exemplo 2.31):

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \lim_{x\to 0} 1\,,$$

concluímos pelo príncípio do encaixe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

Limite de Funções Compostas.

Teorema 2.42. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais de variável real, e $(f \circ g) : D_{f\circ g} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sua função composta. Se*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{y\to b} f(y) = c \in \mathbb{R},$$

então

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = c\,.$$

Dem. Pela definição de limite (notem a alteração nos nomes das variáveis!):

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \;\Leftrightarrow\; \forall\,\gamma > 0\ \exists\,\delta > 0 :\ |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma\,, \tag{13}$$

$$\lim_{y\to b} f(y) = c \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\gamma > 0 :\ |y-b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon\,. \tag{14}$$

Seja então dado $\varepsilon > 0$. Tomamos $\gamma > 0$ tal que (14) é satisfeita e, de seguida, para esta escolha de γ tomamos $\delta > 0$ tal que (13) é satisfeita. Segue-se que:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow |g(x) - b| < \gamma, \qquad (\text{por } (13)) \\ &\Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon, \qquad (\text{por } (14)). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 :\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = c\,. \qquad \square$$

Exemplo 2.43 (Mudança de Variável)**.** Suponhamos que pretendemos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$. Observamos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = f(g(x)),$$

onde $g(x) = x^2$ e $f(y) = \frac{\operatorname{sen} y}{y}$. Como já sabemos que (ver Exemplo 2.41):

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1\,,$$

o Teorema 2.42 mostra que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1\,.$$

Exemplo 2.44. Dada uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injectiva tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

não é necessariamente verdade que

$$\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = a.$$

Por exemplo, considere a função $f : [0,1]\cup]2,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x-1, & 2 < x \le 3 \end{cases}\,.$$

Neste caso,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1, \quad \text{mas} \quad \lim_{y\to 1} f^{-1}(y) \text{ não existe.}$$

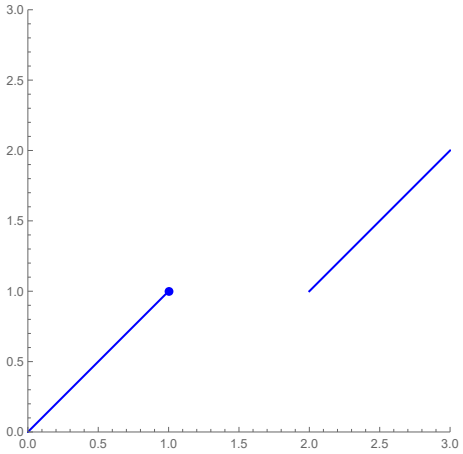

FIGURA 17. O gráfico da função f no Exemplo 2.44.

Limites Relativos e Laterais.

Definição 2.45. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $A \subset D$ um subconjunto do seu domínio. Diremos que f *tem limite* b *no ponto* a *relativo ao conjunto* A, e escreveremos

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b\,,$$

se a *restrição de* f *ao conjunto* A, $f|_A : A \to \mathbb{R}$, tem limite b no ponto a, i.e., se $\lim_{x\to a} f|_A(x) = b$, o que por definição de limite significa

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ (x \in A \text{ e } |x-a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

Nota 2.46. Como já foi referido na Nota 2.24 para o limite usual, para definir o limite relativo $\lim_{x\to a} f|_A(x)$ não é necessário que a pertença ao conjunto $A \subset D$, bastando que para todo o $\delta > 0$ exista $x \in A$ tal que $|x - a| < \delta$, ou seja, que a seja aderente a A.

Como é evidente,

se existe $\lim_{x\to a} f(x)$, então existe $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ para todo o A que tem a como ponto aderente.

Isto é especialmente útil para mostrar que não há limite em certas situações: se mostrarmos a existência de dois conjuntos A_1 e A_2 tais que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_2}} f(x),\ \text{então não existe}\ \lim_{x\to a} f(x)$$

(veja-se o Exemplo 2.48 à frente).

Nota 2.47. Há dois casos particularmente importantes desta definição de limite relativo, dando origem aos chamados *limites laterais*:

(i) quando $A = D \cap]a, +\infty[$ temos o chamado limite lateral à direita, ou simplesmente *limite à direita*, que será denotado por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. Recorrendo a quantificadores podemos escrever:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ (x \in D \text{ e } x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

(ii) quando $A = D \cap]-\infty, a[$ temos o chamado limite lateral à esquerda, ou simplesmente *limite à esquerda*, que será denotado por $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Novamente, usando quantificadores podemos escrever:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ (x \in D \text{ e } x - a > -\delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,.$$

Exemplo 2.48. Recorde-se a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

A função tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1\,.$$

logo, não existe $\lim_{x\to 0} H(x)$.

Exercício 2.49. Para uma função f e $a \in D$ tal que $f(a) = b$, mostre que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é igual a b se, e só se, existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$, e são ambos iguais a b (ou seja, se, e só se f é contínua em a).

Recta Acabada e Indeterminações. Até aqui, falámos de limites $\lim_{x\to a} f(x) = b$. O nosso objetivo agora é o de considerar o caso em que a e/ou b possam ser infinito, e perceber em que medida conseguimos generalizar o Teorema 2.38 (Limites e Operações Algébricas) para esta situação. Para isso, teremos de introduzir formalmente o que são $\pm\infty$ (falando da reta acabada $\overline{\mathbb{R}}$), definir limite para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e como se opera com estes novos símbolos.

Definição 2.50. Designa-se por *recta acabada*, e representa-se por $\overline{\mathbb{R}}$, o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\ .$$

Os elementos $-\infty$ e $+\infty$ satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem mais à frente.

Limites na recta acabada. Queremos agora definir limites na recta acabada, de forma que faça sentido falar nos limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

e ainda que o resultado de um limite possa ser $\pm\infty$. Para isso, recorde-se a definição de *vizinhança de raio* $\varepsilon > 0$ de um ponto $a \in \mathbb{R}$ como sendo o conjunto

$$V_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\ .$$

Como já foi observado atrás, dados $a, b \in \mathbb{R}$, a definição de *limite de uma função* pode ser escrita na forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b)\,. \tag{15}$$

Se definirmos vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ de $-\infty$ e $+\infty$ por[3]

$$V_\varepsilon(-\infty) =]-\infty, -1/\varepsilon[\quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) =]1/\varepsilon, +\infty[\ ,$$

a definição (15) continua a fazer sentido na recta acabada

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\ ,$$

i.e., para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Passaremos assim a usá-la também neste contexto. Resumindo:

Definição 2.51. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ x \in V_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

Exercício 2.52. Verifique que a definição (15) para o limite na recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$ tem os seguintes significados:

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, L > 0\ :\ x \in D\ \wedge\ x > L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

[3] A ideia é que a vizinhança diminua quando ε diminui; é isso que está por detrás de se tomar $1/\varepsilon$ nas vizinhanças do infinito.

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,L>0\ :\ x\in D\ \wedge x<-L \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, onde $a\in\mathbb{R}$, sse

$$\forall\,L>0\ \exists\,\delta>0\ :\ \ x\in D\ \wedge\ |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>L.$$

(iv) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, onde $a\in\mathbb{R}$, sse

$$\forall\,L>0\ \exists\,\delta>0\ :\ \ x\in D\ \wedge\ |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-L.$$

Verifique, ainda, o que significa $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, e $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.

Exemplo 2.53. Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0^{\pm} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x} = \pm\infty\,.$$

Veja-se a primeira afirmação: dado ε, tem-se (escolhendo $L = 1/\varepsilon$) que

$$x>\frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \quad \text{e} \quad x<-\frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

A demonstração da segunda afirmação fica como exercício (façam-na e confirmem com o vosso professor se a resolução está correta!).

Exemplo 2.54. O conhecimento que temos das funções exponencial e logaritmo, em particular a sua monotonia, permitem-nos afirmar que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,,\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty\,.$$

Estes factos serão usados em exemplos e podem (e devem) ser usados na resolução de exercícios. Veja-se a última afirmação: dado $L>0$, tem-se $\ln(x)<-L \Leftrightarrow 0<x<e^{-L}$, porque a função logaritmo é crescente (e tem domínio $\mathbb{R}^+$). Logo, escolhendo $\delta = e^{-L}$,

$$0<x<\delta \implies \ln(x)<-L.$$

Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites. Vamos agora definir operações que envolvem $\pm\infty$ de forma a que os teoremas sobre limites de operações algébricas e funções compostas continuem válidos (veja-se a "Nota Importante" mais à frente).

Definição 2.55 (Operações algébricas na reta acabada)**. Somas e diferenças.** Para qualquer $a\in\mathbb{R}$,

$$+\infty+\infty=+\infty, \quad -\infty+(-\infty)=-\infty, \quad \pm\infty+a=\pm\infty$$

Produtos. Para qualquer $\bar{a}\in\overline{\mathbb{R}}$,

$$\bar{a}\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } \bar{a}>0;\\ -\infty\,, & \text{se } \bar{a}<0.\end{cases} \qquad \bar{a}\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty\,, & \text{se } \bar{a}>0;\\ +\infty\,, & \text{se } \bar{a}<0.\end{cases}$$

Quocientes.

$$\frac{a}{\pm\infty}=0 \quad (a\in\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty \quad (a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$$

Recordando que dizemos:

- $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ se $\lim_{x\to a} g(x)=0$ e $g(x)>0$ numa vizinhança de a
- $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$ se $\lim_{x\to a} g(x)=0$ e $g(x)<0$ numa vizinhança de a,

temos:

Definição 2.56 (Divisão por 0 e Potenciação)**.** Para qualquer $\bar{a}\in\overline{\mathbb{R}}$, temos o seguinte:

- se $\bar{a}>0$, então

$$\frac{\bar{a}}{0^+}=+\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-}=-\infty;$$

- se $\bar{a} < 0$, então

$$\frac{\bar{a}}{0^+} = -\infty \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}}{0^-} = +\infty.$$

Além disso,

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \leq a < 1; \\ +\infty\,, & \text{se } a > 1; \end{cases} \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}}\,,$$

bem como

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0\,, & \text{se } b < 0; \\ +\infty\,, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

As seguintes operações na reta acabada não estão definidas:

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \times 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 1^{+\infty}, \quad (+\infty)^0. \quad 0^0.$$

Chamamos a estas expressões indeterminações.

Repare-se que, num certo sentido, todas as indeterminações são equivalentes. Por exemplo:

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty \quad \text{e} \quad \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty\,.$$

Nota importante: Os resultados que estudámos sobre operações algébricas e limites (Teorema 2.38) e limite de funções compostas (Teorema 2.42), continuam a ser válidas para a recta acabada $\overline{\mathbb{R}}$, exatamente com o mesmo enunciado, desde que não originem alguma das indeterminações referidas anteriormente. Esta é a justificação para as operações com infinitos que definimos anteriormente.

Nota 2.57 (Retirada do livro de João Paulo Santos, listado na bibliografia)**.** Vamos ver que a indeterminação $\frac{0}{0}$ pode corresponder a qualquer resultado no limite, e até a situações em que não há limite. Tomemos $g(x) = x^3$, que é tal que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Consideremos vários exemplos de funções f com limite 0 na origem:

- Se $f(x) = x^4$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = x$, que converge para 0 .
- Se $f(x) = x$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$, que converge para $+\infty$.
- Para qualquer $b \in \mathbb{R}$, podemos tomar $f(x) = bx^3$. Então $\frac{f(x)}{g(x)} = b$ converge para b.
- Se $f(x) = x^3 \operatorname{sen}(1/x)$, o limite de $\frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sen}(1/x)$ não existe em 0 .

A nota anterior justifica porque chamamos a $\frac{0}{0}$ uma indeterminação. Podem ser dados exemplos do mesmo tipo para todas as outras indeterminações.

Exemplo 2.58. Vimos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1\,.$$

Usando este facto, pretende-se completar o gráfico da Figura 16 do Exemplo 2.36 calculando o limite

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Notem que a propriedade algébrica (ii) do Teorema 2.38 dá neste caso origem a uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, pelo que não pode ser usada para calcular este limite.

Consideremos as funções $g, f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\,.$$

Temos então que $(f \circ g) : D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x} = x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Como

$$+\infty \in \overline{D_{f\circ g}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathbb{R}}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1\,,$$

podemos concluir pelo Teorema 2.42 que

$$\lim_{x\to+\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1\,.$$

Na notação do Teorema 2.42, temos que neste exemplo

$$a = +\infty\,, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 1\,.$$

A análise anterior pode ser escrita abreviadamente da seguintes forma:

$$\text{considerando a mudança de variável } y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}\,, \text{ em que } x \to +\infty \Rightarrow y \to 0,$$

temos que

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen}(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1\,.$$

A Figura 18 apresenta uma versão mais completa do gráfico da Figura 16, tendo já em conta o limite calculado neste exemplo.

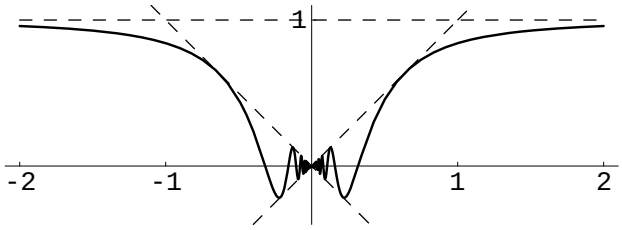

FIGURA 18. Versão mais completa do gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$.

Continuidade de Funções Reais de Variável Real. Dada uma função $f : D \to \mathbb{R}$ a relação:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

pode não se verificar. De facto, esta igualdade pode falhar por duas razões:

- O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ não existe (por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.35).
- O limite existe, mas o ponto a não pertence ao domínio D, e portanto não faz sentido sequer falar em $f(a)$ (por exemplo, a função $f(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ em $a = 0$; cf. Exemplo 2.36).

Este tipo de comportamento pode ser considerado anormal, e por isso convencionou-se um nome para qualificar as funções que se portam bem:

Definição 2.59. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *contínua num ponto* $a \in D$ se existir limite em a. Nesse caso,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

A função f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio D.

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico não apresenta interrupções, saltos ou oscilações. Embora esta ideia intuitiva seja muitas vezes suficiente para decidir se uma função é contínua olhando para o esboço do seu gráfico, há situações em que isso não é de todo claro, e por isso a definição precisa que demos acima é muito importante. Em termos de $\varepsilon - \delta$, uma função f é contínua em $a \in D$ se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

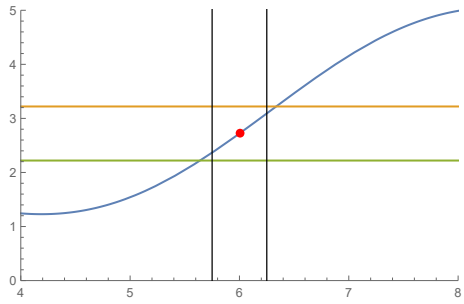

FIGURA 19. Dada a função $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x/2$, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x-6| < 0.25$, então $|f(x) - f(6)| < 0.5$. Por outras palavras, se se fixar $\varepsilon = 0.5$, podemos escolher $\delta = 0.25$.

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

Teorema 2.60.

(i) *Se f e g são funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são contínuas em a.*
(ii) *Sejam f e g duas funções. Se $a \in D_{f\circ g}$, g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $(f \circ g)$ é contínua em a.*

Dem. Consequência imediata da Definição 2.59 e dos Teoremas 2.38 e 2.42. □

Teorema 2.61. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo I. Então a função inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ é contínua.*

Dem. Consultem o Spivak (listado na Bibliografia) ou o Teorema 3.3.5 deste livro. Para mostrar este resultado é necessário usar o Teorema de Bolzano, que já conhecem do Ensino Secundário e que recordaremos mais à frente. □

Continuidade Lateral. A noção de limites laterais introduzida na Nota 2.47 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral*.

Definição 2.62. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f é *contínua à direita* em a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;
(ii) f é *contínua à esquerda* em a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Teorema 2.63. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. f é contínua em a, i.e.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$

sse f é contínua à direita e à esquerda em a, i.e.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)\,.$$

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 2.64. A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0, \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)\,.$$

Exemplos de Funções contínuas. O que já sabemos sobre limites permite-nos decidir se muitas funções são contínuas ou não.

Exemplo 2.65.

(a) uma função polinomial $p(x)$ é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.
(b) qualquer função racional $f = p/q$, com p, q polinómios, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ onde $q(a) \neq 0$;
(c) a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$;
(d) a função de Heaviside, apresentada no Exemplo 2.22, é contínua em qualquer ponto $a \neq 0$ e descontínua no ponto zero.
(e) a função de Dirichlet, apresentada no Exemplo 2.23, é descontínua em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.66. Pode mostrar-se, recorrendo à definição de função exponencial e a algumas desigualdades, que esta é uma função contínua (veja-se por exemplo o Teorema 3.4.2 aqui). Como esta é uma função estritamente crescente, então é injetiva. Assim, do Teorema 2.60 concluímos que a função logaritmo é contínua.

Exemplo 2.67. As funções sen, cos, tan e cot são contínuas em todo o seu domínio. De facto, já foi visto que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$ e $\lim_{x\to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Usando a identidade para o seno de uma soma e escrevendo x como $x - a + a$, temos

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x\to a} \left(\operatorname{sen}(a)\cos(x-a) + \cos(a)\operatorname{sen}(x-a)\right) = \operatorname{sen}(a)\cos(0) + \cos(a)\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen} a.$$

A continuidade do cosseno fica como exercício (deve usar a fórmula do cosseno da soma: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$). A continuidade da tangente e cotangente segue imediatamente da sua definição e do facto de quocientes de funções contínuas serem contínuas (no seu domínio).

Exemplo 2.68. Uma vez que as funções sen, cos e tan são contínuas e injetivas nos intervalos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$ e $]-\pi/2, \pi/2[$, do Teorema 2.60 sai que as funções arcsen, arccos e arctan são contínuas no seu domínio.

Exemplo 2.69 (Limite Notável)**.** Vamos mostrar neste exemplo como se chega aos limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Já se sabe que $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Pode mostrar-se que, na verdade, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (isto faz-se por enquadramento, os detalhes podem ser vistos na Proposição 3.4.3 deste livro, por exemplo). Usando uma mudança de variável, tem-se então $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Da continuidade e propriedades da função ln, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1$$

Finalmente, de $y = e^x - 1 \iff x = \ln(1+y)$ sai

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

Exemplo 2.70. *(Prolongamento por Continuidade)* Consideremos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) , & \text{se } x \neq 0 \\ 0 , & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se $a \neq 0$, F é numa vizinhança de a o produto/composição de funções contínuas, pelo que é contínua. Por outro lado, recorrendo ao Exemplo 2.36, temos que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = F(0) .$$

Logo, F também é contínua em $a = 0$. Assim, F é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Esta função F é um exemplo de *prolongamento por continuidade*. Mais precisamente, é o prolongamente por continuidade da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $\forall\, x \neq 0$, ao ponto zero.

Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas.

Teorema 2.71. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Se $f(a) > g(a)$ então*

$$\exists\, \delta > 0 \,:\; x \in D_f \cap D_g,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x) .$$

Dem. Como f e g são por hipótese contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, sabemos que (omitindo os domínios para facilitar a escrita)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0 \,:\; |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0 \,:\; |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon .$$

Escolhamos $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$0 < \varepsilon < \frac{f(a) - g(a)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} .$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) < g(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > (f(a) - \varepsilon) - (g(a) + \varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > f(a) - g(a) - 2\varepsilon > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0 , \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da escolha feita para ε. □

Corolário 2.72. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$ com $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Basta usar o Teorema 2.71 com $g(x) = 0$, $\forall x \in D$. □

Teorema 2.73. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num ponto $a \in D$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $V_\delta(a) \cap D$.*

Dem. Exercício. □

Propriedades Globais das Funções Contínuas. Nas últimas secções vimos que, quando uma função é contínua num ponto a, podemos obter informação sobre o comportamento local da função, i.e., numa vizinhança de a. Vamos agora ver que, quando uma função é continua num intervalo $[a, b]$, então podemos obter informação sobre o comportamento global da função, i.e., em todo o intervalo $[a, b]$.

Vamos começar por enunciar três resultados muito importantes, e depois deduzir algumas consequências. A demonstração destes resultados só será feita no fim deste capítulo.

Teorema 2.74. (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja f uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, tal que $f(a) \neq f(b)$. Então, para qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Este resultado afirma que uma função contínua f num intervalo $[a,b]$ assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. Geometricamente, isto significa que o gráfico de f intersecta a recta horizontal $y = \alpha$ sempre que α esteja entre $f(a)$ e $f(b)$, como se ilustra na seguinte figura.

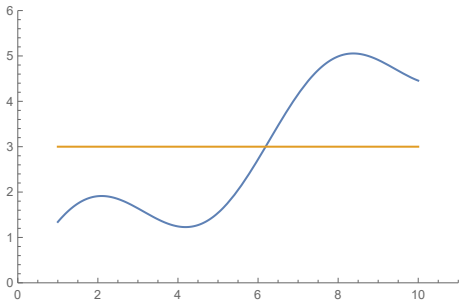

FIGURA 20. O Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto cuja imagem é igual a 3.

Teorema 2.75. *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, então f é limitada nesse intervalo, i.e., o contradomínio $f([a,b])$ é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para qualquer $x \in [a,b]$.*

Geometricamente, este resultado diz que o gráfico de f está entre duas rectas horizontais, como na seguinte figura.

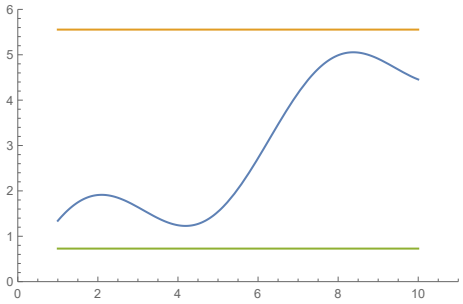

FIGURA 21. O gráfico de uma função contínua entre duas rectas horizontais.

Para enunciar o terceiro e último resultado fundamental, vamos introduzir a seguinte notação:

Definição 2.76. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f tem *máximo* (resp. *mínimo*) no conjunto D se existir um ponto $c \in D$ tal que $f(x) \leq f(c)\,,\ \forall\, x \in D$ (resp. $f(x) \geq f(c)\,,\ \forall\, x \in D$). Neste caso, c diz-se *ponto de máximo* (resp. *ponto de mínimo*) de f em D, e $f(c)$ diz-se o *máximo* (resp. *mínimo*) de f em D.

Teorema 2.77. (Teorema de Weierstrass) *Se f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, então f tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

A figura seguinte ilustra este resultado:

Notem que, para qualquer um destes resultados ser válido, a função f tem de ser contínua em *todos* os pontos do intervalo $[a,b]$. Basta a continuidade falhar nalgum ponto para um destes resultados deixar de ser válido, como se ilustra nos exemplos seguintes:

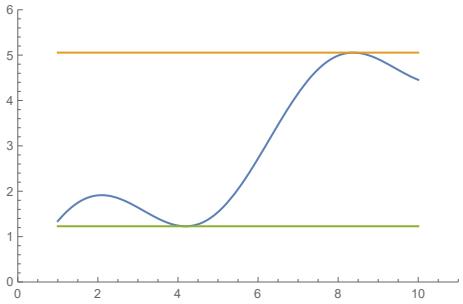

FIGURA 22. O Teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo.

Exemplo 2.78. Se restringirmos a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ao intervalo $[-1, 1]$:

$$H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1\,, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

obtemos uma função que é contínua excepto na origem. Temos que $f(-1) = 0$ e $f(1) = 1$, mas a função não assume quaisquer valores α entre 0 e 1, falhando portanto as conclusões do Teorema do Valor Intermédio. Notem que esta função é limitada e tem máximo e mínimo.

Exemplo 2.79. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{se } x \neq 0, \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua em todos os pontos do intervalo $[0, 1]$ excepto em $x = 0$. Por outro lado, f não é limitada neste intervalo, falhando as conclusões do Teorema 2.75 e do Teorema de Weierstrass.

Este exemplo também mostra que nas hipóstese do Teorema 2.75 e do Teorema de Weierstrass não podemos substituir o intervalo fechado $[a, b]$ pelo intervalo aberto $]a, b[$.

Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais. Vejamos agora algumas consequências e aplicações destes teoremas globais. O Teorema de Bolzano tem o seguinte corolário imediato:

Corolário 2.80. *Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b] \subset D$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 2.81. Vejamos como este corolário do Teorema de Bolzano pode ser usado para mostrar que qualquer polinómio do terceiro grau, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,, \text{com } a_3 \neq 0,$$

tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$, i.e., existe pelo menos um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

De facto, supondo sem perda de generalidade que $a_3 > 0$, temos que

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = (-\infty)^3 \cdot a_3 = -\infty\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3}\right) = (+\infty)^3 \cdot a_3 = +\infty\,.$$

Logo, existem $a \in \mathbb{R}^-$ e $b \in \mathbb{R}^+$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, pelo que o Corolário 2.80 do Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto $c \in]a, b[$ tal que $p(c) = 0$.

Nota 2.82. O resultado do Exemplo 2.81 generaliza-se facilmente para qualquer polinómio de grau ímpar, mas não para qualquer polinómio de grau par. Por exemplo, o polinómio de segundo grau $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $p(x) = x^2 + 1$ não tem zeros em $\mathbb{R}$. Recordem que a necessidade de encontrar zeros para este polinómio (i.e., soluções para a equação $x^2 + 1 = 0$) é uma das motivações para a introdução e construção do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Ainda assim, podemo-nos perguntar o que é que os teoremas fundamentais acima nos permitem dizer sobre as soluções de equações polinómiais de grau par. De facto eles permitem-nos, por exemplo, resolver uma questão que já discutimos anteriormente:

Teorema 2.83. *Para todo o $\alpha > 0$ a equação:*

$$x^2 = \alpha,$$

tem uma solução positiva. Será naturalmente designada por $\sqrt{\alpha}$.

Dem. Já sabemos que uma função polinomial é contínua, logo $f(x) = x^2$ é contínua. Dado $\alpha > 0$, existe um real $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$: se $\alpha > 1$ podemos tomar $b = \alpha$; se $\alpha = 1$ podemos tomar qualquer $b > 1$; se $\alpha < 1$ podemos tomar $b = 1$. Assim, a função $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) < \alpha < f(b)$, e pelo Teorema de Bolzano concluímos que existe $x \in]0, b[$ tal que $f(x) = x^2 = \alpha$. □

Exercício 2.84. Use um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema 2.83 para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem:

$$\sqrt[2n]{\alpha} \in \mathbb{R}^+ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ , \qquad \text{e} \qquad \sqrt[2n+1]{\alpha} \in \mathbb{R} , \ \forall \alpha \in \mathbb{R} .$$

Dem. do Teorema de Bolzano. Vamos supôr que $f(a) < f(b)$ (o caso $f(a) > f(b)$ é inteiramente análogo) e fixemos um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < \alpha < f(b)$. Um número $c \in]a, b[$ que é candidato natural a solução de $f(c) = \alpha$ é o supremo do conjunto

$$C = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

Pelo princípio do supremo, uma vez que C é não vazio, já que $a \in C$, e majorado, já que b é majorante, sabemos que existe $c = \sup C \leq b$. Para provar que $f(c) = \alpha$, provamos separadamente que não pode ocorrer $f(c) > \alpha$ nem $f(c) < \alpha$.

- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) > \alpha$. A função $g(x) = f(x) - \alpha$ é contínua em c e satisfaz $g(c) > 0$. Pelo Corolário 2.72, existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo o $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Isto significa que $f(x) > \alpha$ para todo o $x \in]c - \delta, c + \delta[$, pelo que $C \cap]c - \delta, c + \delta[= \emptyset$ o que contradiz a propriedade do supremo dada pela Proposição 1.9
- Suponha-se, por absurdo, que $f(c) < \alpha$. A função $g(x) = \alpha - f(x)$ é contínua em c e satisfaz $g(c) > 0$ logo, pelo Corolário 2.72, existe $c' > c$ [4] tal que $g(c') > 0$, ou seja $f(c') < \alpha$. Isto significa que $c < c'$ e $c' \in C$. Logo c não poderia ser majorante de C, o que contradiz o facto de $c = \sup C$.

Assim, $c \in [a, b]$ e $f(c) = \alpha$, como queríamos demonstrar. Notem que, de facto, $c \in]a, b[$ pois $f(c) = \alpha \neq f(a), f(b)$. □

Dem. do Teorema 2.75. De forma análoga à demonstração do Teorema de Bolzano, introduzimos o conjunto:

$$C = \{x \in [a, b] : \ f \text{ é limitada em } [a, x]\}.$$

Claramente este conjunto é não-vazio pois contém a. Por outro lado, C é um conjunto majorado por b. Pelo Princípio do Supremo temos que existe $\alpha = \sup C$. Vejamos que, de facto, $b = \alpha$:

- $\alpha > a$. Como f é contínua em a, pelo Teorema 2.73, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $[a, a + \delta)$. Portanto, f é limitada em $[a, a + \delta/2]$ donde $\alpha \geq a + \delta/2 > a$.
- $\alpha = b$. Suponhamos, por absurdo, que $a < \alpha < b$. Como f é contínua em $\alpha \in]a, b[$, pelo Teorema 2.73 concluímos que existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$. Mas então f é limitada em $[a, \alpha - \delta]$ e em $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, logo é limitada em $[a, \alpha + \delta/2]$, o que contradiz o facto de que α é o supremo de C.

Assim, temos que $b = \sup C$ e portanto f é limitada em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x < b$.

Isto não mostra ainda que f é limitada em $[a, b]$, porque ainda não sabemos se $b = \sup C \in C$, i.e. se $b = \max C$. Mas basta agora observar que f é continua em b, logo pelo Teorema 2.73, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $(b - \delta, b]$. Se f é limitada em $[a, b - \delta]$ e em $(b - \delta, b]$ então f é limitada em $[a, b]$, como pretendíamos mostrar. □

[4] Também sai do Corolário 2.72 que $c < b$, já que sendo $f(b) > \alpha$, haverá uma vizinhança de b onde $f(x) > \alpha$, logo $b \neq \sup C$.

Dem. do Teorema de Weierstrass. Vamos mostrar que f tem máximo. A demonstração que f tem mínimo é inteiramente análoga.

Consideremos o contradomínio de f, i.e, o conjunto dos valores que f toma em $[a,b]$:

$$C = \{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Este conjunto é óbviamente não vazio e, pelo teorema anterior, é limitado. O Princípio do Supremo garante que existe $M = \sup C$. Tudo o que temos a fazer é mostrar que $M \in C$, pois isso significa que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = M \geq f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$.

Suponha-se, por absurdo, que $M \neq f(c)$ para todo o $c \in [a,b]$. Então podemos definir a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Esta função é contínua, pois é a composta de funções contínuas e o denominador não se anula. Pela propriedade do supremo $M = \sup C$ dada pela Proposição 1.9, temos que para todo o $\varepsilon > 0$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) > M - \varepsilon$, ou seja,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto mostra que g não é limitada em $[a,b]$, o que contradiz o Teorema 2.75 que mostrámos anteriormente. □

Material Extra: Contradomínios de funções contínuas em intervalos e continuidade da função inversa. Uma das aplicações importantes do Teorema de Bolzano é permitir-nos caracterizar contradomínios de funções contínuas. De facto, notem que este resultado pode ser escrito na forma seguinte: se I for um intervalo *qualquer* com f contínua em I, e $a, b \in I$ com $f(a) < f(b)$ (por exemplo), então, escrevendo $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$, temos

$$[f(a), f(b)] \subset f([a,b]) \subset f(I)$$

ou seja, se $f(a), f(b) \in f(I)$, e $f(a) < \alpha < f(b)$, então $\alpha \in f(I)$ ou seja , $f(I)$ é um intervalo. (Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo $\Leftrightarrow$ se $x, y \in A$, com $x < y$, então para qualquer z tal que $x < z < y$ tem-se $z \in A$.)

Corolário 2.85. *Funções contínuas transformam intervalos em intervalos, ou seja, se o domínio é um intervalo I, também a imagem $f(I)$ será um intervalo.*

Em geral, temos sempre que $f(I)$ é um intervalo de extremos r e s,

$$]\, r, s\, [\subset f(I) \subset [\, r, s\,]$$

em que $s = \sup\{f(x) : x \in I\} = \sup f(I)$ e $r = \inf\{f(x) : x \in I\} = \inf f(I)$ em $\overline{\mathbb{R}}$. O intervalo será fechado ou aberto nos extremos dependendo de f ter máximo ou mínimo em I. Usando agora o Teorema de Weierstrass, temos também o seguinte:

Corolário 2.86. *Se f é contínua em $I = [a,b]$, intervalo limitado e fechado, então $f(I)$ também é um intervalo limitado e fechado.*

(Os intervalos limitados e fechados dizem-se *compactos* e têm propriedades importantes.) Uma consequência de f contínua num intervalo I então $f(I)$ é também um intervalo, dá-nos a *continuidade da função inversa* , que vimos no Teorema 2.61 (vejam também o Exemplo 2.44). É fácil ver que esta propriedade não é exclusiva das funções contínuas: podemos ter $f(I)$ intervalo sem que f seja contínua, por exemplo,

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ x \neq 0 \text{ e } f(0) = 0, \text{ ou } f(x) = x + 1,\ x \leq 0,\ f(x) = x,\ x > 0.$$

Mas se f é monótona, temos um critério de continuidade. Isso depende da seguinte propriedade das funções monótonas que deixamos como exercício.

Exercício 2.87. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é monótona, existem $f(a^+)$ e $f(a^-)$ em $\overline{\mathbb{R}}$ para qualquer $a \in D$. (Sug. $f(a^+) = \sup\{f(x) : x < a, x \in D\}$.)

Teorema 2.88. *Se f é estritamente monótona em I e $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua em I.*

Demonstração. Seja $a \in I$, (assumimos a no interior de I, se for um dos extremos prova-se da mesma forma a continuidade lateral). Assumindo f crescente (para decrescente é análogo) temos $f(a^+) \leq f(a) \leq f(a^-)$ e também $f(x) < f(a^-)$, se $x < a$, $f(x) > f(a^+)$, se $x > a$. Se fosse $f(a^+) \neq f(a)$, então $]f(a), f(a^+)[$ não estaria na imagem de f e $f(I)$ não seria um intervalo. O mesmo se conclui se $f(a^-) \neq f(a)$. Logo $f(a^+) = f(a) = f(a^-)$ e f é contínua em a. □

Daqui sai:

Demonstração da Continuidade da Função Inversa. f injectiva e contínua num intervalo $I \Rightarrow f$ é estritamente monótona e f^{-1} também será. Como $f^{-1}(J) = I$ é um intervalo, conclui-se do resultado anterior que f^{-1} é contínua. □

Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy. Tal como observámos no início do capítulo, no Ensino Secundário a noção de limite aprendida foi aquela segundo Heine – recorde-se (8). Nesta cadeira aprofundámos uma outra noção de limite segundo Cauchy (Definição 2.27). Mostramos de seguida que as noções são equivalentes.

Antes disso, é útil recordar a definição de uma sucessão (x_n) convergir para $a \in \mathbb{R}$: diz-se que $x_n \to a$ se

$$\forall \delta > 0 \, \exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \implies |x_n - a| < \delta,$$

ou seja, dado $\delta > 0$ existe uma ordem p a partir da qual $|x_n - a| < \delta$.

Teorema 2.89 (Equivalência das definições de limite para $a, b \in \mathbb{R}$)**.** *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, a um ponto aderente a D, e $b \in \mathbb{R}$. Temos*

$$\textit{definição no sentido de Cauchy} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{definição no sentido de Heine.}$$

Demonstração. (Cauchy $\Rightarrow$ Heine): se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ no sentido de Cauchy e $x_n \to a$, dado $\varepsilon > 0$, sejam $\delta > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que

- $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$;
- $n \geq p \Rightarrow \; |x_n - a| < \delta$.

Em conclusão, dado $\varepsilon > 0$ arranjámos uma ordem p tal que para $n \geq p$ temos $|f(x_n) - b| < \varepsilon$; conclui-se assim que $f(a_n) \to b$.

Reciprocamente, vemos que (Não Cauchy $\Rightarrow$ Não Heine): se $\lim_{x \to a} f(x) \neq b$ segundo Cauchy, existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ encontramos x com $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - b| > \varepsilon$. Tomamos $\delta = 1/n$ e $x = x_n$ e temos

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad |f(x_n) - b| > \varepsilon, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja construimos uma sucessão (x_n) tal que

$$x_n \to a \quad \text{e} \quad f(x_n) \nrightarrow b,$$

o que implica que $\lim_{x \to a} f(x) \neq b$ segundo Heine. □

3. Cálculo Diferencial

Derivada de Uma Função num Ponto. A noção de *derivada* é a primeira das duas noções fundamentais do Cálculo que vamos estudar. A outra é a noção de *integral* que será estudada mais tarde.

A noção de derivada de uma função pode ser motivada das mais variadas formas. Por exemplo, a origem do conceito de derivada está ligada à Física e alguns dos resultados que vamos estudar tem interpretações físicas imediatas, recorrendo a conceitos como o de velocidade e aceleração. No entanto, preferimos recorrer a um problema geométrico simples, que permite mostrar que a derivada é de facto um conceito matemático preciso e importante em muitas aplicações.

A questão que colocamos é a seguinte: Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de f num vizinhança do ponto $(a, f(a))$? A resposta a esta questão é, naturalmente, a recta *tangente* ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Surge então o problema de saber como calcular a equação dessa recta tangente.

Denotando por (x, y) as coordenadas de um ponto arbitrário do plano $\mathbb{R}^2$, a equação de qualquer recta não vertical que passe no ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$(y - f(a)) = m \cdot (x - a)\,,$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é arbitrário e representa o *declive* da recta determinada pela equação. A resolução do nosso problema passa pois por calcular *o declive da recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a))$*.

Esse cálculo pode ser feito com base na noção de limite. De facto, a recta tangente ao gráfico de uma função f num ponto $(a, f(a))$ pode ser obtida como o "limite" de rectas secantes ao mesmo gráfico, como ilustra a Figura 23.

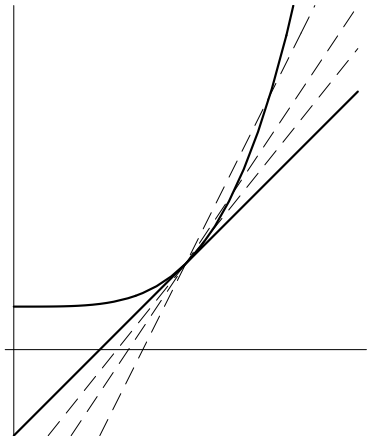

Figura 23. A recta tangente como limite de rectas secantes.

Assim, para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$. É uma recta secante ao gráfico de f e o seu declive é dado por

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$. Somos assim levados a colocar a seguinte definição formal:

Definição 3.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f *é diferenciável no ponto* $a \in D$ *com derivada* $f'(a)$ se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Antes ainda de vermos alguns exemplos, fazemos três comentários a esta definição:

O primeiro comentário é que a notação para a derivada, $f'(a)$, sugere que devemos pensar na derivada como uma função. De facto assim é: a cada a em que o limite na Definição 3.1 existe associamos o número real $f'(a)$. Assim, o domínio $D_{f'}$ da função derivada é um subconjunto do domínio de f.

O segundo comentário tem que ver com a interpretação física de derivada. Se $x(t)$ representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo t ao longo de uma reta, então a razão:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

representa a "velocidade média" do objecto no intervalo de tempo $[t, t+h]$. Podemos pois pensar na derivada

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

como a *velocidade instantânea* do objecto no instante t. Assim, podemos dizer que a velocidade instantânea do objecto é a taxa de variação da posição.

Notem, ainda, que a noção de taxa de variação faz sentido em qualquer situação em que uma quantidade varia. É por isso que a noção de derivada é tão importante quer em Matemática quer nas aplicações.

O terceiro comentário é que, embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a Definição 3.1 de derivada de uma função, nós ainda não temos uma definição matemática precisa de recta tangente. Mas podemos agora usar a noção de derivada para dar uma definição precisa:

Definição 3.2. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A *recta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(a, f(a))$ é a recta definida no plano pela equação

$$(y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a)\,. \tag{16}$$

Estamos a aproximar $f'(a)$ por $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, e o erro nessa aproximação é dado por

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \;\to\; 0,\; x \to a.$$

Rescrevendo, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_a(x), \qquad \text{para } R_a(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right)(x - a).$$

Note-se que $R_a(x) \to 0$ quando $x \to a$; na verdade, vai mais depressa para 0 do que o polinómio de grau 1 dado por $x - a$, já que:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{x - a} \to 0.$$

Neste sentido, podemos escrever

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \text{quando} \qquad x \to a.$$

Intuitivamente, uma função é diferenciável em a se, "perto" de a, for aproximadamente *linear*. **Ao acto de subtituir $f(x)$ por $f(a) + f'(a)(x - a)$ chama-se *linearização* (perto de a), e é algo que farão em muitas outras cadeiras aplicadas do curso!**

Exemplos.

Exemplo 3.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha x+\beta)-(\alpha a+\beta)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x-a)}{x-a} = \alpha\,. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$f(x) = \alpha x + \beta\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \tag{17}$$

Exemplo 3.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Usando

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}\,,$$

temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e o facto do cosseno ser uma função contínua.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $f'(x) = \cos x$.

Exercício 3.5. Mostre que a derivada da função $g(x) = \cos x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é a função $g'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Exemplo 3.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = e^x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x\,, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Concluímos assim que a derivada da função $f(x) = e^x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ e que a função derivada é ela própria: $f'(x) = e^x$.

Exemplo 3.7. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \ln x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Temos então que, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}.$$

Considerando a mudança de variável

$$y = \frac{h}{x}, \quad \text{em que} \quad h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0,$$

temos então que

$$f'(x) = \frac{1}{x}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x},$$

onde na última igualdade usámos novamente o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Concluimos assim que a derivada da função $f(x) = \ln x$ existe em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^+$ e que a função derivada é $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Uma outra notação para derivada é a *notação de Leibniz*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f = f'(x).$$

Por exemplo, nesta notação, temos as seguintes derivadas:

$$\frac{d}{dx}(\alpha x+\beta) = \alpha \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}); \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+); \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R});$$

Quando a variável independente é o tempo, por exemplo no caso de uma função $f(t)$, $x(t)$ ou $y(t)$, é comum usar um ponto por cima da função para representar uma derivada:

$$\dot{f}(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t).$$

Derivadas Laterais.

Definição 3.8. Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i) f tem *derivada lateral à direita* em a se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

(ii) f tem *derivada lateral à esquerda* em a se existir o limite em $\mathbb{R}$:

$$f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

Teorema 3.9. *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. A função f é diferenciável no ponto a sse f tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$.*

Dem. Exercício simples. □

Exemplo 3.10. A função módulo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 24, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.
De facto,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1 \quad \text{e}$$

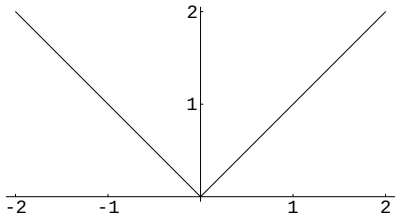

FIGURA 24. Gráfico da função módulo.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1\,.$$

Logo $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$, pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

Exemplo 3.11. $f(x) = \sqrt{x}$ em $a = 0$: neste caso a derivada à esquerda não está definida e à direita temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Como o limite não existe em $\mathbb{R}$, f não é diferenciável em 0. Verifique que também a função $\sqrt[3]{x}$ não é diferenciável em $a = 0$.

Exemplo 3.12. Função de Heaviside (Exemplo 2.64) em $x = 0$:

$$H'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0,$$

$$H'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

Logo, H não é diferenciável em 0. Notem que

$$H'_e(0) \neq \lim_{x\to 0^-} H'(x) = 0,$$

já que $H'(x) = 0$, $x \neq 0$.

Diferenciabilidade e Continuidade. Deve ser claro que uma função que possui derivada é "mais bem comportada" que uma função que é apenas contínua. Esta ideia é tornada precisa pelo:

Teorema 3.13. *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $a \in D$ então f é contínua em a.*

Dem. Considermos a função $\rho : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,,\ \forall\, x \in D \setminus \{a\}\ .$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto $a \in D$, sabemos que

$$\lim_{x\to a} \rho(x) = f'(a) \in \mathbb{R}\,.$$

Por outro lado,

$$\rho(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\rho(x)\,,\ \forall\, x \in D \setminus \{a\}\ .$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= f(a) + \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\rho(x)\\ &= f(a) + 0\cdot f'(a) = f(a)\,,\end{aligned}$$

pelo que f é contínua em $a \in D$. □

Nota 3.14. O Teorema 3.13 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ contínua em } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função módulo do Exemplo 3.10 é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Por outro lado, o Teorema 3.13 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ não é contínua em } a \Rightarrow f \text{ não é diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo 2.64) pelo que também não é diferenciável nesse ponto (note-se que nestes casos não é preciso calcular derivadas laterais como fizemos anteriormente).

Regras Algébricas de Derivação.

Teorema 3.15. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis num ponto $a \in D_f \cap D_g$. Seja ainda $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então, as funções $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g(a) \neq 0$) também são diferenciáveis no ponto a, sendo as suas derivadas dadas por:*

$$\begin{aligned}
(c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \\
(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) && \text{(Regra de Leibniz)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

Nota 3.16. As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema dizem-nos que a derivação é uma operação *linear*.

Dem. Provaremos apenas a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a+h) + f(a) \cdot g(a+h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(g(a+h) \cdot \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h \to 0} g(a+h) \right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)\,,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou naturalmente o facto de f e g serem diferenciáveis em a, bem como o facto de g ser também contínua em a (Teorema 3.13). □

Exemplo 3.17. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mostremos pelo método de indução que a função $f(x) = x^n$ possui derivada em todos os $x \in \mathbb{R}$ e que a sua função derivada é: $f'(x) = n\,x^{n-1}$:

- Para $n = 1$ temos $(x^1)' = x' = 1$ (é um caso particular do Exemplo 3.3).
- Supondo agora que $(x^n)' = nx^{n-1}$ para *algum* $n \in \mathbb{N}$, queremos provar que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Ora isso é verdade, já que:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^{n+1},$$

onde na segunda igualdade usámos a fórmula para a derivada do produto, e na terceira igualdade usámos a hipótese de indução.

Exemplo 3.18. É possível mostrar que, para qualquer expoente $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = x^\alpha$ possui derivada em todos os ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e que a sua função derivada é $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$. Voltaremos a este ponto após revermos a derivação da função composta.

Exemplo 3.19. As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico são definidas por

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{(cf. Exemplo 2.6)}.$$

Usando a derivada da função exponencial (Exemplo 3.6) e a fórmula do Teorema 3.15 para a derivada do quociente, temos que

$$\left(e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{(1)' \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}\,.$$

Usando também a linearidade da derivação, especificada pelas duas primeiras regras algébricas do Teorema 3.15, obtemos o seguinte resultado para as derivadas das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x\,; \tag{18}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x\,. \tag{19}$$

Exemplo 3.20. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tangente, i.e. definida por

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,,\ \forall\, x \in D = D_{\tan} \text{ (cf. Exemplo 2.5)}.$$

Usando a fórmula do Teorema 3.15 para a derivada do quociente, podemos calcular a derivada desta função tangente num qualquer ponto $x \in D_{\tan}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{(\cos)^2(x)} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\end{aligned}$$

onde se usaram as derivadas das funções seno e cosseno (Exemplo 3.4 e Exercício 3.5), bem como a relação fundamental (4) entre o seno e o cosseno.

Concluimos assim que

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\ \forall\, x \in D_{\tan}\,. \tag{20}$$

Note-se que, definindo a função secante como sendo $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, vem

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$$

Refira-se que a função cossecante é definida como sendo $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Exercício 3.21. Mostre que $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$.

Derivada de Funções Compostas.

Teorema 3.22. *Sejam $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in D_f$. Então, a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f\circ g}$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.$$

Dem. Vamos assumir que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $h \in]-\delta, \delta[$ com $(a+h) \in D_g$, tem-se $g(a+h) \neq g(a)$. Caso contrário, prova-se facilmente que $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$ (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Usando a definição de derivada, temos então que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(g(a+h)) - f(g(a))) \cdot (g(a+h) - g(a))}{h \cdot (g(a+h) - g(a))} \qquad (g(a+h) \neq g(a)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\,.
\end{aligned}$$

Como g é por hipótese diferenciável em a, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)\,.$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$, em que $h \to 0 \Rightarrow y \to g(a) = b$ (porque, pelo Teorema 3.13, g é contínua em a), e usando o Teorema 2.42 referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b)\,,$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de f ser por hipótese diferenciável no ponto $b = g(a)$.

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)\,.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.23. Estamos por fim em condições de mostrar o resultado enunciado no Exemplo 3.18. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, observe-se que

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = f \circ g(x), \qquad \text{para} \quad g(x) = \alpha \ln x \quad \text{e} \quad f(x) = e^x.$$

Como $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = \frac{\alpha}{x}$, vem então:

$$(x^\alpha)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Exemplo 3.24. Seja $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função positiva e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos a função $g^\alpha : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $(g^\alpha)(x) = g(x)^\alpha\,,\ \forall x \in D$. Observando que $g^\alpha = (f \circ g)$, com $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(y) = y^\alpha\,,\ \forall y \in \mathbb{R}^+$, podemos usar o Teorema 3.22 e o resultado do Exemplo 3.23 para concluir que, se g é diferenciável num ponto $a \in D$, então g^α também é diferenciável nesse ponto a e

$$\begin{aligned}
(g^\alpha)'(a) &= (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \\
&= \left(\alpha y^{\alpha-1}\right)|_{y=g(a)} \cdot g'(a) \\
&= \alpha\, g(a)^{\alpha-1} \cdot g'(a)\,.
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d}{dx} g^\alpha(x) = \alpha\, g(x)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} g(x).$$

Exemplo 3.25. Quando o expoente α do exemplo anterior é um número inteiro, não é necessário que a função g seja positiva para a validade do resultado. Na realidade, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e

qualquer função $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável num ponto $a \in D$, a função $g^n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é diferenciável nesse ponto $a \in D$ e

$$\frac{d}{dx} g^n(x) = n\, g(x)^{n-1} \frac{d}{dx} g(x)\,. \tag{21}$$

Por exemplo, temos que:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^5(x) = 5\, \operatorname{sen}^4(x) \cos(x).$$

Exercício 3.26. Mostre que $(a^x)' = (\ln a)a^x$ e que $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a, x > 0)$.

Nota 3.27. Na notação de Leibniz a regra da função composta pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \left.\frac{d}{dy} f(y)\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x).$$

Muitas vezes esta fórmula é expressa na seguinte forma abreviada: se $y = g(x)$ e $z = f(y)$, então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{22}$$

Chama-se a isto a *regra da cadeia* (verão em Cálculo Diferencial e Integral II uma generalização disto para funções que dependem de mais do que uma variável).

Na forma (22) existe um certo abuso de linguagem pois, por exemplo, z no lado esquerdo significa a função composta $f(g(x))$ enquanto que z no lado direito significa a função $f(y)$. No entanto, este tipo de expressão é útil como ilustramos de seguida.

Suponhamos que queremos calcular a derivada da função $\ln(x^2 + 1)$. Então tomamos $z = \ln y$ e $y = x^2 + 1$. Temos pois:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot (2x).$$

No final devemos substituir y por $x^2 + 1$, obtendo:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

que é o resultado correcto.

Derivada de Funções Inversas. Já vimos em que condições a continuidade de f implica a continuidade de f^{-1} (recorde-se o Teorema 2.61). Vamos agora ver o que podemos concluir sobre f^{-1} quando f é diferenciável.

Nota 3.28. Notem que, dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua injectiva e definida num intervalo, se f é crescente (resp. decrescente) então f^{-1} é crescente (resp. decrescente).

Teorema 3.29. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injectiva num intervalo I, e seja $f^{-1} : f(I) \to I$ a sua inversa. Se f é diferenciável num ponto $a \in I$ e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável no ponto $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Dem. Para a prova completa deste resultado podem consultar o Teorema 4.1.9 deste livro. Aqui, assumindo que f é diferenciável em todo o intervalo I, com $f'(x) \neq 0$, provaremos apenas que, se f^{-1} é diferenciável em $f(I)$, o valor da sua derivada é, de facto, o especificado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa e o Teorema 3.22, temos que

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) = x &\Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,,\ \forall\, x \in I\,.\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$, obtemos assim o resultado pretendido. □

Exemplo 3.30. Consideremos a função $f(x) = x^n$ e a sua inversa $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ que estão definidas em $\mathbb{R}$, para n ímpar, e em $[0, +\infty]$, para n par. Concluímos do Teorema 2.61, que a raíz-n é uma função contínua em todo o seu domínio. Por outro lado, temos que (Exercício 3.17):

$$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0, \text{ se } x \neq 0.$$

Segue-se do Teorema 3.29 que f^{-1} é diferenciável para $y \neq 0$ e que a sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

Note-se que este é um caso particular do Exemplo 3.23 (aqui para $\alpha = \frac{1}{n}$), deduzido com recurso a outros métodos.

Exemplo 3.31. Como a função sen é contínua, concluímos do Teorema 2.61 que a função arcsen é contínua. Como sen é diferenciável e

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq 0\,, \ \forall x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\,,$$

temos pelo Teorema 3.29 que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto $x \in \,]-1, 1[$. Para calcular a sua derivada observamos que

$$(\operatorname{arcsen} x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}\,, \ \forall x \in \,]-1, 1[\,.$$

Como

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \ \forall x \in [-1, 1] \quad \text{(exercício)},$$

concluímos que:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \ \forall x \in \,]-1, 1[\,. \tag{23}$$

Exercício 3.32. Mostre que arccos é diferenciável em $]-1, 1[$ com derivada dada por:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \ \forall x \in \,]-1, 1[\,. \tag{24}$$

Exemplo 3.33. Como a tangente é uma função contínua, a função arco tangente também é uma função contínua. Por outro lado, pela fórmula (20) para a derivada da tangente, temos que

$$f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0\,, \ \forall x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\,.$$

Podemos então aplicar o Teorema 3.29 para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$ e

$$(\arctan x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan x)\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(exercício)},$$

temos então que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{25}$$

Exemplo 3.34. A função exponencial é estritamente crescente, e portanto injectiva, em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, com contradomínio $\mathbb{R}^+$. A sua inversa é a função *logaritmo*. Como a função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$, a função logaritmo também é contínua. Como

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

temos pelo Teorema 3.29 que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^+$ e

$$f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow (\ln x)' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,, \ \forall x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Como a derivada da função exponencial f é a própria função exponencial f, temos então que

$$(\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,. \tag{26}$$

Obtivemos assim de novo, mas com outro argumento, a expressão da derivada de $\ln x$ (recorde-se que no Exemplo 3.7 usámos a definição de derivada).

Exercício 3.35. Considere a função seno hiperbólico definida no Exemplo 2.6. Mostre que a sua função inversa, argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é tal que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 3.36. Considere a restrição da função cosseno hiperbólico ao intervalo $[0,+\infty[$ (cf. Exemplo 2.6). Mostre que a sua função inversa, argcosh : $[1,+\infty[\to [0,+\infty[$, é tal que

$$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\,,\ \forall x \in [1,+\infty[\,, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in\,]1,+\infty[\,.$$

Para resumir, apresenta-se de seguida uma tabela com a derivada de algumas funções. Na coluna da direita, u representa uma função de x. Devem decorar a coluna da esquerda como se se tratasse da tabuada! Observe-se como a coluna da direta resulta da da esquerda em combinação com o Teorema da Derivada da Composta.

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'$
$(a^x)' = (\ln a) a^x$	$(a^u)' = (\ln a) a^u u'$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$	$(\operatorname{senh} u)' = u' \cdot \cosh u$
$(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$	$(\cosh u)' = u' \cdot \operatorname{senh} u$
$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u' \cdot \csc^2 u$
$(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Diferenciabilidade e Extremos Locais.

Definição 3.37. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f tem um *máximo local em c* (resp. um *mínimo local em c*) se existir um $\delta > 0$ tal que $f(x) \le f(c)\,,\ \forall\, x \in V_\delta(c) \cap D$ (resp. $f(x) \ge f(c)\,,\ \forall\, x \in V_\delta(c) \cap D$). Diremos que f tem um *extremo local em c* se f tiver um máximo ou mínimo locais em $c \in D$.

Teorema 3.38. *Seja f uma função definida num intervalo aberto $I =]a,b[$, tal que f tem um extremo local num ponto $c \in I$. Então, se f é diferenciável no ponto c, tem-se $f'(c) = 0$.*

Dem. Suponhamos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a, b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in V_\delta(c) =]c - \delta, c + \delta[$,

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0.$$

Usando este facto, temos então

$$f'_e(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0\,,$$

enquanto

$$f'_d(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0\,.$$

Como f é por hipótese diferenciável no ponto c, podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

□

Nota 3.39. O Teorema 3.38 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Rightarrow f'(c) = 0\,.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Por exemplo, a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na Figura 25, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, mas não tem um extremo local nesse ponto.

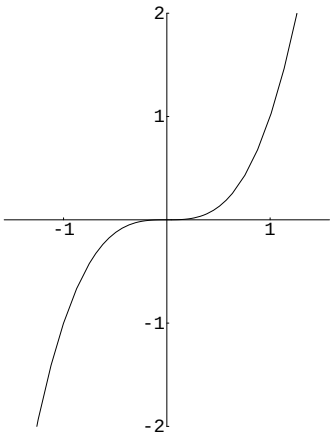

FIGURA 25. Gráfico da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

Um ponto c onde $f'(c) = 0$ chama-se *ponto crítico* de f. Assim, resumindo a nossa discussão, um extremo local é também um ponto crítico, mas podem existir pontos críticos que não são extremos locais.

Nota 3.40. Uma função pode ter um extremo local num ponto sem que seja diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a função módulo do Exemplo 3.10 tem um mínimo no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Exemplo 3.41. O Teorema 3.38 fornece-nos um método para calcular o máximo e o mínimo de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (recorde-se que, pelo Teorema Weierstrass, sabemos que existe um máximo e um mínimo), De facto, os pontos onde f pode ter um máximo ou mínimo são:

(1) Os pontos de $]a, b[$ onde f não é diferenciável;
(2) Os pontos críticos de f em $]a, b[$;

(3) Os extremos a e b.

Assim, apenas há que determinar estes pontos e depois calcular f em cada um destes pontos para verificar se são máximos ou mínimos de f.

Por exemplo, seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 - x$. Esta função tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 1$ para todo o $x \in [-1, 2]$. Assim, não existem pontos do primeiro tipo a considerar. Como $f'(x) = 0$ sse

$$3x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in \,]-1, 2[$, estes são os pontos do segundo tipo a considerar. Finalmente, temos os extremos do intervalo $x = -1$ e $x = 2$.

Temos então que calcular os valores de f em cada um destes pontos. Verifiquem que:

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Portanto, o máximo de f é 6 e ocorre em $x = 2$; o mínimo é $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ e ocorre em $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Teorema de Rolle.

Teorema 3.42. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in \,]a, b[\; :\; f'(c) = 0\,.$$

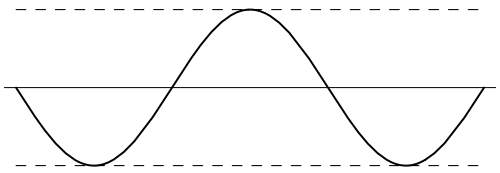

FIGURA 26. Versão geométrica do Teorema de Rolle.

Dem. Como f está nas condições do Teorema 2.77 - Weierstrass, sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a, b]$:

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f\,.$$

Se $M = m$, então f é uma função constante em $[a, b]$ pelo que

$$f'(c) = 0\,,\; \forall\, c \in \,]a, b[\,.$$

Se $M > m$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c \in \,]a, b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c. Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 3.38 para concluir que então $f'(c) = 0$. □

Corolário 3.43. *Entre dois zeros de uma função diferenciável existe sempre (pelo menos) um zero da sua derivada*

Dem. Basta aplicar o Teorema 3.42 a uma função f, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, tal que $f(a) = 0 = f(b)$. □

Corolário 3.44. *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

Dem. Redução ao absurdo + Corolário 3.43. Exercício. □

Exemplo 3.45. Se f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem 3 raízes, então f'' tem (pelo menos) um zero: se $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$, com $r_1 < r_2 < r_3$, então do Teorema de Rolle vem $f'(s_1) = f'(s_2) = 0$ para alguns $s_1 \in]r_1, r_2[$ e $s_2 \in]r_2, r_3[$. Aplicando agora o Teorema de Rolle a f' - que é também diferenciável em $\mathbb{R}$ - temos que f'' tem (pelo menos) um zero em $]s_1, s_2[$.

Exemplo 3.46. A equação $e^x = 3x$ tem exactamente 2 soluções: Vemos separadamente que:

(1) tem pelo menos 2 soluções. (Exercício, usando o Teorema de Bolzano).
(2) tem no máximo 2 soluções (pelo Teorema de Rolle).

Logo terá exactamente 2 soluções. Para ver (b): seja $f(x) = e^x - 3x$, diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = e^x - 3$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$ tem uma só solução. Segue-se do Teorema de Rolle que f tem no máximo dois zeros.

Geometricamente, o Teorema de Rolle diz que há um ponto $c \in]a, b[$ tal que a reta tangente é horizontal, ou seja, paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (já que assumimos $f(a) = f(b)$).

Teorema de Lagrange. O próximo teorema é um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial, a partir do qual se deduzem várias propriedades fundamentais.

Teorema 3.47. (Teorema de Lagrange) *Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Nota 3.48. O Teorema de Rolle é o caso particular do Teorema de Lagrange que se obtém quando $f(a) = f(b)$. Geometricamente, o Teorema de Lagrange diz que há um ponto $c \in]a, b[$ tal que a reta tangente é paralela à recta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

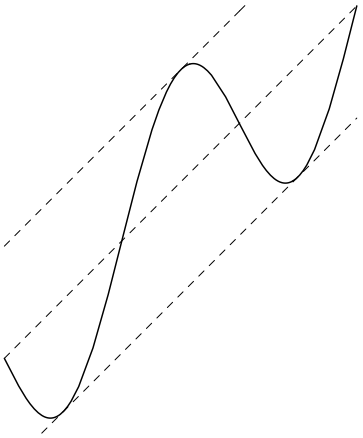

FIGURA 27. Versão geométrica do Teorema de Lagrange.

Nota 3.49. No caso em que $f = f(t)$ representa a posição de um objecto em movimento ao longo de uma reta entre os instantes de tempo $t = a$ e $t = b$, o Teorema de Lagrange afirma que há sempre um instante de tempo onde a velocidade instantânea é igual à velocidade média.

Dem. Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R}\,.$$

Temos assim que

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \Rightarrow f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a\,.$$

Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \lambda x\,,\ \forall\, x \in [a, b]\ .$$

Como

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a \Rightarrow g(b) = g(a)$$

e g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \qquad \square$$

Exemplo 3.50. Prove-se que $e^x > 1 + x$, $x > 0$.

Vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = e^x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^c.$$

Como $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$ e $x > 0$, logo

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^c > 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$

(Também é verdade que $e^x > 1 + x$, para $x < 0$. Reparem que $y = x + 1$ é a equação da recta tangente em $x = 0$.)

Exemplo 3.51. Prove-se que $x < \tan x$, $x \in]0, \pi/2[$.

De novo, vamos aplicar o T. Lagrange a $f(x) = \tan x$ no intervalo $[0, x]$. Temos então que existe $c \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Leftrightarrow \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1$$

já que $\cos^2 x < 1$ em $]0, \pi/2[$. Logo como $x > 0$, segue-se que $\tan x > x$.

O Teorema de Lagrange está na base de tudo o que veremos a seguir, já que nos permite estudar o comportamento de uma função a partir de propriedades (muitas vezes simples) da sua derivada. É fundamental em:

- estudo de monotonia e classificação de extremos a partir do sinal da derivada;
- cálculo de limites - levantamento de indeterminações (Regra de Cauchy);
- estudo de concavidades a partir do sinal da segunda derivada;
- aproximação de funções por polinómios (Polinómio de Taylor);

Exemplos de Aplicação do Teorema de Lagrange.

Corolário 3.52. *Se f é uma função nas condições do Teorema de Lagrange, então:*

(i) $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é constante em* $[a, b]$*;*
(ii) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente crescente em* $[a, b]$*;*
(iii) $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ *é estritamente decrescente em* $[a, b]$*.*

Dem. Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$. Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f'(c) = 0; \\ > 0\,, & \text{se } f'(c) > 0; \\ < 0\,, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\text{a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante}, & \text{se } f'(c) = 0; \\ \text{crescente}, & \text{se } f'(c) > 0; \\ \text{decrescente}, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

$\square$

Exemplo 3.53. Consideremos a função $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente no Exemplo 3.41. Vimos então que $f'(x) = 3x^2 - 1$ tem dois zeros (pontos críticos) em $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Temos que:

- $f'(x) > 0$ no intervalo $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo;
- $f'(x) < 0$ no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, logo a função é estritamente decrescente neste intervalo;
- $f'(x) > 0$ no intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2)$, logo a função é estritamente crescente neste intervalo.

Estes intervalos de monotonia mostram que $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local de f.

Corolário 3.54. *Seja f uma função nas condições do Teorema de Lagrange. Então, se existir o $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_d(a)$ e*

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)\,.$$

Analogamente, se existir o $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, também existirá a derivada lateral $f'_e(b)$ e

$$f'_e(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)\,.$$

Dem. Para cada $x \in]a,b[$, sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um $\xi = \xi(x) \in]a,x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x\to a+} \xi(x) = a^+\,,$$

podemos usar o Teorema 2.42, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi\to a^+} f'(\xi)\,. \qquad \square$$

Este último resultado é especialmente útil para verificar a diferenciabilidade nalguns pontos delicados de funções definidas por ramos, já que permite evitar em muitos casos o cálculo de derivadas à esquerda e à direita por definição.

Exemplo 3.55. Pretende-se determinar os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x|\, e^{-x^2/2} = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0; \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x < 0 \end{cases}$$

é diferenciável, bem como calcular a sua derivada nesses pontos.

Para $x > 0$ a função f é definida por $f(x) = x\,e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, pelo que é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(x\, e^{-x^2/2}\right)' = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (1 - x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+\,.$$

Para $x < 0$ a função f é definida por $f(x) = -x\, e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$, pelo que também é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = \left(-x\, e^{-x^2/2}\right)' = (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot ((-x)\, e^{-x^2/2}) = (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^-\,.$$

Para $x = 0$, podemos usar o Corolário 3.54 do Teorema de Lagrange para calcular as derivadas laterais de f:

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2)\, e^{-x^2/2} = 1 \quad \text{e}$$
$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1 + x^2)\, e^{-x^2/2} = -1\,.$$

Como $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_e(0)$, concluimos que f não é diferenciável no ponto zero.

Exemplo 3.56. Seja $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, $f(0) = \pi/2$.

Temos f contínua em 0 e $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$, $x > 0$, logo $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$ e assim $f'_d(0) = -1$. Para $x < 0$ temos $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ logo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ e assim $f'_e(0) = 1$. Conclui-se que f não é diferenciável em 0.

Teorema de Cauchy.

Teorema 3.57. (Teorema de Cauchy) *Sejam f e g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciáveis em $]a,b[$. Então, se $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[$, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

Nota 3.58. O Teorema de Lagrange é o caso particular do Teorema de Cauchy que se obtém quando $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = x\,,\ \forall\, x \in [a,b]$.

Dem. Sabemos pelo Teorema de Rolle que

$$g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[\Rightarrow g(a) \neq g(b)\,.$$

Seja então

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \mathbb{R}\,,$$

e consideremos a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)\,,\ \forall\, x \in [a,b]\ .$$

Temos então que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (verifiquem que de facto assim é), e φ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Podemos portanto aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,. \qquad \square$$

Regra de Cauchy ou de L'Hôpital.

Teorema 3.59. (Regra de Cauchy – primeira versão) *Sejam f e g funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto $]a,b[$. Suponhamos também que:*

(i) $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in]a,b[$;

(ii)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a^+} g(x)\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \textit{existe em } \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \ \textit{existe em } \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Nota 3.60. As versões análogas deste teorema para os limites

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } a = -\infty), \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } b = +\infty),$$

também são válidas e serão usadas na sequência.

Dem. Faremos apenas o caso em que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$. Podemos então prolongar f e g por continuidade ao ponto $a \in \mathbb{R}$, fazendo $f(a) = 0 = g(a)$, e usar o Teorema de Cauchy para mostrar que, para cada $x \in]a, b[$, existe um $\xi = \xi(x) \in]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Como $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$, podemos então concluir que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \qquad \square$$

Corolário 3.61. (Regra de Cauchy – segunda versão) *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ um ponto desse intevalo (ou $a = -\infty$ se $I =]-\infty, c[$, ou $a = +\infty$ se $I =]c, +\infty[$, com $c \in \mathbb{R}$), f e g funções definidas e diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$, com $g'(x) \neq 0\,,\ \forall\, x \in I \setminus \{a\}$. Suponhamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite da direita existir em $\overline{\mathbb{R}}$.

Temos assim que a Regra de Cauchy é um método para

resolver indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ em limites de funções diferenciáveis.

Exemplos de Aplicação da Regra de Cauchy.

Exemplo 3.62.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1\,.$$

Exemplo 3.63.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{27}$$

Exemplo 3.64.

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^+ \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\,.$$

Tem-se então que

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0\,. \tag{28}$$

Exemplo 3.65. O cálculo seguinte ilustra mais uma aplicação simples da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = \frac{+\infty}{1} = +\infty\,.$$

De facto, combinando este tipo de cálculo com o Método de Indução Matemática, obtém-se facilmente que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{29}$$

Efetuando a mudança de variável $y = e^x$, deduzimos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Exemplo 3.66. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\,.$$

Uma primeira tentativa poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{0}{0} = \cdots$$

Uma segunda abordagem, com melhores resultados, poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

De facto, e tendo em conta o resultado (29) do Exemplo 3.65, a melhor abordagem seria neste caso a seguinte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0\,,$$

onde se fez a mudança de variável $y = 1/x$, em que $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to +\infty$.

Exemplo 3.67. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^0 = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que

$$x^{\operatorname{sen} x} = e^{\ln(x^{\operatorname{sen} x})} = e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x}$$

(onde usámos a continuidade da função exponencial), podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{RC}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot\cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot\frac{0}{1} = 0\,.\end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\cdot \ln x} = e^0 = 1\,.$$

Nota 3.68. O método do exemplo anterior, que permitiu resolver uma indeterminação do tipo 0^0, também pode ser usado para resolver indeterminações do tipo ∞^0 e 1^∞.

Exemplo 3.69. Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = 1^\infty = \text{ indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer $x \in\,]-\pi/2, \pi/2[$,

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{\ln((\cos x)^{1/x^2})} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}}\,,$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} = -1\cdot\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Temos assim que

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

Derivadas de Ordem Superior à Primeira.

Definição 3.70. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no intervalo $I =]a, b[$. Se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável, a sua derivada $(f')'$ é designada por *segunda derivada de* f e representa-se por

$$f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f^{(2)}\,.$$

Mais geralmente, a *n-ésima derivada de* f define-se, por recorrência, como a derivada da $(n-1)$-ésima derivada de f, quando esta existir:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)\,.$$

Definição 3.71. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que f *é uma função de classe* $C^n(I)$, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que f é uma função de classe $C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.72. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ x^2\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \qquad (H \text{ representa a função de Heaviside – Exemplo 2.22.})$$

Esta função é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = 2x \cdot H(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2x\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada f' é por sua vez contínua em todo o $\mathbb{R}$, mas diferenciável apenas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0; \\ 2\,, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $f''_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$, não existe de facto segunda derivada de f no ponto zero.

Assim, temos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ mas $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.73. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para $x \neq 0$, com derivada dada por

$$f'(x) = (x^2 \cos(1/x))' = 2x \cdot \cos(1/x) + x^2 \cdot ((-1/x^2)(-\operatorname{sen}(1/x))) = 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,,\ \forall\, x \neq 0\,.$$

Pelo Princípio do Encaixe (Teorema 2.40) tal como já tinha sido feito no Exemplo 2.36, temos:

$$\lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = (\text{infinitésimo}) \times (\text{função limitada}) = 0\,.$$

Assim, vemos que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x) = \text{ não existe (cf. Exemplo 2.35)},$$

pelo que neste caso não é possível recorrer ao Corolário 3.54.

De facto, a função f é diferenciável no ponto zero com derivada $f'(0) = 0$, como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos(1/x) = 0\,.$$

Temos assim que f é uma função diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x)\,, & \text{se } x \neq 0; \\ 0\,, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, como o $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe, esta função f' não é contínua no ponto zero.

Temos então que $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mas $f' \notin C^0(\mathbb{R})$ pelo que $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.74. A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima derivada de f existe e é contínua em todo o $\mathbb{R}$:

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \text{ dada por } f^{(n)}(x) = e^x\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Segunda Derivada e Extremos Locais. A segunda derivada fornece-nos um teste simples para verificar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local:

Teorema 3.75. *Seja f uma função de classe $C^2(]a,b[)$ e $c \in]a,b[$ um ponto crítico de f. Então,*

(i) $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ *tem um mínimo local em c;*
(ii) $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ *tem um máximo local em c.*

Nota 3.76. Quando $f''(c) = 0$, e tendo apenas essa informação, nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico c.

Dem.
(i) Temos por hipótese que f'' é uma função contínua, com $f''(c) > 0$. Pelo Corolário 2.72, sabemos então que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f''(x) > 0 \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[.$$

Podemos agora usar o Corolário 3.52 do Teorema de Lagrange para concluir que

$$\text{a função } f' \text{ é estritamente crescente no intervalo }]c-\delta, c+\delta[.$$

Como por hipótese c é um ponto crítico de f, sabemos que $f'(c) = 0$ pelo que

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x \in]c, c+\delta[\ .$$

Usando novamente o Corolário 3.52 do Teorema de Lagrange, podemos finalmente concluir que

$$f \text{ é decrescente em }]c-\delta, \delta[\quad \text{e} \quad f \text{ é crescente em }]c, c+\delta[,$$

pelo que f tem, de facto, um mínimo local no ponto $c \in]a,b[$.
(ii) Exactamento análogo a (i). □

Exemplo 3.77. Voltemos ao exemplo da função $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x$ que já considerámos anteriormente. Vimos que os pontos críticos de f eram $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $f''(x) = 6x$, temos que:

$$f''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0, \quad f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0,$$

logo $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ é um máximo local e $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ é um mínimo local. Esta mesma informação tinha sido obtida anteriormente analizando o sinal da primeira derivada.

Concavidades e Inflexões.

Definição 3.78. Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $c \in]a,b[$. Diremos que f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c), ou que f tem a *concavidade voltada para cima* em c (resp. *concavidade voltada para baixo* em c), se o gráfico de f estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de c) por *cima* (resp. *baixo*) da *recta tangente* ao gráfico de f no ponto c. Ou seja, f é *convexa* em c (resp. *côncava* em c) se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[$$
$$(\text{resp. } f(x) - f(c) \leq f'(c)\cdot(x-c)\,, \text{ para todo o } x \in]c-\delta, c+\delta[).$$

Diremos que f tem um *ponto de inflexão* em c se existir $\delta > 0$ tal que, f é convexa num dos intervalos $]c-\delta, c[$ ou $]c, c+\delta[$ e côncava no outro.

Teorema 3.79. *Sejam $f \in C^2(]a,b[)$ e $c \in]a,b[$. Então:*

(i) $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ *é convexa em c;*
(ii) $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ *é côncava em c;*
(iii) $(f''(c) = 0$ *e* f'' *muda de sinal em $c) \Rightarrow f$ tem um ponto de inflexão em c.*

Dem. Consideremos a função auxiliar $g :]a, b[\to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c) \cdot (x - c)\,,\ \forall\, x \in]a, b[\ .$$

Tendo em conta a Definição 3.78, temos que estudar o sinal desta função auxiliar g numa vizinhança de $c \in]a, b[$.

Observemos primeiro que:

$$g(c) = 0\,;\quad g'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow g'(c) = 0\,;\quad g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(c) = f''(c)\,.$$

Tendo em conta o Teorema 3.75, podemos então concluir que:

(i) $(f''(c) > 0) \Rightarrow (g''(c) > 0) \Rightarrow (g$ tem um mínimo local em $c) \Rightarrow (g(x) \geq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow (f$ é convexa em $c)$;

(ii) $(f''(c) < 0) \Rightarrow (g''(c) < 0) \Rightarrow (g$ tem um máximo local em $c) \Rightarrow (g(x) \leq g(c) = 0$ numa vizinhança de $c) \Rightarrow (f$ é côncava em $c)$;

(iii) $(f''$ muda de sinal em $c) \Rightarrow (f$ muda de convexidade em $c)$.

□

Assímptotas ao Gráfico de Uma Função.

Definição 3.80. (Assímptotas Verticais) Sejam I um intervalo, $a \in I$ e f uma função definida em $I \setminus \{a\}$. Diremos que a recta vertical de equação $x = a$ é uma *assímptota vertical* ao gráfico de f se

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \quad \text{(qualquer uma das 4 combinações de sinais serve)}.$$

Definição 3.81. (Assímptotas Oblíquas) Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diremos que a recta de equação

$$y = m \cdot x + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}\,,$$

é uma *assímptota à esquerda* ao gráfico de f (resp. *assímptota à direita* ao gráfico de f) se

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$$
$$(\text{resp. } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0)\,.$$

No caso particular em que $m = 0$, diremos que o gráfico de f tem uma *assímptota horizontal à esquerda* (resp. *assímptota horizontal à direita*).

Teorema 3.82. *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$(a)\quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b)\quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$
$$(\text{resp. } (a)\quad m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (b)\quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - m \cdot x))\,.$$

Nesse caso, a assímptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação

$$y = m \cdot x + p\,.$$

Dem. Faremos apenas o caso da assímptota à esquerda, sendo o da assímptota à direita completamente análogo.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a recta de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$, é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. Então

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0\,,$$

pelo que a função auxiliar φ, definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p))\ ,\ \text{satisfaz } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx+p+\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(m+\frac{p}{x}+\frac{\varphi(x)}{x}\right)=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}(p+\varphi(x))=p\in\mathbb{R}\,,$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores $m,p\in\mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(m\cdot x+p))=0\,,$$

pelo que a recta de equação $y=mx+p$ é uma assímptota à esquerda ao gráfico de f. □

Exemplo de traçado do gráfico de uma função.

Exemplo 3.83. Pretende-se determinar intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=x\cdot e^{1/x}\,,\ \forall\, x\neq 0\,,$$

bem como esboçar o seu gráfico.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f'(x)=e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\,,\ \forall\, x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f'(x)=\begin{cases}>0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[;\\ =0\,, & \text{se } x=1;\\ <0\,, & \text{se } x\in\,]0,1[;\end{cases}$$

logo concluímos que

$$f \text{ é } \begin{cases}\text{crescente}\,, & \text{em }]-\infty,0[\text{ e em } \ ]1,+\infty[;\\ \\ \text{decrescente}\,, & \text{em }]0,1[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que f tem um mínimo local em $x=1$.

A derivada f' é também diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, com derivada $f'':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f''(x)=\frac{e^{1/x}}{x^3}\,,\ \forall\, x\neq 0\,.$$

Temos então que

$$f''(x)=\begin{cases}<0\,, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[;\\ >0\,, & \text{se } x\in\,]0,+\infty[;\end{cases}\Rightarrow f \text{ é } \begin{cases}\text{côncava}\,, & \text{em }]-\infty,0[;\\ \text{convexa}\,, & \text{em }]0,+\infty[.\end{cases}$$

Podemos também já concluir que f não tem pontos de inflexão (notem que f não está sequer definida no ponto zero).

O único ponto onde f pode ter uma assímptota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x\cdot e^{1/x}=0\cdot e^{-\infty}=0\,,$$

enquanto que

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\cdot e^{1/x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{1/x}=\frac{+\infty}{+\infty}\overset{\text{RC}}{=}\lim_{x\to0^+}e^{1/x}=+\infty\,.$$

O resultado deste segundo limite diz-nos que a recta vertical de equação $x=0$ é de facto uma assímptota vertical ao gráfico de f.

Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^0=1=m\in\mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x\cdot e^{1/x}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{y\to 0^{\pm}}\frac{e^{y}-1}{y}=1=p\in\mathbb{R}$$

(onde se fez a mudança de variável $y=1/x$, em que $x\to\pm\infty\Leftrightarrow y\to 0^{\pm}$), temos que a recta de equação $y=x+1$ é uma assímptota ao gráfico de f, tanto à direita como à esquerda.

A Figura 28 apresenta o esboço do gráfico de f.

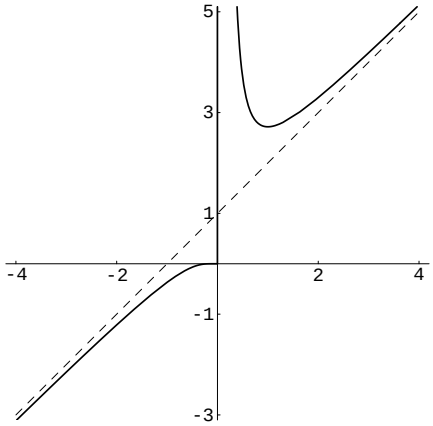

FIGURA 28. Esboço do gráfico da função f do Exemplo 3.83.

Polinómio de Taylor. Seja $f:D\to\mathbb{R}$ uma função real que é diferenciável em $x=a$. Recordemos que a recta tangente ao gráfico de f em a é dada pelo gráfico do polinómio do 1º grau:

$$p_{1,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Podemos ver este polinómio $p_{1,a}(x)$ do 1º grau como uma aproximação de 1ª ordem à nossa função f, em torno de $x=a$.

Suponhamos que, em vez de aproximar $f(x)$ por um polinómio do 1º grau, queríamos aproximar $f(x)$ por um polinómio do 2º grau, em torno de $x=a$. Vamos escrever este polinómio na forma:

$$p_{2,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2.$$

O seu gráfico é a parábola que melhor aproxima o gráfico de f em torno de $x=a$, como sugerido na figura abaixo.

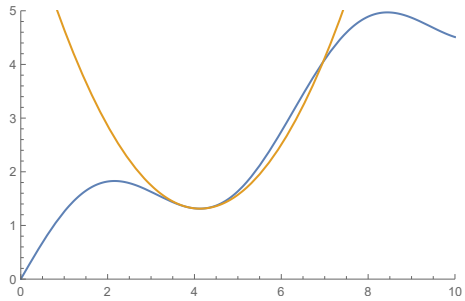

FIGURA 29. A função $f(x)=\operatorname{sen}(x)+x/2$ e a aproximação por um polinómio de grau 2 em torno de $x=4$.

Notem que se $p_{2,a}(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ em torno de a, então os valores $p_{2,a}(x)$ e de $f(x)$ em a, bem como os das suas derivadas, deverão coincidir:

$$f(a)=p_{2,a}(a)=a_0,$$

$$f'(a) = p'_{2,a}(a) = a_1,$$
$$f''(a) = p''_{2,a}(a) = 2a_2.$$

Assim, concluímos que o polinómio $p_{2,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ em 2ª ordem em torno de $x = a$ deverá ser dado por:

$$p_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

É claro que nada nos impede de tentar aproximar f, em torno de a, por um polinómio de grau n qualquer. Nesse caso, escrevendo o polinómio na forma:

$$p_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

e impondo que $f(x)$ e $p_{n,a}(x)$ tenham as mesmas derivadas até ordem n, obtemos:

$$\begin{aligned}
f(a) &= p_{n,a}(a) = a_0,\\
f'(a) &= p'_{n,a}(a) = a_1,\\
f''(a) &= p''_{n,a}(a) = 2a_2,\\
&\vdots\\
f^{(k)}(a) &= p^{(k)}_{n,a}(a) = k!a_k,\\
&\vdots\\
f^{(n)}(a) &= p^{(n)}_{n,a}(a) = n!a_n.
\end{aligned}$$

Concluímos que se f é diferenciável até ordem n, o polinómio $p_{n,a}(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ até ordem n, em torno de $x = a$, deverá ser dado por:

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{30}$$

Definição 3.84. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$. Chama-se **polinómio de Taylor de grau n de f em a**, ao polinómio de grau n dado por (30).

No caso das funções elementares este polinómio é muito simples de calcular.

Exemplo 3.85. Seja $f(x) = e^x$. Notem que, para qualquer natural k,

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Assim, temos que $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, logo o polinómio de Taylor de e^x de grau n, em $x = 0$, é:

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Exemplo 3.86. Seja $f(x) = \ln x$. Vamos calcular o polinómio de Taylor de grau n, em $x = 1$. Um cálculo simples fornece:

$$\begin{aligned}
\ln'(x) &= \frac{1}{x}, & \ln'(1) &= 1;\\
\ln''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \ln''(1) &= -1;\\
\ln'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \ln'''(1) &= 2;\\
&\vdots\\
\ln^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}, & \ln^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1}(k-1)!.
\end{aligned}$$

Logo o polinómio de Taylor de $\ln x$ de grau n, em $x=1$, é:

$$p_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}.$$

Exemplo 3.87. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Notem que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x),\ \operatorname{sen}''(x) = \cos'(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}''' x = -\operatorname{sen}' x = -\cos x,\ \operatorname{sen}''''(x) = -\cos' x = \operatorname{sen} x.$$

Tendo obtido $\operatorname{sen} x$ de novo, não precisamos de calcular mais derivadas: as derivadas repetem-se num ciclo de 4. Em particular, em $x=0$ obtemos:

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}^{(4)}(0) = \operatorname{sen}^{(8)}(0) = \cdots = 0,$$
$$\operatorname{sen}'(0) = \operatorname{sen}^{(5)}(0) = \operatorname{sen}^{(9)}(0) = \cdots = \cos(0) = 1,$$
$$\operatorname{sen}''(0) = \operatorname{sen}^{(6)}(0) = \operatorname{sen}^{(10)}(0) = \cdots = -\operatorname{sen}(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = \operatorname{sen}^{(7)}(0) = \operatorname{sen}^{(11)}(0) = \cdots = -\cos(0) = -1.$$

Portanto, o polinómio de Taylor de $\operatorname{sen} x$, em $x=0$, é:

$$p_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Exercício 3.88. Mostrem que o polinómio de Taylor de $\cos x$, em $x=0$, é:

$$p_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

O resultado seguinte torna precisa a ideia de que o polinómio de Taylor de grau n é uma boa aproximação da função até ordem n:

Teorema 3.89. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$ e seja $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau n em a. Então:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração. Notem que se separarmos o termo de grau n no polinómio de Taylor, obtemos:

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Basta pois mostrar que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Para isso, vamos aplicar a regra de Cauchy: Seja $h(x) := f(x) - p_{n-1,a}(x)$ o numerador e $g(x) := (x-a)^n$ o denominador. Deve ser claro que:

- $h^{(k)}(x)$ é contínua em a para $0 \le k \le n-1$;
- $h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0$, pois $f(x)$ e $p_{n-1,a}(x)$ têm as mesmas derivadas em a até ordem $n-1$;
- $g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$.

Podemos pois aplicar a regra de Cauchy $n-1$ vezes, obtendo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - p_{n-1,a}^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Observem que como $p_{n-1,a}(x)$ é um polinómio de grau $n-1$, a sua derivada de ordem $n-1$ é constante. De facto, $p_{n-1,a}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$, logo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a),$$

onde a última igualdade é simplesmente o facto de que $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$. □

Resto e Teorema de Taylor. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função e $p_{n,a}(x)$ o seu polinómio de Taylor de grau n. Definimos o **resto de ordem** n como sendo a função:

$$R_{n,a}(x) := f(x) - p_{n,a}(x).$$

Desta forma, podemos enunciar o Teorema 3.89 na forma equivalente:

Dada $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$, tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O resultado seguinte fornece uma expressão para o resto, que facilita a determinação de estimativas para o seu valor.

Teorema 3.90 (Teorema de Taylor com resto de Lagrange)**.** *Seja $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a sua derivada de ordem $n+1$ existe. Seja $a \in [b,c]$. Então:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde o resto é dado pela fórmula:

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \textit{para algum } \theta \textit{ entre } x \textit{ e } a.$$

Demonstração. Seja $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Repare-se que $R(a) = \cdots = R^{(n)}(a) = 0$ e $g(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$. Pelo Teorema de Cauchy, existe um ponto θ_1 entre a e x tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R(x) - R(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)}.$$

Aplicando novamente o teorema, existe θ_2 entre a e θ_1 (em particular entre a e x) tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R'(\theta_1)}{g'(\theta_1)} = \frac{R(\theta_1) - R(a)}{g(\theta_1) - g(a)} = \frac{R''(\theta_2)}{g''(\theta_2)}.$$

Procedendo indutivamente, concluímos que existe θ_{n+1} entre a e x tal que

$$\frac{R(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{g^{(n+1)}(\theta_{n+1})}.$$

Repare-se que

$$R^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = f^{(n+1)}(\theta_{n+1}), \quad g^{(n+1)}(\theta_{n+1}) = (n+1)!.$$

Logo

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

Exemplo 3.91. A expansão de Taylor com resto do seno, em $x = 0$, é dada por:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Atendendo a que

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)| \leq 1, \forall \theta,$$

podemos estimar facilmente o resto:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Se, por exemplo, queremos calcular o valor de $\operatorname{sen} 2$ com um erro inferior a $0.0001 = 10^{-4}$, então devemos escolher o natural n de forma que:

$$\frac{|2|^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Experimentando $n = 1, 2, \ldots$, vemos que $n = 5$ funciona. Assim,

$$\operatorname{sen} 2 \simeq 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} = 0,90929$$

com um erro inferior a $0,0001$.

Extremos locais de ordem superior. Podemos utilizar o polinómio de Taylor para obter um teste para extremos locais que aperfeiçoa o teste que tínhamos estudado anteriormente no Teorema 3.75:

Proposição 3.92. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de ordem n em $a \in D$ e suponha-se que:*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0$$

Então:

(i) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então f tem um máximo local em $x = a$;
(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então f tem um mínimo local em $x = a$;
(iii) Se n é ímpar então f não tem nem um máximo local nem um mínimo local em $x = a$.

Por outras palavras, o comportamento de $f(x)$ em $x = a$ é idêntico ao comportamento do polinómio $f^{(n)}(a)(x-a)^n$ em $x = a$:

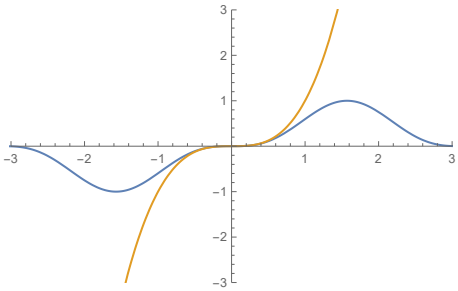

FIGURA 30. A função $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ e o polinómio x^3.

Demonstração. Como

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow p_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

o Teorema 3.89 diz-nos que:

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

Como $f^{(n)}(a) \neq 0$, concluímos que para x suficientemente perto de a:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \text{ tem o mesmo sinal que } \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

O resultado da proposição é uma consequência imediata deste facto. □

Exemplo 3.93. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = (x-1)^3 \ln x.$$

Em $x = 1$ as derivadas desta função são:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-1)^3}{x} + 3(x-1)^2 \ln x & f'(1) &= 0\\
f''(x) &= -\frac{(x-1)^3}{x^2} + 6\frac{(x-1)^2}{x} + 6(x-1)\ln x & f''(1) &= 0\\
f'''(x) &= 2\frac{(x-1)^3}{x^3} - 9\frac{(x-1)^2}{x^2} + 18\frac{x-1}{x} + 6\ln x & f'''(1) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= -6\frac{(x-1)^3}{x^4} + 24\frac{(x-1)^2}{x^3} - 36\frac{x-1}{x^2} + \frac{24}{x} & f^{(4)}(1) &= 24
\end{aligned}$$

Concluímos que f possui um mínimo local em $x = 1$.

Nota 3.94. Este teste não resolve completamente o problema de determinar os extremos locais, mesmo de funções que possuam derivadas de todas as ordens. Por exemplo, a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0, \end{cases}$$

possui derivadas de todas as ordens. Em $x = 0$, temos que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo o n, logo o teste não nos permite concluir nada. Na realidade, em $x = 0$ a função possui um mínimo pois $f(x) > 0$ se $x \neq 0$. Notem, ainda, que para esta função o polinómio de Taylor (de qualquer grau) em $x = 0$ é identicamente zero!

O número e é irracional. Uma outra aplicação curiosa da fórmula do resto é a seguinte:

Teorema 3.95. *O número **e** é irracional.*

Demonstração. Como $(e^x)' = e^x$ a expansão de Taylor com resto da exponencial em $x = 0$ é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Se $\theta \leq x$ então $e^\theta \leq e^x$, logo podemos estimar o resto, para $x > 0$, da seguinte forma:

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Como sabemos que $e = e^1 \leq 3$, concluímos que:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R.$$

onde o resto satisfaz $0 < R < 3/(n+1)!$.

Suponhamos então, por absurdo, que e era um número racional a/b e escolha-se um natural $n > b$ e maior do que 3. Então, obtemos:

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R.$$

Como todos os termos, com excepção possivelmente de $n!R$, são números naturais, concluímos que $n!R$ também tem de ser um número natural. Este número natural deverá satisfazer a desigualdade:

$$0 < n!R < \frac{n!3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1.$$

Isto é uma contradição, pois é claro que não há nenhum número natural entre 0 e 1. □

Recursos para auxílio ao estudo. Aconselha-se a utilização desta aplicação em Geogebra para acompanhar o estudo da secção sobre o Polinómio de Taylor. Na aplicação pode escolher-se: a função $f(x)$ a aproximar; o ponto a; n - a ordem do polinómio de Taylor. Recomenda-se a escolha de várias funções e a escolha de n's cada vez maiores; observe o que acontece com o gráfico do polinómio de Taylor (a vermelho), quando comparado com o gráfico da função $f(x)$ (a azul).

4. Primitivação

Conteúdo

I. Definição de primitiva. Aplicações. 73
II. Primitivas Imediatas. 75
III. Primitivas Quase-Imediatas. 76
IV. Primitivação por Partes. 78
V. Primitivas de Funções Racionais. 79
VI. Primitivação por Substituição. 85
VII. Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos. 87
VIII. Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos. 89
IX. Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis. 90

I. Definição de primitiva. Aplicações. Primitivação é a operação "inversa" da derivação. Mais precisamente:

Uma **primitiva** de uma função f é uma função F com derivada $F' = f$, i.e., tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\,.$$

Escreveremos então que

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

o que significa precisamente " F é uma função com derivada $F' = f$ ".

Também se pode escrever $F(x) = P(f)(x)$, com o mesmo significado. Notem que

$$F' = f \implies (F + c)' = f \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

pelo que, se F é uma primitiva de f, então $F + c$ também é uma primitiva de f. Vejamos agora que, para funções definidas em intervalos, a família de todas as primitivas é necessariamente desta forma:

Proposição 4.1

Se $F, G :]a, b[\to \mathbb{R}$ são duas primitivas de uma dada função $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, então $F - G$ é constante.

Demonstração. Pela definição de primitiva,

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in]a, b[.$$

Pelo Corolário 3.52-(i), concluímos que $F - G$ é constante. □

A $F(x) = \int f(x)dx + c$ chamamos a *forma geral das primitivas* de f no intervalo I, ou seja, a família de todas as primitivas de f em I.

Poderá ser dada uma condição adicional que determine a constante c, por exemplo da forma $F(x_0) = a$. Se uma função estiver definida numa união de intervalos abertos disjuntos, a proposição anterior permite concluir que todas as primitivas diferem por uma constante em cada um dos intervalos, podendo essa constante mudar de intervalo para intervalo.

Exemplo 4.2:

(1) $\int 1dx = P(1) = x$. A forma geral das primitivas (em $\mathbb{R}$) é $F(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ constante. Se quisermos a (única) primitiva F tal que $F(2) = 3$, então

$$F(2) = 2 + c = 3 \implies c = 1,$$

logo $F(x) = x + 1$.

(2) Determinar F tal que $F'(x) = 2x$ e $F(0) = 3$: $\int (2x)dx = x^2$, logo $F(x) = x^2 + 3$.

(3) Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x^2$. A família de todas as primitivas de f é dada por

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1, & x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2, & x < 0 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3

Nem todas as funções são primitiváveis. Recorde-se a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se H fosse primitivável, i.e., se existisse F diferenciável tal que $F'(x) = H(x)$, então

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1, & x > 0 \\ c_2, & x < 0. \end{cases}$$

No entanto, desta expressão concluiríamos que F não seria diferenciável em 0 (neste caso, $F'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$ e $F'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$). **Veremos mais à frente que todas as funções *contínuas* são primitiváveis.**

Em geral, a menos que seja pedido explicitamente, vamos determinar uma primitiva qualquer. O objectivo desta secção é aprender a encontrar primitivas de algumas funções elementares, quando essas primitivas podem também ser expressas como funções elementares. Aqui, o termo **função elementar** significa uma função que pode ser expressa por adição, multiplicação, divisão e composição de funções polinomiais, potências, funções trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas, e funções exponencial e logaritmo.

No próximo capítulo (integração), veremos que o cálculo de primitivas tem aplicações ao cálculo de áreas de figuras planas. Para já, damos 3 aplicações mais imediatas.

Aplicação 1. Seja $x(t)$ uma função que representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo t ao longo de uma reta (pensem por exemplo num automóvel ao longo de uma longa reta na autoestrada) e suponhamos conhecer a expressão da velocidade através de uma função $f(t)$ (ou seja, conseguimos obter a informação do velocímetro do automóvel). Será que conseguimos reconstruir o movimento do objeto? A função posição irá satisfazer a relação:

$$x'(t) = f(t),$$

ou seja, a função posição é uma primitiva da função velocidade. Obviamente que conhecer a velocidade do objeto **não determina de forma única** a sua posição: é necessário saber onde o objeto estava num dado instante (ou seja, dar uma condição do tipo $x(t_0) = x_0$)! Este é, por outras palavras, o conteúdo do que acabámos de estudar: as primitivas em intervalos são únicas a menos de uma constante aditiva.

Aplicação 2. Seja $x(t)$, de novo, uma função que representa a posição de um objecto em movimento retilíneo no instante de tempo t e recordemos a segunda lei de Newton: massa vezes aceleração é igual a força. Se tivermos uma força $f(t)$ que apenas depende do tempo, nesse caso a relação é:

$$mx''(t) = f(t).$$

Assim, dada uma força f específica, para determinarmos o movimento deveremos primitivar duas vezes. No caso concreto de um objeto atirado verticalmente e não contando com a resistência do ar, temos $f(t) = -mg$, onde g é a aceleração da gravidade, ou seja, uma constante. Então

$$x''(t) = -g \implies x'(t) = -gt + b \implies x(t) = -gt^2/2 + bt + c,$$

para certas constantes b, c. Observe-se que estas constantes determinam-se através da posição e velocidades iniciais, ou seja, prescrevendo $x(0)$ e $x'(0)$. Vimos assim, noutro contexto, uma aplicação da operação de primitivação: dada uma força $f(t)$, para determinar a posição $x(t)$ terei de primitivar duas vezes a função f.

II. Primitivas Imediatas. As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} &\implies \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \forall \alpha \neq -1\\
\frac{d}{dx}(e^x) = e^x &\implies \int e^x\,dx = e^x\\
\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x &\implies \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a},\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\\
\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} &\implies \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|,\ \forall x \neq 0\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x &\implies \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x\\
\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x &\implies \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x &\implies \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\\
\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x &\implies \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\\
\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x\\
\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} &\implies \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x\\
\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\implies \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x\\
\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} &\implies \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x
\end{aligned}$$

Além disso, das regras de derivação

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx},\ \text{para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

vem que

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx \quad \text{e} \quad \int cf\,dx = c\int f\,dx\,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.1. A última propriedade não é válida se c não for uma constante!

Exemplo 4.4

(1) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+2)x\,dx = \int x^{3/2}dx + \int 2x\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x^2.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2}.$

(4) $\displaystyle\int (x+1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^4.$

(5) $\displaystyle\int (1-x)^3\,dx = -\frac{1}{4}(1-x)^4.$

(6) $\displaystyle\int (2e^x - \operatorname{sen} x)\,dx = 2e^x + \cos x.$

(7) $\displaystyle\int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\arctan x.$

III. Primitivas Quase-Imediatas. A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\cdot u'(x) \text{ diz-nos que } \int F'(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x)).$$

Assim, se F for a primitiva de uma função f, ou seja, se $F(x) = \int f(x)\,dx$, então ficamos com a fórmula:

$$\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = F(u(x)). \tag{31}$$

Esta fórmula, combinada com o que foi visto anteriormente para primitivas imediatas, conduz por fim à seguinte tabela de primitivas.

Tabela de primitivas imediatas e quase-imediatas

$\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$	$\displaystyle\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$
$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$	$\displaystyle\int e^{u(x)}u'(x)\,dx = e^{u(x)}$
$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\displaystyle\int a^{u(x)}u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert\,,\ \forall x \neq 0$	$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\lvert u(x)\rvert$
$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$	$\displaystyle\int \operatorname{senh}(u(x))u'(x)\,dx = \cosh(u(x))$
$\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	$\displaystyle\int \cosh(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{senh}(u(x))$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \cos(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{sen}(u(x))$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \qquad \int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\,dx = -\cos(u(x))$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x \qquad \int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\,dx = \tan(u(x))$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x \qquad \int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\,dx = -\cot(u(x))$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x \qquad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \qquad \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$$

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\ln|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \ln|\operatorname{sen} x|$$

Exemplo 4.5

Calculemos uma primitiva de $f = 2xe^{x^2}$: como

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int (x^2)'e^{x^2}dx,$$

podemos aplicar a regra de primitivação da exponencial com $u = x^2$:

$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}.$$

Exemplo 4.6

Calculemos uma primitiva de $f = \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))$: como

$$\cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))'\cos(\operatorname{sen}(x)) = u'\cos u, \text{ com } u = \operatorname{sen}(x),$$

podemos aplicar a regra de primitivação do cosseno:

$$\int \cos(x)\cos(\operatorname{sen}(x))dx = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)).$$

Por vezes, é preciso ajustar uma constante a multiplicar para podermos aplicar as regras de primitivação.

Exemplo 4.7

Calculemos uma primitiva de $f = e^{2x}$: como a derivada do expoente é 2, precisamos de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 2:

$$\int e^{2x}dx = \int \frac{1}{2}\times 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Exemplo 4.8

Calculemos uma primitiva de $f = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$. A derivada do argumento do seno é $3x^2$, que é *quase* o que está a multiplicar do lado de fora. Precisamos só de acertar as constantes, introduzindo "à mão" o factor 3:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \int \frac{1}{3} \times 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = \frac{1}{3}\cos(x^3).$$

Exemplo 4.9

Calculemos uma primitiva de $f = 1/(4+x^2)$. A expressão é semelhante à da fórmula da primitivação do arco-tangente: em vez de 4, deveria estar 1. Vamos então colocar o 4 em evidência:

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+x^2/4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx.$$

A derivada do que está dentro do quadrado é $1/2$, pelo que precisamos de acertar constantes:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{4}\int 2\frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x/2)'}{1+(x/2)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(x/2).$$

Nota 4.2. Para o cálculo de primitivas, é importante relembrar algumas identidades de trigonometria:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$
$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

IV. Primitivação por Partes. A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v' \iff u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v\,,$$

dá origem à:

Fórmula de primitivação por partes:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.

Exemplo 4.10:

(1) $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$, fazendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x$.

(2) Para calcular $\int x^2\operatorname{sen}(2x)\,dx$, escolhemos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = \operatorname{sen}(2x)$, e depois fazemos outra primitivação por partes (exercício).

(3) $\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$, fazendo $u(x) = \ln x$ e $v'(x) = x^2$.

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x)\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$

Quando $\ln x$ ou $\arctan x$ figuram num produto, é frequentemente útil escolhê-los como $u(x)$, isto é, como termos a derivar (mas isto não é uma regra para aplicar às cegas, atenção!).

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\,dx = \int 1 \cdot f(x)\,dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtém-se então que

$$\int f(x)\,dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\,dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \cdot \ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ e reencontrar de novo $\int f$ com outros coeficientes, resolvendo-se depois a equação obtida em ordem à incógnita $\int f$. Por exemplo, para $x > 0$,

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\,dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Note-se que reencontrámos do lado direito a nossa incógnita $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ com coeficiente -1, pelo que

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}\,.$$

Exemplo 4.11:

(1) $\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t \cos t\,dt = e^t \operatorname{sen} t - \left(e^t \cos t + \int e^t \operatorname{sen} t\,dt\right)$, e portanto

$$\int e^t \operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{2}e^t(\operatorname{sen} t - \cos t). \tag{32}$$

(2) $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. [Exercício, por partes]

(3) $\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$. [Exercício, por partes]

V. Primitivas de Funções Racionais. É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com p e q polinómios, em termos de funções elementares (cf. livro de Spivak, que consta na bibliografia da cadeira). Aqui mostramos como proceder num caso particular, o que nos guiará para perceber o que acontece no caso geral.

Caso particular. Primitiva de

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio de grau 3 da forma $q(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. **Note-se que o grau do denominador é maior que o do numerador.**

A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza do polinómio em denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raízes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,,\ \text{com } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + C\ln|x-\gamma|\,.$$

Exemplo 4.12

Decompondo em fracções simples,

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\end{aligned}$$

Logo,

$$x+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2),\ \forall x$$

Para determinar A,B e C, temos essencialmente duas técnicas: *comparar coeficientes* (note-se que temos uma igualdade entre dois polinómios) ou *dar valores a* x. Usemos a segunda técnica: fazendo $x=1$, $x=2$, $x=3$ temos $A=1, B=-3$, $C=2$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3}\right) dx\\ &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-3}\,dx\\ &= \ln|x-1| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x-3|.\end{aligned}$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,,\ \text{com } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Exemplo 4.13

Decompondo,

$$\begin{aligned}\frac{3}{(x+1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\\ &= \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}\end{aligned}$$

Logo,

$$3 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1),\ \forall x,$$

e fazendo, por exemplo, $x=-1 \Rightarrow A=1/3$, $x=2 \Rightarrow C=1$ e vendo o coeficiente de x^2 temos $0=A+B \Rightarrow B=-1/3$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{(x+1)(x-2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1/3}{x+1}-\frac{1/3}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}.\end{aligned}$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x)=(x-\alpha)^3\,,\ \text{com } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f=p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x)=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{(x-\alpha)^3}\,,\ \text{com } A,B,C\in\mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha|-\frac{B}{x-\alpha}-\frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x)=(x-\alpha)((x-a)^2+b^2)\,,\ \text{com } \alpha,a,b\in\mathbb{R}\,,\ b\neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f=p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x)=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,,\ \text{com } A,B,C\in\mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-\alpha|+\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

Exemplo 4.14

Mostremos que $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+4)}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan(x/2)$

Decomposição:

$$\frac{x+2}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x(x^2+4)}$$

Logo,

$$x+2=A(x^2+4)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+4A$$

e, comparando coeficientes, vem $A=1/2, C=1$ e $A+B=0\Rightarrow B=-1/2$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x(x^2+4)} &= \int \frac{1/2}{x}\,dx+\int \frac{-x/2+1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx+\int \frac{1}{4+x^2}\,dx,\end{aligned}$$

donde o resultado segue.

Caso Geral. O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

Teorema 4.15: Decomposição em Fracções Parciais

Seja $n < m$, e considere-se a função racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}.$$

Então o denominador pode ser factorizado na forma:

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} \cdots (x-\alpha_k)^{r_k}([x-a_1]^2 + b_1^2)^{s_1} \cdots ([x-a_l]^2 + b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = &\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{a_{k,1}}{(x-\alpha_k)} + \cdots + \frac{a_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right] + \\ &+ \left[\frac{A_{1,1} + B_{1,1}x}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,s_1} + B_{1,s_1}x}{((x-a_1)^2 + b_1^2)^{s_1}}\right] + \cdots + \\ &+ \left[\frac{A_{l,1} + B_{l,1}x}{(x-a_l)^2 + b_l^2} + \cdots + \frac{A_{l,s_l} + B_{l,s_l}x}{((x-a_l)^2 + b_l^2)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Notem que a factorização de $q(x)$ dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $r_1, \ldots, r_k$;
- $a_1 \pm i\, b_1, \ldots, a_l \pm i\, b_l$ são as raízes complexas de $q(x)$ com multiplicidade, respectivamente, $s_1, \ldots, s_l$;

Não demonstraremos este teorema, mas sublinhamos o facto de ser importante o grau do polinómio em denominador ser estritamente maior que o grau do numerador (veja-se mais à frente o que fazer se isto não acontecer). **Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos**, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^r}\, dx = \begin{cases} a\ln(x-\alpha)\,, & \text{se } r = 1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}\,, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A+Bx}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx = \frac{B}{2}\int \frac{2(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx + (A+aB)\int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}\, dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição $t = (x-a)^2 + b^2$ (ver a secção VI à frente). A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

Exercício 4.3. Usando primitivação por partes, mostre que, para $s > 1$,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^s}\, dx = \frac{1}{2s-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{s-1}}\, dx.$$

Exemplo 4.16

Calculemos uma primitiva de $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-1}\, dx = \int \frac{4}{(x-1)(x+1)}\, dx$.

Escrevemos

$$\frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

logo $4 = A(x+1) + B(x-1)$. Fazendo $x = 1$ temos $4 = 2A \Rightarrow A = 2$ e fazendo $x = -1$, temos $4 = -2B$, logo $B = -2$. Temos assim

$$\int \frac{4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Exemplo 4.17

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{x-2+2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}\,dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}.$$

Exemplo 4.18

Calculemos a primitiva de

$$\frac{4x}{x^4-1}.$$

Em primeiro lugar, devemos factorizar o denominador:

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Decompondo em fracções simples,

$$\frac{4x}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Logo,

$$4x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$$

e, fazendo $x=1 \Rightarrow A=1$, $x=-1 \Rightarrow B=1$ $x=0 \Rightarrow 0 = A-B-D \Rightarrow D=0$, vendo o coeficiente de x^3, $0 = A+B+C \Rightarrow C=-2$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^4-1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x^2+1|.\end{aligned}$$

E se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador? Ao primitivar uma função racional $p(x)/q(x)$ **no caso de o grau de** p **ser maior ou igual ao de** q, é possível reduzir aos casos anteriores através de manipulações algébricas, como a **divisão de polinómios.** Veja-se desde já um exemplo simples:

Exemplo 4.19

Considere-se o cálculo de $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. Como o grau dos polinómios em numerador e denominador são iguais, deveremos primeiramente manipular a fração:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = x - \arctan x.$$

Para ver o caso geral, comecemos por recordar que, dados dois números naturais D (o dividendo) e d (o divisor), podemos escrever

$$D = dQ + R, \quad Q, R \in \mathbb{N},\ R < d, \quad Q \text{ quociente},\ R \text{ resto}.$$

Esta decomposição implica

$$\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}, \quad R < d.$$

Para obtermos Q e R, aplicamos o algoritmo clássico de divisão. **O mesmo pode ser feito para polinómios**:

Dados dois polinómios $p(x)$ e $q(x)$, se p tiver grau igual ou superior a q, podemos escrever

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}, \quad \text{com grau de } R(x) < \text{grau de } q(x).$$

Assim, teremos

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx.$$

A primitiva $\int Q(x)\,dx$ é simples de calcular (Q é um polinómio) e para calcular $\int \frac{R(x)}{q(x)}\,dx$, como o grau de q já é maior que o de R, podemos aplicar a decomposição vista anteriormente.

Exemplo 4.20

Pretendemos calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1}\,dx$. Queremos para isso dividir $x^3 - 3x + 1$ por $x^2 - 1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & \big|\, x^2 - 1 \end{array}$$

Em x^3, quantas vezes cabe x^2? Cabe x vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & \big|\, x^2 - 1 \\ -x^2 \times x & + & 0 & + & 1 \times x & & & \hline \\ & & & & & & & x \end{array}$$

Agora faço a doma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 0 & - & 3x & + & 1 & \big|\, x^2 - 1 \\ \hline -x^3 & + & 0 & + & x & & & \hline \\ 0 & + & 0 & - & 2x & + & 1 & x \end{array}$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{-2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{-2x + 1}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-2x + 1}{(x-1)(x+1)}\,dx = (\ldots)$$

(termine agora as contas e determine a primitiva).

Exemplo 4.21

Pretendemos calcular $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x - 1}\,dx$. Queremos dividir $x^3 + 2x^2 - 4$ por $x - 1$. Escrevemos então

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & \big|\, x - 1 \end{array}$$

Em x^3, quantas vezes cabe x? Cabe x^2 vezes, pelo que escrevo

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & \big|\, x - 1 \\ -x^3 & + & x & & & & & \hline \\ & & & & & & & x^2 \end{array}$$

Agora faço a soma no lado esquerdo:

$$\begin{array}{cccccccc} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & \big|\, x - 1 \\ \hline -x^3 & + & x^2 & & & & & \hline \\ 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & x^2 \end{array}$$

Como o resto tem grau maior que o divisor, o algoritmo continua. Em $3x^2$, quantas vezes cabe x? Cabe $3x$ vezes:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\ & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7} & & 0 & + & 3x & - & 4 & \end{array}$$

Como o resto tem grau igual ao do divisor, o algoritmo continua. Em $3x$, quantas vezes cabe x? Cabe 3 vezes:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l} x^3 & + & 2x^2 & + & 0 & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} -x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+3x+3 \\ \cline{1-7} 0 & + & 3x^2 & + & 0 & - & 4 & \\ & & -3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{1-7} & & 0 & + & 3x & - & 4 & \\ & & & & -3x & + & 3 & \\ \cline{3-7} & & & & 0 & - & 1 & \end{array}$$

Como o resto tem grau menor que o divisor, o algoritmo pára e obtemos

$$\frac{x^3+2x^2-4}{x-1} = x^2+3x+3+\frac{-1}{x-1}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^3+2x^2-4}{x-1}\,dx = \int (x^2+3x+3)\,dx + \int \frac{-1}{x-1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x-\ln|x-1|.$$

VI. Primitivação por Substituição. A fórmula para a derivada da função composta, já referida nestes apontamentos em (31), dá origem à:

Fórmula de primitivação por substituição:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x=u(t)$ na função e multiplicar por $u'(t)=\frac{dx}{dt}$, ou seja 'substituir' $dx = u'(t)\,dt$ [5] em $\int f(x)\,dx$;
(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável t;
(iii) fazer a substituição inversa $t=u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Estamos obviamente a assumir que $u(t)$ admite inversa.

Exemplo 4.22

Calculemos a primitiva de $x\sqrt[3]{x+2}$, fazendo $t=\sqrt[3]{x+2}$, ou seja, $x=t^3-2=u(t)$. Assim, $u'(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2$ e portanto (formalmente) $dx=3t^2dx$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx = \int u(t)\sqrt[3]{u(t)+2}\cdot u'(t)dt = \int (t^3-2)t\times 3t^2dt$$

[5] Uma mnemónica para decorar isto é a seguinte: fazendo $x=u(t)$, vem $\frac{dx}{dt}=u'(t)$, donde (formalmente) $dx=u'(t)dt$.

$$= \int 3t^6 - 6t^3 dt = \frac{3}{7}t^7 - \frac{6}{4}t^4.$$

Agora temos de ter o cuidado de regressar à variável original x. Como $t = \sqrt[3]{x+2}$, obtemos então

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx = \int 3t^6 - 6t^3\, dt = \frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{2}t^4 = \frac{3}{7}(\sqrt[3]{x+2})^7 - \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+2})^3.$$

Exemplo 4.23

Calculemos a primitiva de $\operatorname{sen}\sqrt{x}$, através da substituição $x = u(t) = t^2$ $(t > 0)$, assim $u'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$, o que implica que $dx = 2tdt$:

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx = \int \operatorname{sen}(\sqrt{u(t)})u'(t)dt = \int 2t\operatorname{sen} t dt.$$

Esta primitiva parece mais fácil do que a anterior, pelo que continuamos o cálculo. Esta nova primitiva não é imediata, mas facilmente se resolve com uma primitivação por partes:

$$\int 2t\operatorname{sen} t dt = -2t\cos t - \int -2\cos t dt = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t.$$

Como $t = \sqrt{x}$, obtemos então

$$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}dx = -2t\cos t + 2\operatorname{sen} t = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\operatorname{sen}\sqrt{x}.$$

Exemplo 4.24

Calculemos a primitiva de $e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}$. Vamos escrever $x = \operatorname{sen} t = u(t)$, para $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ (porque $1 - x^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$). Assim, $u'(t) = \cos t$ e $dx = \cos t dt$. Aplicando a regra de primitivação por substituição,

$$\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx = \int e^{\arccos(\sqrt{1-u^2(t)})}u'(t)\, dt = \int (e^t \cos t)\, dt.$$

Esta já foi calculada na secção anterior (cf. (32)):

$$\int e^t \cos t dt = \frac{e^t\cos t + e^t \operatorname{sen} t}{2}.$$

Regressando à variável original x, como $t = \operatorname{arcsen} x$, obtemos então

$$\int e^{\arccos(\sqrt{1-x^2})}dx = \frac{e^t\cos t + e^t\operatorname{sen} t}{2} = \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\cos(\operatorname{arcsen} x) + e^{\operatorname{arcsen} x}\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{2}$$
$$= \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\left(\sqrt{1-x^2} + x\right)}{2}.$$

Mais exemplos de primitivação por substituição:

Exemplo 4.25

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\, dx$

Fazendo $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$, temos $\frac{dx}{dy} = 2y$ $(dx = 2ydy)$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+x}\, dx = \int \frac{y+3}{y+y^2}\, 2y\, dy = 2\int \frac{y+3}{1+y}\, dy = 2y + 4\ln|y+1| = 2\sqrt{x} + 4\ln|\sqrt{x}+1|$$

Em geral, para funções racionais de $\sqrt[p]{x}$, faz-se: $y = \sqrt[p]{x} \Leftrightarrow x = y^p$.

(2) $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx$

Fazendo $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$, temos $dx = \frac{1}{y}dy$ e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \int \frac{2y^2}{y^2+2y+2}\,\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy$$

Notando que y^2+2y+2 não tem raizes, pode ser escrito como $(y+1)^2+1$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{2y}{y^2+2y+2}\,dy &= \int \frac{2(y+1)}{(y+1)^2+1}\,dy - \int \frac{2}{(y+1)^2+1}\,dy \\ &= \ln((y+1)^2+1) - 2\arctan(y+1)\end{aligned}$$

e

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \ln((e^x+1)^2+1) - 2\arctan(e^x+1).$$

Em geral, para funções racionais de e^x, faz-se: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy$, com $y = \ln x$. Como (ver exemplos de funções racionais)

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$$

temos

$$\int \frac{1}{x(1-\ln^2 x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}\right|.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x(4+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{y(4+y^2)}\,dy$, com $y = \ln x$.

(5) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\tan x + 1}\,dx$

Fazendo $y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$ (assumindo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$), temos $dx = \frac{1}{1+y^2}dy$ e

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = \int \frac{y}{(y+1)(1+y^2)}\,dy$$

Primitivando a função racional obtida (Exercício!) temos

$$\int \frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\tan x+1| + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x).$$

VII. Primitivação de Funções Polinomiais de Senos e Cossenos. Para calcular primitivas de funções polinomiais de senos e cossenos:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\ dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

Caso 1. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \text{ ou } \int \cos^n x \, dx,$$

onde $n = 2k$ é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou cosseno, que eventualmente sabemos como primitivar.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx \\ &= \int \frac{1}{4}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))\, dx\end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

Caso 2. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \text{ ou } \int \cos^n x \, dx,$$

onde $n = 2k+1$ é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \, dx &= \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx \\ &= \int (1-u^2)^k \, du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 3. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx,$$

onde n ou m são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int u^4 (1-u^2)^2 \, du \quad (u = \operatorname{sen} x).\end{aligned}$$

Caso 4. Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx,$$

onde n e m são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$, de forma análoga ao Caso 1.

Exemplo 4.26

(1) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)'\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x.$

Outra resolução:

$\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(2x).$

NOTA: reparem que $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$ e $-\frac{1}{4}\cos(2x)$ diferem de uma constante.

(2) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x$

(3) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int \operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x.$

(OU por partes)

(4) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x.$

Usamos $\cos(2x) = \cos^2 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$ ou seja

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Nota 4.4. Estas técnicas também resultam para produtos de funções hiperbólicas, usando $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

VIII. Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cossenos. Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\ dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como já vimos, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$t = \tan(x/2) \iff x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Observamos que:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1}{1+t^2}$$

e depois

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Em conclusão:

A substituição $x = 2\arctan t$ fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\ dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Concluímos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos numa primitiva de uma função racional usual.

Exemplo 4.27

$$\int \frac{dx}{3+5\,\mathrm{sen}\,x} = \int \frac{1}{3+5\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (t = \tan\frac{x}{2})$$
$$= \int \frac{1+t^2}{3t^2+10t+3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+10t+3}\,dt.$$

Há dois casos particulares de funções racionais de senos e cossenos em que uma substituição bastante mais simples as transforma também em funções racionais usuais:

Caso 1.

$$\int R(\mathrm{sen}\,x)\cdot\cos x\;dx = \int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t = \mathrm{sen}\,x \text{ e portanto } dt = \cos x\,dx.$$

Caso 2.

$$\int R(\cos x)\cdot \mathrm{sen}\,x\;dx = -\int R(t)\,dt\,,\ \text{em que } t = \cos x \text{ e portanto } dt = -\,\mathrm{sen}\,x\;dx.$$

Exemplo 4.28

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\mathrm{sen}^2\,x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\mathrm{sen}^2\,x}\,dx.$
Fazendo $t = \mathrm{sen}\,x \Leftrightarrow x = \mathrm{arcsen}\,t$ (assumindo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$), temos
$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+\mathrm{sen}\,x| + \frac{1}{2}\ln|1-\mathrm{sen}\,x|.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^2\,x + 2\cos x - 2}\,dx$: fazer $t = \cos x$ (Exercício.)

IX. Resolução de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis. As técnicas de primitivação que vimos permitem-nos responder à seguinte questão: dada uma função $f(x)$, que funções $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com I intervalo, satisfazem

$$y'(x) = f(x)? \tag{33}$$

Trabalhe-se um exemplo simples que já foi tratado no início deste capítulo, mas utilizando desta vez uma linguagem ligeiramente diferente. Procuremos responder à questão:

"Quais são as funções $y(x)$ que verificam $y'(x) = 1 + x^2$?" (34)

Vimos que

$$y(x) = \int 1 + x^2 dx + C = x + \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(não nos podemos esquecer da constante de integração, já que queremos *todas* as funções que verificam (34)!). Se porventura conhecermos o valor de y num dado ponto, podemos determinar o valor de C. Assim, se, por exemplo, conhecermos o valor de y para $x = 0$ e a questão colocada for

"Qual é a função $y(x)$ que verifica $y'(x) = 1 + x^2$ e $y(0) = 3$?"

Então

$$3 = y(0) = \left[x + \frac{x^3}{3} + C\right]_{x=0} = C$$

e a resposta à última pergunta é:

$$y(x) = x + \frac{x^3}{3} + 3. \tag{35}$$

Considera-se sempre como domínio da solução o chamado *intervalo maximal*, ou seja, o maior intervalo contendo $x = 0$ (o ponto onde é dada a condição) onde a expressão (35) esteja definida. Neste caso, portanto, o domínio da solução é $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.29

Determinemos a solução de $y'(x) = 1/x^2$ e $y(1) = 4$. Primitivando,

$$y(x) = \int y'(x)dx = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $y(1) = 2$, temos $4 = -1 + C$ e portanto $C = 5$. Logo a expressão analítica de y é

$$y(x) = -\frac{1}{x} + 5.$$

Consideramos como domínio $]0, +\infty[$, uma vez que é o maior intervalo que contém $x = 1$ onde a solução está definida.

Em geral, podemos colocar a questão de determinar quais são *as funções cujas derivadas satisfazem uma determinada equação*. Ou seja, dada um identidade que envolva as derivadas de uma função real de variável real desconhecida, o que é que podemos saber sobre essa função? Estas equações chamam-se **equações diferenciais ordinárias**[6] (abreviadas para EDO). A informação extra $y(x_0) = y_0$, que nos permite determinar a constante de primitivação, é denominada condição inicial[7]. Ao problema completo "EDO + condição inicial" chama-se **problema de valores iniciais** (PVI).

São exemplos de EDO as relações

$$y'(x) = 3y^2(x)\operatorname{sen} x, \quad y'(x) = e^{-y(x)} + 1 + y(x) + x, \quad y'(x) + y(x) = \cos 2t, \quad xe^{y(x)} = 2y'(x)$$

que podem ser escritas abreviadamente na forma

$$y' = 3y^2 \operatorname{sen} x, \quad y' = e^{-y} + 1 + y + x, \quad y' + y = \cos 2x, \quad xe^y = 2y'. \tag{36}$$

São exemplos de PVI:

$$\begin{cases} y'(x) = 3y^2(x)\operatorname{sen} x \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} + 1 + y(x) + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Nesta secção estudaremos uma família específica de equações diferenciais ordinárias, chamadas de

Equações com variáveis separáveis: Dadas duas funções contínuas f, g, pretende determinar-se as soluções $y = y(x)$ que satisfazem

$$g(y(x))y'(x) = f(x). \tag{37}$$

Usualmente a equação de cima escreve-se simplesmente

$$g(y)y' = f(x),$$

ficando implícito neste último formato o facto de se pretender uma solução que é função de x, isto é, que $y = y(x)$.

[6] Quando a função incógnita tem várias variáveis, podemos considerar equações envolvendo as derivadas nas várias variáveis, chamadas derivadas parciais (esperem por Cálculo II!). Nesse caso, o problema é o de resolver equações com derivadas parciais.

[7] Esta denominação é mais clara se imaginarmos que x é uma variável temporal e que $x_0 = 0$. A condição inicial diz-nos o valor da função no instante inicial e permite-nos determinar o valor da função em instantes futuros

Nota 4.5. Das equações apresentadas em (36), apenas a primeira e a última são de variáveis separáveis. De facto, são equivalentes, respetivamente, a

$$\frac{y'}{3y^2} = \operatorname{sen} x \text{ (se } y \neq 0), \quad \text{e} \quad x = 2y'e^{-y}$$

Ambas são da forma $g(y)y' = f(x)$, no primeiro caso com $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(y) = 1/(3y^2)$, no segundo com $f(x) = x$, $g(y) = 2e^{-y}$.

Nota 4.6. Não devem ficar agarrados às variáveis x e y, já que as letras usadas dependem usualmente do contexto do problema (t é a variável usada quando se representa o tempo, x, y representam usualmente posição/deslocamento; outras letras usadas de forma comum para variável dependente são u, v ou f). Assim, para todos os efeitos, a equação $x = 2y'(x)e^{-y(x)}$ representa a mesma equação que $t = 2x'(t)e^{-x(t)}$ ou $t = 2u'(t)e^{-u(t)}$.

Reparem que, se em (37) tivermos a função $g(y) = 1$, obtemos o caso (33), que se reduz a determinar uma primitiva.

Para resolver o caso geral, se F e G forem primitivas de f e g, respectivamente, então

$$G(y(x)) = \int g(y(x))y'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

(se tiverem dúvidas, derivem cada termo e vejam que são iguais). Concluímos então que

$$G(y(x)) = F(x) + C.$$

Esta fórmula dá-nos as possíveis soluções de forma **implícita**. Em alguns casos, G é invertível e podemos determinar a expressão analítica de forma **explícita**:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C).$$

Uma mnemónica para este método é a seguinte manipulação (que não tem sentido rigoroso!):

$$g(y)y' = f(x) \iff g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \implies g(y)dy = f(x)dx.$$

Integrando ambos os membros, a solução (na forma implícita) é dada por:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Exemplo 4.30

Calculemos a solução do PVI $yy' = x$, $y(3) = -2$. Primitivando,

$$y\frac{dy}{dx} = x \implies ydy = xdx \implies \int ydy = \int xdx \implies \frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

para uma certa constante C. De outra forma:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2C}, \text{ para uma certa constante } C.$$

Esta é a solução geral da equação $yy' = x$. Como $y(3) = -2$, concluímos que

$$y(x) = -\sqrt{x^2 - 5}$$

com domínio da solução (intervalo maximal) $]\sqrt{5}, +\infty[$. Na figura abaixo estão representadas as soluções para diferentes valores de C.

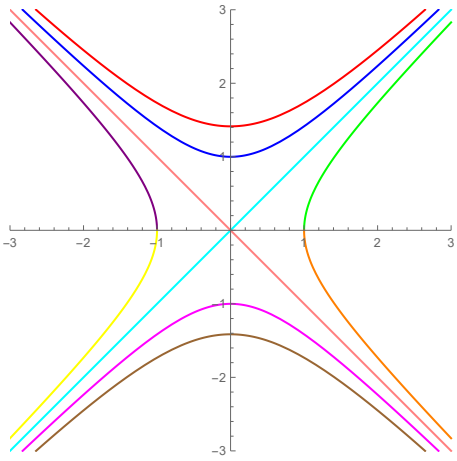

FIGURA 31. Os gráficos de várias soluções de $yy' = x$. As soluções com $C > 0$ não se anulam e têm domínio $\mathbb{R}$. Para $C < 0$, as soluções anulam-se uma vez e o domínio é uma semi-recta com extremo no zero da solução.

Exemplo 4.31

Para determinar a solução do PVI $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 1$, fazemos

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \implies \frac{dy}{1+y^2} = dx.$$

Assim, integrando:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int 1\ dx \Rightarrow \arctan(y(x)) = x + C.$$

Como $y(0) = 1$, vemos que $C = \pi/4$ e portanto

$$y(x) = \tan(x + \pi/4).$$

O domínio da solução (intervalo maximal) é

$$I = x \in \left]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[.$$

Vamos agora tomar 3 exemplos concretos retirados (juntamente com as imagens utilizadas) do livro *Differential Equations for Engineers*, de Wei-Chau Xie (Cambridge University Press, 2010).

Exemplo aplicado 1 (Lei de Newton do Arrefecimento). Quando um objeto arrefece num meio onde a temperatura é constante, a **taxa de variação da temperatura** desse objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do meio envolvente e a temperatura do objeto. Assim, se T_a for a temperatura (constante) do meio e $T(t)$ representar a temperatura do objeto no instante t, esta lei afirma que existe uma constante $k > 0$ tal que

$$T'(t) = k(T_a - T(t)).$$

Se, por exemplo, $T_a = 20^{\circ\circ}C$ e $k = 2$, e o objeto está inicialmente a $T(0) = 10^{\circ}C$, pretendemos revolver o PVI:

$$T' = 2(20 - T), \qquad \text{T(0)=10.}$$

Esta é uma equação com variáveis separáveis: assumindo que $T \neq 20$, vem

$$dT = 2(20-T)dt \iff \frac{1}{20-T}\,dT = 2dt \implies \int \frac{1}{20-T}\,dT = \int 2\,dt + C$$

$$\iff -\ln|20-T| = 2t + C \iff |20-T| = e^{-2t-C}$$
$$\iff 20 - T = \pm e^{-C}e^{-2t} \iff T = \pm e^{-C}e^{-2t} + 20.$$

Observe-se que, para $C \in \mathbb{R}$, e^{-C} pode assumir qualquer valor positivo, enquanto $-e^{-C}$ pode assumir qualquer valor negativo. Concluimos então que, para $T \neq 20$, a solução geral é da forma

$$T(t) = 20 + ke^{-2t} \tag{38}$$

para $k \neq 0$. Como por outro lado $T(t) = 20$ é solução do problema, que é da forma (38) com $k = 0$, deduzimos que a solução geral de $T' = 2(20 - T)$ é (38) com $k \in \mathbb{R}$.
Como $T(0) = 10$, então $20 + k = 10$, donde $k = -10$ e

$$T(t) = 20 - 10e^{-2t}$$

é a solução do nosso problema. Observe-se que, como seria de esperar, a temperatura do objeto converge para a temperatura ambiente (pensem no que acontece à comida se a deixarmos no prato durante muito tempo).

Exemplo Aplicado 2 (Bala a atingir uma placa). Uma bala de massa m gramas atinge uma placa a uma velocidade de v_0 m/s. Sabe-se (experimentalmente) que a resistência de uma placa é proporcional ao quadrado da velocidade da bala. Pretendemos determinar a velocidade da bala dentro da placa ao longo do tempo. Se $x(t)$ denota a trajetória da bala e $v(t) = x'(t)$ a velocidade, sabemos que a resistência é da forma $R = \beta v^2(t)$ para uma certa constante de proporcionalidade $\beta > 0$ que depende do material da placa (tem unidades $grama/metros$). Assim, da segunda lei de Newton, concluímos que

$$mv'(t) = -\beta v^2(t),$$

que é uma equação com variáveis separadas. Assumindo que $v \neq 0$, temos

$$\frac{1}{v^2}dv = -\frac{\beta}{m}\,dt \implies \int \frac{1}{v^2}dv = \int -\frac{\beta}{m}\,dt + C \implies -\frac{1}{v} = -\frac{\beta}{m}t + C,$$

ou seja, a expressão geral para a velocidade da bala em função do tempo é:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{m}t - C}, \qquad \text{onde } C \text{ é uma constante arbitrária.}$$

Como $v(0) = v_0$, vem $C = -1/v_0$, e portanto a expressão final é:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{m}t + \frac{1}{v_0}}$$

(repare-se como, naturalmente, a velocidade da vala vai diminuindo ao longo do tempo).
Exercício: Dispomos de um material para o qual $k = 12$, e queremos construir uma placa de modo a que, se uma bala de 4 gramas a atingir de um lado a $340m/s$, saia do outro no pior dos casos a $10m/s$. Qual deverá ser a espessura mínima de uma placa com estas características?

Exemplo Aplicado 3 (Barco a atravessar um rio). Um barco está a atravessar um rio de largura a do ponto A ao ponto O como mostra a figura abaixo. Sabe-se que o barco está sempre a apontar na direção do ponto O. O rio corre de baixo para cima com uma velocidade constante v_R. Já o barco segue a velocidade constante v_B (mais precisamente, a velocidade aqui é um vetor que aponta sempre para O, sendo tangente à curva traçada pelo movimento, com comprimento v_B e componentes (v_x, v_y)). Pretende-se determinar a trajetória que o barco leva de A até O, que será dada por uma função $y(x)$. Vamos deduzir a equação que traduz o movimento (como esta dedução é algo complicada

e envolve conhecimentos um pouco mais avançados, numa primeira leitura podem saltar diretamente para a equação final (39) e entender a sua resolução). Suponhamos que, no instante t, o barco se encontre na posição (x, y). De acordo com a figura,

$$v_x = -v_B \cos\theta = -v_B \frac{OH}{OP} = -v_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$v_y = v_R - v_B \operatorname{sen}\theta = v_R - v_B \frac{PH}{OP} = v_R - v_B \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se descrevermos numa primeira fase o movimento $(x(t), y(t))$ em função do tempo, vem

$$\frac{dx}{dt}(t) = v_x = -v_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt}(t) = v_y = v_R - v_B \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Considerando agora y como função de x, pelo Teorema da Derivada da Função Composta vem que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \quad \text{ou seja} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_R - v_B \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{-v_B \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = -\frac{k\sqrt{x^2+y^2} - y}{x} = -k\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

para $k = v_R/v_B$. Usando a substituição $u(x) = y(x)/x$, ou seja $y(x) = xu(x)$, vem

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \quad \text{e portanto (usando a equação)} \quad u + x\frac{du}{dx} = -k\sqrt{1+u^2} + u,$$

ou seja, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$x\frac{du}{dx} = -k\sqrt{1+u^2}. \tag{39}$$

A solução geral é dada por

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -k\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + D \Longrightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -k\ln x + D$$

logo

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx^{-k}$$

(notem que $x > 0$). Recordando que $u = y/x$,

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx^{-k} \implies \sqrt{x^2+y^2} = Cx^{1-k} - y$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2 + y^2 = C^2x^{2(1-k)} - 2Cx^{1-k}y + y^2 \implies x^2 = C^2x^{2(1-k)} - 2Cx^{1-k}y$$

Para determinar a constante C (positiva), usamos a condição inicial $y(a) = 0$ e vem:

$$a^2 = C^2a^{2(1-k)} - 0 \iff C = a^k.$$

Em conclusão, o caminho seguido pelo barco é o gráfico da função:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(a^kx^{1-k} - a^{-k}x^{1+k}\right) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v_R}{v_B}} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v_R}{v_B}}\right], \quad x \in [0, a].$$

5. Cálculo Integral

Conteúdo

5.1. Motivação para a Noção de Integral 96
5.2. Partições, Somas Inferiores e Superiores 98
5.3. Integral Superior e Inferior 99

5.4. Funções Integráveis e Não-Integráveis. 101
5.5. Critérios de integrabilidade. Exemplos. 102
5.6. Propriedades do integral 106
5.7. Integral Indefinido 109
5.8. Teorema Fundamental do Cálculo. Regra de Barrow 110
5.9. Algumas aplicações do integral 115
Material extra: Funções elementares definidas por integrais 117

Vamos agora estudar a noção de *integral*. As noções de derivada e integral formam, em conjunto, os pilares do Cálculo.

5.1. Motivação para a Noção de Integral. Uma motivação importante para o estudo de integrais é o cálculo de áreas. Vocês já encontraram a noção intuitiva de área e aprenderam fórmulas para as áreas de alguns conjuntos com geometria simples, tais como um rectângulo ou um círculo (aproveitem este momento para pensar no seguinte: como se faz para chegar à formula da área de um círculo?). Mas como podemos dar uma definição precisa de área de um região arbitrária do plano?

Vamos considerar uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Quando a função é não-negativa, vamos procurar definir de uma forma precisa a área da região R que fica por baixo do gráfico desta função:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

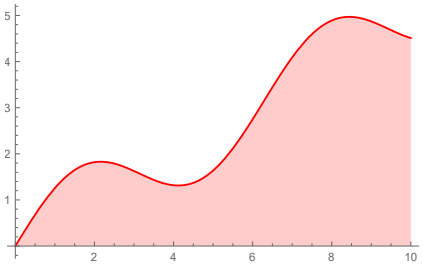

FIGURA 32. Área debaixo do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + x/2$, com $0 < x < 10$.

Ao valor da área, que iremos definir adiante, chama-se *integral* de f no intervalo $[a, b]$.

No caso em que f tome também valores negativos, como na figura seguinte:

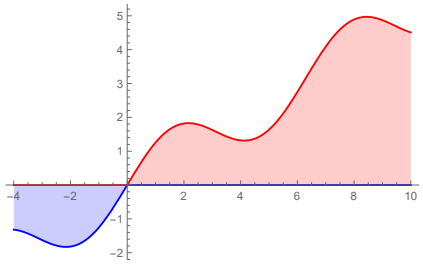

FIGURA 33. Área entre o eixo Ox e o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + \frac{x}{2}$, com $-4 < x < 10$.

o integral representará a "área com sinal" delimitada pelo gráfico da função, i.e., a diferença entre a área vermelha (acima do eixo horizontal) e a área azul (abaixo do eixo horizontal).

Por enquanto e para simplificar (trata-se, para já, de uma motivação que levará a uma definição), vamos assumir que $f(x) \geq 0$ e que f é contínua. A ideia por detrás da definição de integral é muito simples. Começamos por dividir o intervalo $[a, b]$ em intervalos mais pequenos, por exemplo em 4 sub-intervalos:

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup [t_3, t_4].$$

onde os números t_0,t_1,t_2,t_3,t_4, satisfazem:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b.$$

No primeiro intervalo $[t_0, t_1]$ a função tem um valor mínimo m_1 e um valor máximo M_1, no segundo intervalo $[t_1, t_2]$ a função tem um valor mínimo m_2 e um valor máximo M_2, e assim por diante, de forma que, no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, a função tem um valor mínimo m_i e um valor máximo M_i.

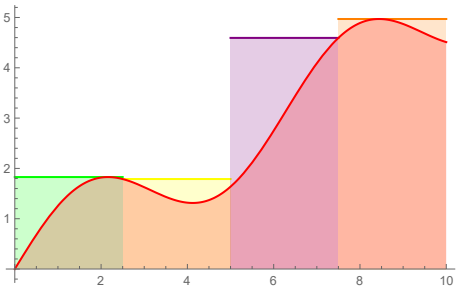

FIGURA 34. Soma superior de $f(x) = \text{sen}(x) + x/2$ com 4 intervalos

Desta divisão resulta então uma colecção de rectângulos *dentro* da região R e uma outra colecção de rectângulos *contendo* a região R. A soma da área dos rectângulos interiores é:

$$\underline{S} = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3),$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$\overline{S} = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3).$$

Observação chave: Qualquer que seja o valor A para a área de R deveremos ter:

$$\underline{S} \leq A \leq \overline{S},$$

e isto deve acontecer *independentemente* da partição do intervalo $[a, b]$.

Por outro lado, é de esperar que, usando partições em sub-intervalos cada vez mais pequenos, se obtenham aproximações cada vez melhores para o valor de A.

Exemplo 5.1

Consideremos a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, e procuremos estimativas inferiores e superiores para a área A da região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ 0 \leq x \leq 1.\}$$

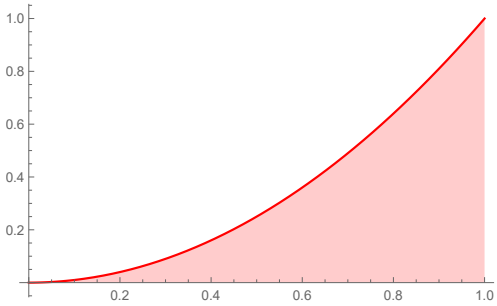

FIGURA 35. A área debaixo da função $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Vamos dividir o intervalo $[0, 1]$ em 2 sub-intervalos do mesmo comprimento: $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$, que ficam determinados através dos extremos $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{2}$ e $t_2 = 1$. Como a função é crescente, num intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ o mínimo de f é $m_i = f(t_{i-1})$ e o máximo de f é

$M_i = f(t_i)$. Logo:

$$m_1 = f(0) = 0, \qquad M_1 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$
$$m_2 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \qquad M_2 = f(1) = 1\,.$$

Assim, obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é:

$$\underline{S} = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$\overline{S} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Assim, a área A da região delimitada pelo gráfico de f deverá satisfazer:

$$\frac{1}{8} \leq A \leq \frac{5}{8}.$$

Por outro lado, se escolhermos uma subdivisão em 4 intervalos, de forma que $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{3}{4}$, $t_4 = 1$, obtemos:

$$m_1 = f(0) = 0, \qquad M_1 = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16},$$
$$m_2 = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}, \qquad M_2 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$
$$m_3 = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \qquad M_3 = f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{16},$$
$$m_4 = f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{16}, \qquad M_4 = f(1) = 1,$$

Logo, obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é agora:

$$\underline{S} = 0 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{32},$$

enquanto a soma da área dos rectângulos exteriores é agora:

$$\overline{S} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{32}.$$

Assim, obtemos melhores estimativas para a área A:

$$\frac{1}{8} < \frac{7}{32} \leq A \leq \frac{15}{32} < \frac{5}{8}.$$

5.2. Partições, Somas Inferiores e Superiores. Vamos agora formalizar estas ideias de uma forma precisa a uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada (não necessariamente contínua nem não-negativa).

Definição 5.2

Sejam $a < b$ números reais. Uma **partição** do intervalo $[a, b]$ é uma colecção finita de pontos $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, em que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$.

Note-se que uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$ permite dividir ("partir") este intervalo em n sub-intervalos $[a, t_1] = [t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$ $[t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, b]$.

Definição 5.3: Somas de Darboux

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$.

(a) A **soma inferior** (de Darboux) de f relativa a P é o número real

$$\underline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde } m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

(b) A **soma superior** (de Darboux) de f relativa a P é o número real

$$\overline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \text{onde } M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Nota 5.1. Para definir as somas inferior e superior apenas precisamos que a função f seja limitada (por forma a que tenha ínfimo e supremo finitos em cada subintervalo determinado pela partição P). Em particular, f pode assumir valores negativos e positivos.

5.3. Integral Superior e Inferior. Vamos agora estudar o que acontece com estas somas quando se alteram as partições.

Definição 5.4

Dadas duas partições P e Q do intervalo $[a, b]$ vamos dizer que Q **é mais fina** que P (ou que **refina** P) se $P \subset Q$, i.e., se todos os pontos de P pertencem a Q.

Exemplo 5.5

Os conjuntos $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ e $P_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ são todos partições do intervalo $[0, 1]$. A partição P_2 é mais fina que P_1, mas a partição P_3 não é mais fina que P_1.

O seguinte lema fornece uma primeira propriedade importante das somas superior e inferior.

Lema 5.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, P e Q partições de $[a, b]$. Se Q é mais fina que P, então:*

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_P(f).$$

Demonstração. Notem que da definição é claro que, para qualquer partição P, temos que:

$$\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f).$$

Vamos agora mostrar que $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f)$. A demonstração de que $\overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_P(f)$ é semelhante.

Basta mostrar que $\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_Q(f)$ quando Q tem apenas mais um ponto que P. O caso geral segue-se, pois podemos juntar um a uma P os pontos de Q, obtendo partições $P \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_k = Q$, em que cada partição tem mais um ponto que a anterior. Assim:

$$\underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_{P_2}(f) \leq \cdots \leq \underline{S}_{P_k}(f) = \underline{S}_Q(f)\,.$$

Seja então $P = \{t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n\}$ e $Q = \{t_0, \ldots, t_{i-1}, c, t_i, \ldots, t_n\}$, onde

$$a = t_0 < \ldots < t_{i-1} < c < t_i < \ldots < t_n = b.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_P(f) &= m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_i(t_i - t_{i-1}) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_i(c - t_{i-1}) + m_i(t_i - c) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\
&\leq m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m'(c - t_{i-1}) + m''(t_i - c) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \underline{S}_Q(f)\,,
\end{aligned}$$

onde usámos:

$$m' := \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq c\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i,$$
$$m'' := \inf\{f(x) : c \leq x \leq t_i\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i. \qquad \square$$

O seguinte lema fornece uma segunda propriedade importante das somas superior e inferior.

Lema 5.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para quaisquer partições P_1 e P_2 de $[a,b]$:*

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f).$$

Demonstração. Seja $Q = P_1 \cup P_2$. Então Q é uma partição que é mais fina que P_1 e P_2. Pelo Lema 5.2, concluímos que:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \leq \underline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_Q(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f). \qquad \square$$

Este lema mostra que o conjuntos de todas as somas superiores é minorado e o conjunto de todas as soma inferiores é majorado, logo as seguintes definições fazem sentido.

Definição 5.6: Integral superior e inferior

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

- Chama-se **integral inferior de f** ao número real:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

- Chama-se **integral superior de f** ao número real:

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{\overline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

Também é comum usar como notação para integral inferior e superior:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Leiam as "Notas importantes sobre nomenclatura" na página 101, que tratam sobre este assunto.

Segue-se do Lema 5.3 que temos sempre:

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Os dois exemplos seguintes mostram que estes dois números podem ser iguais ou distintos.

Exemplo 5.7

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função constante $f(x) = c$. Qualquer que seja a partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ temos que:

$$m_i = M_i = c.$$

Segue-se que:

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = c(b-a),$$
$$\overline{S}_P(f) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

Concluímos que

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = c(b-a),$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = c(b-a),$$

e, portanto, neste caso:

$$\overline{\int_a^b} f = c(b-a) = \underline{\int_a^b} f.$$

Exemplo 5.8

Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a restrição da função de Dirichlet ao intervalo $[a,b]$:

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0\,, & \text{se } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Qualquer que seja a partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ um subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ contém pontos racionais e pontos irracionais, logo:

$$m_i = \inf\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0, \quad M_i = \sup\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1.$$

Segue-se que:

$$\underline{S}_P(g) = \sum_{i=1}^{n} 0(t_i - t_{i-1}) = 0, \quad \overline{S}_P(g) = \sum_{i=1}^{n} 1(t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Concluímos que

$$\underline{\int_a^b} g = \sup\{\underline{S}_P(g) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = 0,$$

$$\overline{\int_a^b} g = \inf\{\overline{S}_P(g) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = b - a,$$

e, portanto, neste caso:

$$\underline{\int_a^b} g = 0 \neq b - a = \overline{\int_a^b} g.$$

5.4. Funções Integráveis e Não-Integráveis.

Definição 5.9: Funções Integráveis. Integral

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é uma **função integrável** no intervalo $[a,b]$ se os seus integrais superior e inferior coincidem.
Nesse caso, ao valor comum chama-se **integral** de f em $[a,b]$ e representa-se pelo símbolo:

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Seguem-se algumas **Notas importantes sobre nomenclatura.**

É comum, ao escrever integral (ou até somas superiores ou inferiores), explicitar a variável independente, escrevendo por exemplo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

No entanto, a variável escolhida não tem qualquer importância: se f for integrável, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, etc.

Note-se que isto é semelhante ao que acontecia com somatórios: por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \quad \text{tem o mesmo significado que} \quad \sum_{j=1}^{3} a_j,$$

sendo que as variáveis i e j são meramente auxiliares. Nos somatórios, estas variáveis indicam-nos entre que ordens vamos somar (no exemplo, será da ordem $i = 1$ até $i = 3$); nos integrais, indicam-nos em que intervalo estamos a integrar a função f ($x \in [a, b]$).

Note-se a diferença entre

$$\int f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)\,dx :$$

- o primeiro termo é uma função e representa uma primitiva de f;
- o segundo termo é um número real (se f é integrável) e representa o integral entre a e b da função f.

A razão para se escolherem notações semelhantes ficará clara quando falarmos no Teorema Fundamental do Cálculo e na Regra de Barrow mais à frente.

Exemplo 5.10

O Exemplo 5.7 mostra que uma função constante $f(x) = c$ definida no intervalo $[a, b]$ é integrável e:

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

Exemplo 5.11

O Exemplo 5.8 mostra que a restrição da função de Dirichlet a um intervalo $[a, b]$ não é uma função integrável.

O símbolo $\int$ representa um S alongado, de "soma integral". Expliquemos melhor a notação $\int_a^b f(x)dx$, recordando o caso em que $f(x) \geq 0$, em que o integral representa a área abaixo do gráfico. Dado x, é comum referirmo-nos a $f(x)dx$ como sendo a área de um retângulo "infinitesimal" (muitíssimo pequeno) centrado em x, com base a medir dx e altura $f(x)$. Assim, a área abaixo do gráfico é vista intuitivamente como uma "soma" das áreas de todos estes retângulos quando x varia entre a e b.
Embora em outras disciplinas isto seja apresentado como sendo rigoroso, não o é matematicamente, e deve ser usado apenas como motivação para a noção e nomenclatura usada para o integral. Uma das formulação rigorosas é a que apresentámos, usando partições e somas de Darboux.

5.5. Critérios de integrabilidade. Exemplos. Vamos agora procurar obter critérios eficientes que nos permitam decidir se uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é ou não integrável.

Proposição 5.12: Critério de Integrabilidade 1

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então

(1) f é integrável em $[a,b] \iff$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que:
$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$
(2) f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f = \alpha \iff$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que:
$$\alpha - \varepsilon < \overline{S}_P(f) \leq \alpha \leq \underline{S}_P(f) < \alpha + \varepsilon.$$

Demonstração. Mostramos apenas (1), ficando como exercício ver por que (1) implica (2).

($\Rightarrow$) Suponhamos que f é integrável de forma que os seus integrais superiores e inferiores coincidem com o valor do integral:
$$\int_a^b f = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\} = \sup\{\underline{S}_P(f) : P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$
Pela propriedade do supremo e do ínfimo enunciada na Proposição 1.9, sabemos então que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem partições P_1 e P_2 tais que
$$\underline{S}_{P_1}(f) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \overline{S}_{P_2}(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Considerando a partição $P = P_1 \cup P_2$, que refina P_1 e P_2, e usando o Lema 5.2, obtemos
$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f) - \underline{S}_{P_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que qualquer que seja $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que:
$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$
Como:
$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}_Q(f) : Q \text{ é partição de } [a,b]\} \geq \underline{S}_P(f),$$
$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}_Q(f) : Q \text{ é partição de } [a,b]\} \leq \overline{S}_P(f),$$
concluímos que:
$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \varepsilon.$$
Como ε é arbitrário o integral superior e inferior coincidem, logo a função é integrável. □

A seguinte consequência direta é útil na prática

Corolário 5.13: Critério de Integrabilidade 2

Seja f limitada em $[a,b]$. Então f é integrável $\iff$ existe uma sucessão de partições $(P_n)_n$ de $[a,b]$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = 0.$$
Além disso, se $\overline{S}_{P_n}(f)$ e $\underline{S}_{P_n}(f)$ convergem, temos
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{P_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{P_n}(f).$$

Exemplo 5.14

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x$. Do seu gráfico, daquilo que sabemos sobre a área de um triângulo e da motivação que esteve por detrás da construção do integral, deveremos ter:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Vamos verificar que de facto assim é. Seja $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ a partição de $[0,1]$ em n intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para esta partição é imediato que:

$$m_i = \inf\{x : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i-1}{n},$$
$$M_i = \sup\{x : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i}{n}.$$

Logo, vemos que as somas inferior e superior para esta partição são:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n-1}{2n} \to \frac{1}{2} \\
\overline{S}_{P_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Invocando o Corolário 5.13, segue que $f(x) = x$ é integrável em $[0,1]$ e:

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5.15

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^2$, a função já tratada no Exemplo 5.1. Pretendemos calcular

$$\int_0^1 x^2\,dx,$$

que corresponde à área abaixo do gráfico de f para $x \in [0,1]$.
Seja $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ a partição de $[0,1]$ em n intervalos de comprimento $\frac{1}{n}$. Para esta partição é imediato que:

$$m_i = \inf\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{(i-1)^2}{n^2},$$
$$M_i = \sup\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i^2}{n^2}.$$

Usando o facto de

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(o que se pode demonstrar por indução), vemos que as somas inferior e superior para esta partição são:

$$\underline{S}_{P_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \to \frac{1}{3},$$

$$\overline{S}_{P_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3}$$

Invocando o Corolário 5.13, concluímos que a função $f(x) = x^2$ é integrável em $[0,1]$ e que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Exercício 5.4. Raciocinando como em cima e usando o facto de

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

mostre que a função $f(x) = x^3$ é integrável em $[0,1]$ e que $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

Exemplo 5.16

Este exemplo ilustra a afirmação intuitiva da 'área de uma linha ser nula'.

Seja $f(x) = 0, x \in [0,2] \setminus \{1\}$, $f(1) = 10$. Então f é integrável em $[0,2]$ e $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$.

Seja $P_n = \{0, 1-1/n, 1+1/n, 2\}$ a partição de $[0,2]$ em 3 subintervalos. Então, como em $[0,1-1/n]$ e $[1+1/n,2]$ temos $\inf f(x) = \sup f(x) = 0$,

$$\overline{S}_{P_n}(f) - \underline{S}_{P_n}(f) = (10-0)\cdot[(1+1/n)-(1-1/n)] = 20/n \to 0,$$

logo f é integrável em $[0,2]$ e

$$\underline{S}_{P_n}(f) = 0, \quad \overline{S}_{P_n}(f) = 20/n \to 0 \quad \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = 0.$$

Mais geralmente, temos que: se $f(x) = 0$, $x \neq c_1, ..., c_p$ (conjunto finito) então f é integrável em $[a,b]$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Estes exemplos (trabalhosos) mostram que precisamos de formas mais expeditas de responder a duas questões para que a noção de integral possa ser realmente útil:

- Que classes de funções são integráveis?
- Como podemos calcular o seu integral num intervalo $[a,b]$ eficientemente?

Responda-se desde já (parcialmente) à primeira questão:

Teorema 5.17: Classes de funções integráveis

(1) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função **contínua**. Então f é integrável em $[a,b]$.
(2) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função **monótona**. Então f é integrável em $[a,b]$.

Demonstração. (1) A prova da primeira afirmação necessita de uma noção que não faz parte do programa (a de continuidade uniforme de uma função) pelo que não é apresentada. O(A) aluno(a) interessado(a) deverá consultar a bibliografia ou falar com o professor.

(2) Sendo f monótona em $[a,b]$, é claro que f é limitada por $f(a)$ e $f(b)$. Se $f(a) = f(b)$ então f é constante e, pelo Exemplo 5.7, a função é integrável.

Seja então $f(a) \neq f(b)$. Vamos supor que f é crescente: $f(a) < f(b)$ (o caso decrescente é tratado de forma inteiramente análoga). Dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ tal que:

$$0 < t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Como f é crescente, temos:

$$m_i = f(t_{i-1}) \text{ e } M_i = f(t_i),$$

logo:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε era arbitrário, pela Proposição 5.12, a função f é integrável. □

Este último resultado permite-nos verificar que muitas das funções que estudaremos são integráveis. Para além disso, é uma consequência das propriedades que veremos a seguir que, se f é integrável em subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$, o que nos permite considerar integrabilidade 'por troços': funções monótonas / contínuas por troços são também integráveis. Também veremos que se podem alterar os valores de uma função integrável num conjunto finito sem afectar integrabilidade (nem o integral). É possível caracterizar de forma precisa exatamente quais as funções que são integráveis, mas tal estudo detalhado não faz parte do programa. Posto isto, fica a faltar uma forma expedita de calcular integrais, o que explicaremos à frente na Secção 5.8.

5.6. Propriedades do integral. Vamos agora estudar propriedades do integral, que são úteis, por exemplo, no seu cálculo.

Teorema 5.18: Aditividade em relação à região de integração

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < c < b$ e suponha-se que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$ e temos:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Seja $\alpha = \displaystyle\int_a^c f$ e $\beta = \displaystyle\int_c^b f$. Pelo Corolário 5.13, para todo o $\varepsilon > 0$ existem partições P_1 de $[a, c]$ e P_2 de $[c, b]$ tais que:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_1}(f) \leq \alpha \leq \overline{S}_{P_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{40}$$

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_2}(f) \leq \beta \leq \overline{S}_{P_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Seja $P = P_1 \cup P_2$. Então P é uma partição de $[a, b]$ para a qual

$$\underline{S}_P(f) = \underline{S}_{P_1}(f) + \underline{S}_{P_2}(f) \quad \text{e} \quad \overline{S}_P(f) = \overline{S}_{P_1}(f) + \overline{S}_{P_2}(f).$$

Assim, a soma de (40) e (41) fornece:

$$(\alpha + \beta) - \varepsilon < \underline{S}_P(f) \leq \alpha + \beta \leq \overline{S}_P(f) < (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, pelo Corolário 5.13, concluímos que f é integrável em $[a,b]$ e que:

$$\int_a^b f = \alpha + \beta = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

Definimos anteriormente o integral $\int_a^b f$ apenas se $a < b$. Introduzimos agora as seguintes:

Convenções importantes

$$\int_a^a f\,dx = 0 \text{ (o caso } a = b) \ , \quad \int_a^b f := -\int_b^a f, \text{ se } a > b.$$

Com estas definições, é fácil verificar que a relação:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

é verdadeira para **quaisquer** $a, b, c \in \mathbb{R}$ (i.e., mesmo que $a < c < b$ não se verifique).

Teorema 5.19: Linearidade do integral

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(ii) cf é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

Demonstração. Vamos mostrar (i). A demonstração de (ii) é bastante mais fácil e fica como exercício (é boa ideia considerar separadamente os casos $c > 0$, $c = 0$ e $c < 0$).

Para demonstrar (i), seja então $\alpha = \int_a^b f$ e $\beta = \int_a^b g$. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existem partições P_1 e P_2 de $[a,b]$ tais que:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_1}(f) \leq \alpha \leq \overline{S}_{P_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{42}$$

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{P_2}(g) \leq \beta \leq \overline{S}_{P_2}(g) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{43}$$

É fácil verificar que para um intervalo $[c,d]$ qualquer e duas funções limitadas f e g, temos sempre:

$$\inf_{[c,d]}(f+g) \geq \inf_{[c,d]} f + \inf_{[c,d]} g,$$
$$\sup_{[c,d]}(f+g) \leq \sup_{[c,d]} f + \sup_{[c,d]} g.$$

Sendo assim, se tomarmos a partição $P = P_1 \cup P_2$ obtemos $\underline{S}_P(f+g) \geq \underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g)$ e $\overline{S}_P(f+g) \leq \overline{S}_P(f) + \overline{S}_P(g)$. A soma das equações (42) e (43) fornece então:

$$(\alpha+\beta) - \varepsilon < \underline{S}_{P_1}(f) + \underline{S}_{P_2}(g) \leq \underline{S}_P(f) + \underline{S}_P(g) \leq \underline{S}_P(f+g) \leq$$
$$\leq \overline{S}_P(f+g) \leq \overline{S}_P(f) + \overline{S}_P(g) \leq \overline{S}_{P_1}(f) + \overline{S}_{P_2}(g) < (\alpha+\beta) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, isto mostra que $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e o seu integral é dado por:

$$\int_a^b (f+g) = \alpha + \beta = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

Nota 5.5. Pode-se mostrar (mais difícil!) que, se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis em $[a, b]$, então fg também é uma função integrável em $[a, b]$. Notem no entanto que, em geral,

$$\int_a^b (fg) \neq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Por outro lado, se f e g são funções integráveis, a função composta $f \circ g$ pode não ser uma função integrável.

Nota 5.6. Usando linearidade e o Exemplo 5.16, temos a seguinte consequência: se f é integrável em $[a, b]$ e $g(x) = f(x)$, $x \neq c_1, ..., c_p$, então g é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

ou seja, **o integral não depende de valores de f num conjunto finito**. De facto, por linearidade, basta ver que se $h = f - g = 0$ em $[a, b] \setminus \{c_1, ..., c_p\}$ então h é integrável e $\int_a^b h(x)\,dx = 0$, o que se vê como no Exemplo 5.16.

Teorema 5.20: Monotonia do integral

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $b > a$, duas funções integráveis.

(i) Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \geq 0$.

(ii) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Em particular, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo o $x \in [a, b]$ então:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

Demonstração. A demonstração de (i) fica como exercício. Para demonstrar (ii) reparem que $f(x) \leq g(x)$ sse $g(x) - f(x) \geq 0$. Assim, aplicando (i) à função $g - f$ e usando a linearidade do integral, obtemos:

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Finalmente, aplicando (ii) às funções constantes $g(x) = m$ e $h(x) = M$, obtemos:

$$m(b - a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b - a). \qquad \square$$

Recordem-se que para quaisquer números reais a e b: $|a + b| \leq |a| + |b|$. Segue-se que para quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

A próxima propriedade do integral pode ser vista como um generalização desta propriedade:

Teorema 5.21: Módulo e integral

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $|f|$ é uma função integrável em $[a, b]$ e temos:

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demonstração. Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vamos designar por f^+ a sua parte não-negativa e por f^- a sua parte não-positiva:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0\,, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } f(x) > 0, \\ -f(x)\,, & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Notem que $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Agora temos o seguinte exercício:

Exercício 5.7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P uma partição de $[a, b]$. Se M_i e m_i são como anteriormente para f, M_i' e m_i' analogamente para $|f|$, mostre que:

$$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i.$$

Conclua que, se f é integrável então $|f|$ é integrável.

Por este exercício, segue-se do Teorema 5.19 que

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{e } f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

também são funções integráveis. Recorrendo ao Teorema 5.20, concluímos que:

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f^+ - f^-)\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\right| \leq \left|\int_a^b f^+\right| + \left|\int_a^b f^-\right|$$
$$= \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|. \qquad \square$$

Nota 5.8. O Teorema 5.21 diz-nos que, se f é integrável em $[a, b]$, então $|f|$ também é integrável em $[a, b]$, mas o recíproco, em geral, não é verdadeiro. Por exemplo, para a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 1\,, & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

temos que $|f| = 1$ é uma função constante. Portanto $|f|$ é integrável em $[a, b]$, mas f não é integrável em $[a, b]$.

5.7. Integral Indefinido. Vamos agora estudar uma ferramenta muito eficiente para calcular integrais, baseada no chamado Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona o integral com a derivada.

Começamos por observar que integrar uma função "suaviza" o seu comportamento:

Teorema 5.22

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. A função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) := \int_a^x f, \tag{44}$$

é contínua.

O resultado anterior pode ser escrito na forma:

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^{x_0} f(t)\, dt.$$

Demonstração do Teorema 5.22. Como a função f é integrável, por definição, é limitada: existe $L > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq L, \ \forall x \in [a, b].$$

Seja então $c \in [a, b]$. Temos que:

$$|F(c + h) - F(c)| = \left|\int_a^{c+h} f - \int_a^c f\right| = \left|\int_c^{c+h} f\right|$$

$$\leq \left| \int_c^{c+h} |f| \right| \leq \left| \int_c^{c+h} L \right| = L|h|$$

(notem que h pode ser > 0 ou < 0). Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \varepsilon/L$ e obtemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ |h| < \delta \ \Rightarrow \ |F(c+h) - F(c)| \leq \varepsilon,$$

portanto, $\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c)$, logo F é contínua em c. □

Notação É costume chamar a F introduzido em (44) o **integral indefinido** de f com origem em a. Por vezes, para acentuar que x é uma variável, escrevemos este integral indefinido na forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Exemplo 5.23

(1) $F(x) = \int_0^x c\, dt = cx$.

(2) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ tem domínio $\mathbb{R}$.
Quem tiver Probabilidade em Estatística irá encontrar estas funções:
Função erro ('error function'): $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} F(x)$
Função probabilidade acumulada - distribuição normal: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

(3) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ tem domínio $\mathbb{R}^+$.

(4) $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t\, dt$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(5) Consideremos a restrição da função de Heaviside $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \geq 0, \\ 0\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sendo esta função monótona, é integrável. O seu integral indefinido relativo a $a = -1$ é a função:

$$F(x) = \int_{-1}^x h(t)\ dt = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0, \\ 0\,, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

que é uma função contínua. Notem pois que o integral transforma uma função descontínua numa função contínua!

5.8. Teorema Fundamental do Cálculo. Regra de Barrow. Nesta secção daremos um resultado que permite, na prática, calcular de forma expedita muitos integrais. Comecemos por ver que, quando a função integranda f é contínua, o integral indefinido é diferenciável e a derivada é especialmente simples:

Teorema 5.24: Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ o seu integral indefinido:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Se f é contínua em $c \in [a, b]$ então F é diferenciável em c e:

$$F'(c) = f(c).$$

(Se $c = a$ ou $c = b$ então por $F'(c)$ entenda-se a derivada lateral direita ou esquerda de F.)

Demonstração. Vamos supor que $c \in]a, b[$. Os casos $c = a$ e $c = b$ tratam-se de forma semelhante.
Suponha-se primeiro que $h > 0$ e defina-se:

$$m_h := \inf\{f(x) : c \leq x \leq c + h\}$$
$$M_h := \sup\{f(x) : c \leq x \leq c + h\}.$$

Notem que como f é contínua em c temos que:

$$\lim_{h\to 0^+} m_h = \lim_{h\to 0^+} M_h = f(c).$$

Como $m_h \leq f(x) \leq M_h$ para $x \in [c, c + h]$, a monotonia do integral mostra que:

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\ dt \ \Rightarrow\ m_h h \leq F(c + h) - F(c) \leq M_h h.$$

Pelo princípio do encaixe (Teorema 2.40, concluímos que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} m_h = \lim_{h\to 0^+} M_h = f(c).$$

O caso $h < 0$ é inteiramente análogo e fornece:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Portanto, as derivadas laterais de F existem em $x = c$ e são ambas iguais a $f(c)$. Logo F é diferenciável em c e $F'(c) = f(c)$. □

Nota 5.9. Neste teorema considerámos o caso em que o limite superior do integral varia. No entanto, observem que o caso em que o limite inferior varia reduz-se a este:

$$G(x) = \int_x^b f(t)\ dt = \int_x^a f(t)\ dt + \int_a^b f(t)\ dt = -\int_a^x f(t)\ dt + \int_a^b f(t)\ dt\,.$$

Logo, se f é contínua em c, obtemos:

$$G'(c) = -f(c).$$

Daqui resulta que se f está definida para $x < a$ então a derivada de $F(x) = \int_a^x f = -\int_x^a f$ em $c < a$ é dada por:

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c).$$

Conclusão:

(a) Se f é contínua em $x = c$ então a derivada de $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ em $x = c$ é dada por $F'(c) = f(c)$ (não interessa se $c < a$ ou $c > a$).
(b) Se f é contínua em $x = c$ então a derivada de $G(x) = \int_x^b f(t)\ dt$ em $x = c$ é dada por $G'(c) = -f(c)$ (não interessa se $c < b$ ou $c > b$).

O Teorema Fundamental do Cálculo é especialmente útil quando a função integranda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos, pois obtemos:

Corolário 5.25

(1) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então o seu integral indefinido $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt,$$

é uma **primitiva** de f, i.e. F é uma função diferenciável tal que $F' = f$.

(2) Em geral, se $a(x)$, $b(x)$ são diferenciáveis e f é contínua, então

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)' = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x)).$$

Demonstração. A primeira afirmação sai do Teorema Fundamental do Cálculo. Quanto à segunda, sendo $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ o integral indefinido, a fixo, temos

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_a^{b(x)} f(t)\,dt - \int_a^{a(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(F(b(x)) - F(a(x))\right)',$$

e o resultado acima sai de (1) e da regra de derivação da função composta. □

Exemplo 5.26

(1) $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}$. Pode mostrar-se que esta função, importantíssima em estatística, não se escreve através de funções elementares. As suas propriedades podem ser estudadas através das suas derivadas. Como $t \mapsto e^{-t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pelo corolário anterior:

$$F'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = e^{-x^2} \quad \text{e} \quad F''(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Assim, F é é estritamente crescente, sendo convexa se $x < 0$ e côncava se $x > 0$. Além disso, $F(0) = 0$, $F(x) > 0$ para $x > 0$, $F(x) < 0$ para $x < 0$.

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}^+$. Como $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ é contínua em $]\,0, +\infty[$:

$$F'(x) = \left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Logo, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x + C$, $0 = \ln 1 + C \Rightarrow C = 0$, ou seja F coincide com ln (aliás é uma das formas de *definir* a função ln - as propriedades vossas conhecidas de ln saem da definição de integral - vejam a última secção do capítulo).

(3) $F(x) = \displaystyle\int_x^{-1} \frac{e^t}{t}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}^-$. Como $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ é contínua em $]-\infty, 0\,[$:

$$F'(x) = \left(\int_x^{-1} \frac{e^t}{t}\,dt\right)' = \left(-\int_{-1}^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)' = -\frac{e^x}{x}, \quad x < 0.$$

(4) $G(x) = \displaystyle\int_2^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ é contínua em $]\,0, +\infty[$ (e portanto em qualquer intervalo $[2, x^2]$ ou $[x^2, 2]$), temos

$$G'(x) = \left(\int_2^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt\right)' = 2x\,\frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{2e^{x^2}}{x}.$$

(5) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, tem domínio $\mathbb{R}^+$ e

$$G'(x) = -\frac{e^x}{x} + \frac{2e^{x^2}}{x}.$$

(6) $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{x^2 e^t}{t}\,dt$ tem domínio $\mathbb{R}^+$ e

$$\left(\int_1^x \frac{x^2 e^t}{t}\,dt\right)' = \left(x^2 \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)' = 2x\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + x^2\frac{e^x}{x} = 2x\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt + xe^x.$$

(7) $G(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$, com f contínua em $\mathbb{R}$, então $G''(x) = f(x)$. [exercício]

Tudo o que vimos nesta secção tem esta consequência importantíssima:

Teorema 5.27: Regra de Barrow

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, i.e., uma função diferenciável tal que $F' = f$. Então:

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Basta observar que as funções $F(x)$ e $\int_a^x f(t)\ dt$ possuem a mesma derivada em todos os pontos $x \in [a,b]$, logo diferem por uma constante $c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c.$$

Segue-se que:

$$F(b) - F(a) = (\int_a^b f(t)\ dt + c) - (\int_a^a f(t)\ dt + c) = \int_a^b f(t)\ dt. \qquad \square$$

É usual designar-se esta fórmula por **Regra de Barrow**.

Notações importantes: É costume usar-se qualquer uma das seguintes notações:

$$F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(t)|_a^b = F(t)|_{t=a}^{t=b}.$$

Esta fórmula permite reduzir o cálculo de integrais ao cálculo de primitivas, o que já foi visto em secções anteriores.

Exemplo 5.28

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (e^{3x}+1)\,dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 + 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{e^3+2}{3}.$

(3) $\displaystyle\int_0^4 (x+\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = 8 + 16/3.$

(4) Dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^n\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comparem com as dificuldades que tivemos para calcular o integral nos casos $n = 1$ e $n = 2$!

Termine-se esta secção com duas fórmulas importantes no cálculo de integrais. Como consequência da fórmula de primitivação por partes:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx,$$

vem imediatamente a:

Fórmula de integração por partes:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Exemplo 5.29

Exemplifiquemos com o cálculo do integral

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx.$$

tomamos $u(x) = x^2$ e $v'(x) = xe^{x^2}$, donde $u'(x) = 2x$ e $v(x) = e^{x^2}/2$. Concluímos que:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Da fórmula de primitivação por substituição:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

vem a:

Fórmula de integração por substituição. Se f e u' são funções contínuas e se u é invertível, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))u'(t)\,dt.$$

Comparando com a fórmula de primitivação por substituição, vemos que deixa de ser necessário regressar à variável original (o resultado final é um número real, sem qualquer dependência da variável de integração x).

Exemplo 5.30

(1) Calcule-se $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$. Temos:

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx &= \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{(tomando } t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t, \text{ de forma que } dx = e^t\,dt)\\ &= \ln t|_{t=1}^{t=2}\\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.\end{aligned}$$

Notem que ao fazermos a substituição $t = \ln x$, também transformámos os respectivos limites:

$$\begin{aligned}x = e &\implies t = \ln e = 1,\\ x = e^2 &\implies t = \ln e^2 = 2.\end{aligned}$$

(2) Calculemos $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^3} e^{1/x}\, dx$.

Fazendo $t = 1/x \Leftrightarrow x = 1/t$, temos $dx = -\frac{1}{t^2}\, dt$ e $x = 1/2 \Rightarrow t = 2$, $x = 1 \Rightarrow t = 1$, logo

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^3} e^{1/x}\, dx = \int_{2}^{1} t^3 e^t (-\frac{1}{t^2})\, dt = \int_{1}^{2} te^t\, dt = [te^t]_1^2 - \int_1^2 e^t\, dt = 2e^2 - e - [e^t]_1^2 = e^2.$$

(3) Para calcular $\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$:

Fazendo $x = \cos t$, $t \in]0, \pi[$, (ou $x = \operatorname{sen} t$) temos $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $x = 1/2 \Rightarrow t = \pi/3$ e $x = \sqrt{2}/2 \Rightarrow t = \pi/4$, logo

$$\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/4} -\tan^2 t\, dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (1+\tan^2 t) - 1\, dt = [\tan t - t]_{\pi/4}^{\pi/3} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}.$$

5.9. Algumas aplicações do integral.

Aplicação 1: Cálculo de áreas

Concluímos o capítulo retomando a motivação inicial: podemos agora definir rigorosamente *área* de algumas figuras planas:

- Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, f integrável em $[a, b]$ e
$$R = \{(x, y) : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$
então
$$\text{Área}(R) := \int_a^b f(x)\, dx.$$
- Mais geralmente, se f, g são integráveis, $g(x) \leq f(x)$ em $[a, b]$ e
$$R = \{(x, y) : x \in [a, b],\ g(x) \leq y \leq f(x)\},$$
então
$$\text{Área } (R) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Exemplo 5.31: Cálculo de Áreas

(1) Área da região limitada por $y = x^2 - 2$ e $y = 6 - x^2$

Intersecções: $x^2 - 2 = 6 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$A = \int_{-2}^{2} 6 - x^2 - (x^2 - 2)\, dx = 2\int_0^2 8 - 2x^2\, dx = 4[4x - \frac{1}{3}x^3]_0^2 = 4(8 - \frac{8}{3}) = \frac{64}{3}.$$

(2) Área da região limitada por $x = y^2 - 2$ e $x = 6 - y^2$ É exatamente como no exemplo anterior, simplesmente trocamos os eixos:

$$A = \int_{-2}^{2} 6 - y^2 - (y^2 - 2)\, dy = \frac{64}{3}.$$

(3) Área da região limitada por $y = x - 1$, $y = -e^x$, $y = -2$: Intersecções: $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$, $-e^x = -2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

$$A = \int_{-1}^{0} (x - 1 - (-2))\, dx + \int_0^{\ln 2} (-e^x - (-2))\, dx = [\frac{x^2}{2} + x]_{-1}^{0} + [-e^x + 2x]_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

(4) Área da região limitada por $y = \arctan x$, $x = 1$, $y = 0$. Integrando por partes, vemos que:

$$A = \int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

(5) Área da região $\{(x,y) : 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}\}$.

$$A = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx = [\arctan(\ln x)]_1^e = \frac{\pi}{4}.$$

(6) Área do circulo raio 1: supondo sem perda de generalizade que está centrado em $(0,0)$ a área á quatro vezes a área da região:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Fazendo $x = \operatorname{sen} t$, e notando que $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$,

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 t \, dt = [2t + \operatorname{sen}(2t)]_0^{\pi/2} = \pi.$$

Para o circulo de raio $R > 0$: integrar $\sqrt{R^2 - x^2}$ de 0 a R e fazer $x = R\operatorname{sen} t$.

(7) Área da *elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Vamos ver o caso $a = 2$, $b = 1$, i.e., $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$: temos

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$$

Usando a substituição $x = 2\operatorname{sen} t, t \in [0, \pi/2] \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsen}(x/2)$ e temos $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = \pi/2$, logo

$$A = 4\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t \, dt = 4\int_0^{\pi/2} (\cos(2t) + 1)\, dt = 2[\operatorname{sen}(2t)]_0^{\pi/2} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Em geral, a área da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é $ab\pi$.

Aplicação 2: Volume de sólidos de revolução
Se $f \geq 0$ e V é o sólido dado por revolução da linha $y = f(x)$ em torno do eixo dos xx, $a \leq x \leq b$, então

$$\text{vol}(V) = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx,$$

ou seja, o volume obtém-se integrando a área do circulo com raio $f(x)$, $a \leq x \leq b$. Esta fórmula apenas será devidamente justificada em Cálculo II.

As aplicações 1 e 2 serão abordada nos exercícios. As seguintes não fazem parte do programa de Cálculo I, sendo dadas aqui como extra.

Aplicação 3: Comprimento de linhas
Se f é de classe C^1, o comprimento do gráfico de f com $a \leq x \leq b$ é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(isto será abordado em Cálculo II)

Aplicação 4: Integrais impróprios
Quando a região de integração não é limitada, ainda podemos por vezes 'dar sentido' ao integral - em particular, uma região ilimitada pode ter área finita. Há 2 casos possíveis:

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ mas f não é limitada em $]a, b[$: por exemplo, se f tem assíntota vertical em $x = a$, definimos

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

(2) $]a, b[$ não é limitado: por exemplo, em $]a, +\infty[$, definimos

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

Exemplo 5.32: Integrais impróprios do tipo (1)

Considere-se a função $f(x) = 1/t^p$ no intervalo $]0, 1[$. Para $p > 0$, a função não é limitada neste intervalo. Para $p \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-p+1}(1 - x^{-p+1}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{se } 0 < p < 1, \\ +\infty, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, as contas têm de ser feitas à parte já que $\int \frac{1}{t}\,dt = \ln t$. O resultado será também $+\infty$ e o integral é divergente.)

Exemplo 5.33: Integrais impróprios do tipo (2)

Para $p \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-p+1}(x^{-p+1} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \\ +\infty, & \text{se } 0 < p < 1. \end{cases}$$

(Para $p = 1$, será também $+\infty$ - o integral é divergente.)

Material extra: Funções elementares definidas por integrais. Podemos usar integrais, mais precisamente integrais indefinidos, para introduzir de outra forma algumas funções elementares. Vamos fazê-lo com detalhe para a exponencial e o logaritmo. Recorde-se que começámos por definir no início destas notas a função exponencial (cf. Exemplo 2.3) ao introduzir o número e como o limite de uma sucessão, e ao dar sentido a e^x para todo o $x \in \mathbb{R}$. Após isso, o logaritmo foi definido como sendo a função inversa da exponencial.

Aqui, mostramos uma alternativa a esta construção usando integrais indefinidos: fazendo de conta que não conhecemos ainda estas funções, primeiro definimos a função logaritmo como sendo um integral indefinido da função $1/t$; com isso deduzimos todas as suas propriedades. No final, definimos exponencial como a inversa do logaritmo, e vemos como isso coincide com e^x.

A função logaritmo.

Defina-se a função $L : \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Para cada $x > 1$, $L(x)$ representa a área abaixo do gráfico de $1/t$ em $[1, x]$ se $x > 1$, e o simétrico da área do gráfico em $[x, 1]$ se $0 < x < 1$. Temos, apenas usando as propriedades já estudadas do integral:

- $L(1) = \int_1^1 1/t \; dt = 0$;
- É uma função infinitamente diferenciável, pois, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $L'(x) = \frac{1}{x}$;
- É uma função estritamente crescente pois a sua derivada é sempre positiva em $\mathbb{R}^+$;
- Uma vez que $L(1) = 0$ e que L é estritamente crescente, então

$$L(x) > 0 \text{ para } x > 1, \text{ e } L(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 1;$$

- É uma função côncava, pois $L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ em $\mathbb{R}^+$.
- Se $x, y > 0$, temos que:

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad \text{e} \quad L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

Para a primeira identidade, fixado y, $\frac{d}{dx}(L(xy)) = L'(xy)y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} = L'(x)$, logo $L(xy) = L(x) + k$; fazendo $x = 1$ sai $k = L(y)$.
Para mostrar a segunda identidade, observe-se que $L(x) = L(\frac{x}{y} \cdot y) = L(\frac{x}{y}) + L(y)$.

- Para todo o $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$,

$$L(x^y) = yL(x).$$

É simples mostrá-lo para $y \in \mathbb{Z}$: de facto, o resultado é claro se $y = 0$; pelo parágrafo anterior, o caso $y \in \mathbb{Z}^-$ segue do caso $y \in \mathbb{N}$; fica como exercício mostrar por indução que a relação é verdadeira para $y \in \mathbb{N}$.

- Como L é crescente, os limites $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} L(x)$ existem em $\overline{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x\to 0^+} L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(2^{-n}) = \lim_{n\to+\infty} -nL(2) = -\infty.$$
$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = \lim_{n\to+\infty} L(2^n) = \lim_{n\to+\infty} nL(2) = +\infty.$$

Em particular, $L(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Pode definir-se o número e como $L^{-1}(1)$, ou seja, o único x tal que $L(x) = 1$.

Chamamos a L a função logaritmo de base e e escrevemos $L(x) = \ln x$.

Recorrendo a estas propriedades do logaritmo, podemos esboçar o seu gráfico:

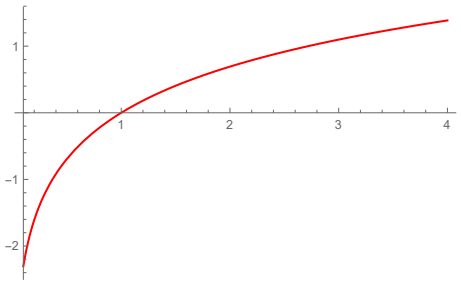

FIGURA 36. O gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.

A função exponencial.

Tendo em conta que $L :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente com contradomínio $\mathbb{R}$, existe uma função inversa com domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $]0, +\infty[$. Naturalmente, definimos a função exponencial como sendo

$$E(x) = L^{-1}(x), \qquad E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

As propriedades da exponencial saem das do logaritmo:

- $E(x)$ é estritamente crescente e convexa, $E(0) = 1$, $E(1) = e$.

- Do Teorema da Derivada da Função Inversa (Teorema 3.29),
$$E'(x) = \frac{1}{L'(E(x))} = \frac{1}{\frac{1}{E(x)}} = E(x),$$
- $\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} E(x) = 0,$
- $E(x+y) = E(x)E(y)$, e $E(xy) = E(y)^x$ para $x, y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = 1$, vem
$$E(x) = E(1)^x = e^x.$$

Nota 5.10. O procedimento que foi usado para definir logaritmo e exponencial pode também ser aplicado para definir outras funções elementares, como as funções trignométricas e trigonométricas inversas.

6. Sucessões e Séries

Conteúdo

A. SUCESSÕES 120
A1. Introdução e exemplos. 120
A2. Limite de uma Sucessão 122
A3. Propriedades do Limite de Sucessões 123
A4. Sucessões Monótonas e Limitadas 124
A5. Escala de Sucessões 126
B. SÉRIES NUMÉRICAS 127
B1. Introdução e exemplos 127
B2. Operações algébricas sobre séries 130
B3. Condição necessária para convergência 131
B4. Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência 132
B5. Convergência Simples e Absoluta 138
B6. Séries Alternadas e Critérios de Convergência 140
C. SÉRIES DE POTÊNCIAS 142
C1. Definições e resultados gerais 142
C2. Séries de Taylor 147

A. SUCESSÕES.

A1. Introdução e exemplos. Uma sucessão real não é mais do que uma sequência infinita de números reais, como por exemplo

$$2,\ 21,\ 3001,\ 3,\ 2,\ 5,\ldots$$

Usa-se normalmente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais para indexar os termos dessa sequência:

$$u(1)=2,\ u(2)=21,\ u(3)=3001,\ u(4)=3,\ u(5)=2,\ u(6)=5,\ldots$$

Temos assim a seguinte:

Definição 6.1

Uma **sucessão real** é uma função de domínio $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u:\mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n)\,. \end{aligned}$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, designaremos $u(n)$ por **termo geral** ou **termo de ordem** n da sucessão u, representando-o normalmente por u_n. Para o exemplo acima, escrevemos:

$$u_1=2,\ u_2=21,\ u_3=3001,\ u_4=3,\ u_5=2,\ u_6=5,\ldots$$

Usaremos qualquer dos símbolos u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) para representar uma mesma sucessão real.

Existem várias maneiras de explicitar exemplos particulares de sucessões reais, como se ilustra de seguida.

Exemplo 6.2

Uma sucessão real pode ser definida através de uma fórmula explícita para o seu termo geral. Por exemplo:

$$\begin{aligned} u_n &= 3 && (3,3,3,\ldots)\,; \\ u_n &= 2+3n && (5,8,11,\ldots)\,; \\ u_n &= 3\cdot 2^n && (6,12,24,\ldots)\,. \end{aligned}$$

Há duas classes muito importantes de sucessões reais, cuja definição pode ser feita usando uma fórmula explícita para o seu termo geral.

Exemplo 6.3: Progressões aritméticas

Progressões aritméticas são sucessões caracterizadas pelo facto de

$$u_{n+1} - u_n = \text{constante}\ ,\ \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

O seu termo geral é da forma

$$u_n = a + (n-1)r\,,$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão aritmética (u_n) (notem que a diferença $u_{n+1} - u_n = r$ é, de facto, constante).

A sucessão $u_n = 2 + 3n$, do Exemplo 6.2, é uma progressão aritmética, com primeiro termo $a = 5$ e razão $r = 3$.

Exemplo 6.4: Progressões geométricas

Progressões geométricas são sucessões caracterizadas pelo facto de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \text{constante}\ ,\ \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

O seu termo geral é da forma

$$u_n = a \cdot r^{n-1}\,,$$

onde $a, r \in \mathbb{R}$ são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão geométrica (u_n) (notem que o quociente $u_{n+1}/u_n = r$ é de facto constante).

A sucessão $u_n = 3 \cdot 2^n$ do Exemplo 6.2, é uma progressão geométrica, com primeiro termo $a = 6$ e razão $r = 2$.

Exemplo 6.5: Sucessões definidas por recorrência

O termo geral de uma sucessão real pode também ser definido por **recorrência**. Um exemplo famoso é dado pela **sucessão de Fibonacci**:

$$u_1 = u_2 = 1\,,$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

cuja lista de termos é pois:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

Exercício 6.1. Defina progressões aritméticas e geométricas **por recorrência**, com primeiro termo $a \in \mathbb{R}$ e razão $r \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.6

Sucessões reais podem também ser definidas por uma regra clara que permita identificar, um a um, todos os seus termos. Um exemplo é a sucessão de todos os números naturais primos, i.e. a sucessão (u_n) cuja lista de termos é

$$(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots)\,.$$

Não se conhece uma fórmula em termos de funções elementares que forneça o termo geral desta sucessão.

A2. Limite de uma Sucessão. Intuitivamente, dizemos que uma sucessão (u_n) *tem por limite o número real* $a \in \mathbb{R}$ se eventualmente todos os termos da sucessão (u_n) se aproximam de $a \in \mathbb{R}$. De uma forma matematicamente mais precisa, temos a seguinte

Definição 6.7

A sucessão real (u_n) diz-se **convergente** para o número real $a \in \mathbb{R}$, ou que possui **limite** a, se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim u_n = a \quad \text{ou ainda} \quad u_n \to a\,.$$

A sucessão real (u_n) diz-se **convergente** para $+\infty$ (resp. $-\infty$), ou que possui **limite** $+\infty$ (resp. $-\infty$), se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ (n > N \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon})\ (\text{resp. } n > N \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon})\,.$$

Nestes casos escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \pm\infty \quad \text{ou ainda} \quad u_n \to \pm\infty\,.$$

Exemplo 6.8

Vamos provar que $u_n = \frac{1}{n} \to 0$. Suponhamos dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Existe um natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$. É imediato verificar que

$$n > N \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon,$$

provando-se assim que, de facto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,. \tag{45}$$

Nota 6.2. Observem que, se pensarmos numa sucessão (u_n) como uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então a definição de limite de sucessões coincide precisamente com a noção de limite de funções que estudámos anteriormente, i.e., temos que

$$\lim u_n = \lim_{n\to+\infty} u(n).$$

Proposição 6.9

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

então a sucessão $u_n := f(n)$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Demonstração. Recordando o conceito de limite relativo de uma função, é claro que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{N}}} f(x). \qquad \square$$

Esta proposição reduz muitas vezes o cálculo de limites de sucessões ao cálculo de limite de funções.

Exemplo 6.10

(1) Para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

observamos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+1/x)} = e^1 = e,$$

pois

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1/(1+y)}{1} = 1.$$

(2) Seja $0 < a < 1$. Para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0,$$

observamos que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0,$$

pois $\ln a < 0$.

Exercício 6.3. Completem este exemplo mostrando que:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{não existe, se } a \le -1, \\ 0, \quad \text{se } |a| < 1, \\ 1, \quad \text{se } a = 1, \\ +\infty, \quad \text{se } a > 1. \end{cases}$$

A3. Propriedades do Limite de Sucessões. A correspondência entre limites de sucessões e limites de funções leva a que muitas das propriedades dos limites de funções se estendam imediatamente a propriedades de limites de sucessões. Por exemplo, o limite de uma sucessão, quando existe é único. Listamos de seguida outras propriedades básicas, que vocês devem também verificar.

Teorema 6.11: Limites e Propriedades Algébricas

Se $u_n \to a$, $v_n \to b$, $w_n \to c$ com $w_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante, então:

(i) $(u_n \pm v_n) \to a \pm b$ (limite da soma = soma dos limites);
(ii) $(u_n \cdot v_n) \to a \cdot b$ (limite do produto = produto dos limites);
(iii) $(u_n/w_n) \to a/c$ (limite do quociente = quociente dos limites);
(iv) $(\alpha \cdot u_n) \to \alpha \cdot a$.

Com as convenções introduzidas no Capítulo 2 (secção **Operações algébricas na reta acabada e resultados sobre limites**) estes resultados são válidos para $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, excepto no caso em que temos uma indeterminação.

Exemplo 6.12

Usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 6.11:

$$\lim\frac{3n+2}{n+1} = \lim\frac{n\cdot(3+\frac{2}{n})}{n\cdot(1+\frac{1}{n})} = \lim\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = 3\,,$$

onde usámos e o facto de que $\lim\frac{1}{n} = 0$.

Teorema 6.13: Limites e Relação de Ordem

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes tais que $u_n \leq v_n$ para $n > N$, então.

$$\lim u_n \leq \lim v_n \,.$$

Exemplo 6.14

Para as sucessões

$$u_n := \operatorname{sen}(1/n) \text{ e } v_n := \operatorname{sen}(1/n) + 1/n^2$$

temos que $u_n \leq v_n$. Logo os seus limites, caso existam, satisfazem $\lim u_n \leq \lim v_n$. Na verdade, estas sucessões convergem e podemos calcular facilmente estes limites:

$$\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \text{ pois } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0,$$

$$\lim \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}\right] = 0, \text{ pois } \lim_{x\to+\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right] = \operatorname{sen}(0) + 0 = 0.$$

Notem que apesar de $u_n < v_n$ temos $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Teorema 6.15: Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada

Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões reais para as quais existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n \,.$$

Se (u_n) e (w_n) são convergentes com $\lim u_n = a = \lim w_n$, então (v_n) também é convergente e $\lim v_n = a$.

Exemplo 6.16

Para determinar $\lim \frac{(-1)^n}{n}$, observemos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \,.$$

Como $\lim -\frac{1}{n} = 0 = \lim \frac{1}{n}$, concluímos pelo Princípio do Encaixe que

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0 \,. \tag{46}$$

Nota 6.4. É altura de ir ao final do Capítulo 2 ler ou reler o **Material Extra: Equivalência entre as definições de limite segundo Heine e segundo Cauchy** e ver em particular o Teorema 2.89, onde se explica a equivalência entre a definição de continuidade (segundo Heine) que deram no secundário, e que usa sucessões, e a definição à Cauchy que vimos pela primeira vez nesta cadeira, que usa $\varepsilon - \delta$.

A4. Sucessões Monótonas e Limitadas. Os resultados que vimos anteriormente permitem calcular os limites de muitas sucessões a partir de manipulações no seu termo geral. No entanto, por vezes, estamos interessados em saber se uma dada sucessão é ou não convergente, sem entrar numa análise detalhada do seu termo geral. Vamos agora estudar critérios gerais que permitem decidir se uma sucessão é convergente.

As seguintes definições são inteiramente análogas ao que se passa com funções (recordem que uma sucessão real $u = (u_n)$ não é mais que uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

Definição 6.17

Seja (u_n) uma sucessão real. Então:

(i) (u_n) diz-se **crescente** (resp. **estritamente crescente**) se $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(ii) (u_n) diz-se **decrescente** (resp. **estritamente decrescente**) se $u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$) para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(iii) (u_n) diz-se **majorada** se existir $M \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leq M$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(iv) (u_n) diz-se **minorada** se existir $m \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \geq m$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão diz-se **monótona** (resp. **estritamente monótona**) se for crescente ou decrescente (resp. estritamente crescente ou decrescente). Uma sucessão diz-se **limitada** se for majorada e minorada.

Exercício 6.5. Mostre que, se uma sucessão (u_n) é convergente, então é limitada.

Notem que uma sucessão limitada pode não ser convergente: a sucessão $u_n = (-1)^n$ é claramente limitada, mas não é convergente. No entanto, temos o seguinte resultado, que já conhecem desde o secundário mas que só após o que vimos nesta disciplina podemos demonstrar com rigor. Notem da demonstração como, tal como foi dito de forma mais vaga no Capítulo 1, este resultado é uma consequência do Princípio do Supremo!

Teorema 6.18

Seja (u_n) uma sucessão real.

(i) Se (u_n) é crescente e majorada então é convergente e

$$\lim u_n = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Se (u_n) é decrescente e minorada então é convergente e

$$\lim u_n = \inf\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Em particular, **toda a sucessão monótona e limitada é convergente**.

Demonstração. Faremos o caso em que (u_n) é crescente e majorada (o caso em que (u_n) é decrescente e minorada é completamente análogo).

Como a sucessão (u_n) é majorada, temos (pelo Princípio do Supremo) que existe

$$a = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,.$$

Queremos portanto provar que

$$u_n \to a \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon > 0\;\exists\, N \in \mathbb{N} \,:\, (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Seja então dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela Proposição 1.9, existe algum u_N tal que $a - \varepsilon < u_N \leq a$. Como (u_n) é crescente, vemos que para todo o $n > N$:

$$u_N \leq u_n \leq a \;\Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq a\,.$$

Temos então que

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ para todo o } n > N,$$

como se pretendia mostrar. □

Nota 6.6. Decidir se uma dada sucessão monótona é ou não limitada pode ser um problema difícil. Por exemplo, tentem decidir se a seguinte sucessão crescente é ou não majorada:

$$1,\; 1+\frac{1}{2},\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\ldots$$

A5. Escala de Sucessões. Suponhamos que $u_n, v_n \to +\infty$. Tal como para funções, também o limite

$$\lim \frac{u_n}{v_n}$$

é uma indeterminação (do tipo $\frac{\infty}{\infty}$). O resultado depende da "velocidade" com que u_n e v_n vão para infinito. Tal como já foi visto para funções, também para sucessões. Terminamos esta breve incursão pelas sucessões

Em geral, se $u_n, v_n > 0$, dizemos que

$$u_n << v_n \quad \text{se} \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = 0 \to +\infty (ou, equivalentemente, \lim \frac{v_n}{u_n} = +\infty).$$

Diz-se nesta situação que u_n é desprezável em relação a v_n, ou que u_n é muito menor que v_n. Quando $u_n, v_n \to +\infty$ e $u_n << v_n$, isso significa (informalmente) que v_n vai para mais infinito "muito mais depressa" que u_n.

Teorema 6.19: Escala de sucessões

Escala de sucessões: se $p > 0$ e $a > 1$, então

$$\ln n << n^p << a^n << n! << n^n.$$

Vamos usar o seguinte lema na prova de todas as afirmações; note-se no entanto que as duas primeiras podem fazer-se com recurso à Regra de Cauchy e ao estudo de funções (combine-se (29) com a Proposição 6.9).

Proposição 6.20

Seja $a_n > 0$. Se

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

então

(1) se $L > 1$ então $\lim u_n = +\infty$;
(2) se $L < 1$ então $\lim u_n = 0$.

Se $L = 1$ nada se pode concluir.

Demonstração da Proposição 6.20. Note-se em primeiro lugar que, para qualquer sucessão convergente $a_n \to a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ (porquê?). Por outro lado se $a_n = n \to +\infty$ ou $a_n = 1/n \to 0$, também temos $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Em particular, vemos que se $L = 1$ nada se pode concluir acerca de $\lim a_n$.

Para (1): se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, então $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para n suficientemente grande, logo a_n é crescente, a partir de determinada ordem $n > N$. Se a_n fosse majorada, seria convergente $a_n \to a > 0$ (já que a_n é crescente e positiva) e nesse caso tínhamos $L = 1$ - o que é contrário ao assumido. Assim a_n é não majorada e como é crescente para $n > N$, tem-se $a_n \to +\infty$.

Para (2): se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, toma-se $b_n = \frac{1}{a_n}$ e aplica-se (1) a b_n. □

Demonstração do Teorema 6.19. (i) $\lim \frac{n^p}{a^n} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{n^p}{a^n}$, temos $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a} < 1$ para $a > 1$.

Usando uma mudança de variável, deste resultado segue também que $\lim \frac{\ln n}{n^p} = 0$.

(ii) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{a^n}{n!}$, temos

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim \frac{a^{n+1}}{a^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

(iii) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ porque fazendo $u_n = \frac{n!}{n^n}$, temos

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

□

Exemplo 6.21

(1) $\lim \frac{1,00001^n}{n^{10000}} = +\infty$ directamente da escala de sucessões $n^p << a^n$ para $a > 1, p > 0$.

(2) $\lim \frac{2^{2n} + n^3}{5^n + n^2} = \lim \frac{2^{2n}\left(1 + \frac{n^3}{2^{2n}}\right)}{5^n\left(1 + \frac{n^2}{5^n}\right)} = \lim \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

(3) $\lim \frac{2^n + n^5}{n! + 1} = 0$ (complete os detalhes)

(4) $\lim \frac{n^n}{n! + 100^n} = +\infty$ (complete os detalhes)

(5) $\lim \frac{n^5 2^n}{n! + 1} = 0$. Não sai da escala de sucessões directamente - aplica-se a Proposição 6.20 visto acima.

(6) $\lim \frac{n^n}{3^n n!} = 0$: também não sai da escala de sucessões directamente.
Em geral: $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = 0$, se $a > e$ e $\lim \frac{n^n}{a^n n!} = +\infty$, se $a < e$.

B. SÉRIES NUMÉRICAS.

B1. Introdução e exemplos. O tema que agora vamos iniciar é motivado pelo seguinte problema: dada uma sucessão real (u_k), determinar quando é que é possível atribuir significado preciso à *soma de todos os elementos da sucessão* (u_k):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

Não definimos ainda uma soma com um número infinito de parcelas. Podemos no entanto definir as **somas parciais**:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ s_k &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

e definir a soma de todos os termos da sucessão como o $\lim s_k$. É claro que este limite pode ou não existir.

Definição 6.22: Séries

Uma sucessão (u_n) diz-se **somável** se a sucessão (s_k) das somas parciais:

$$s_k := u_1 + \cdots + u_k = \sum_{n=1}^{k} u_n,$$

é convergente com limite finito. Usaremos a notação

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

a que chamamos **série**. Quando a sucessão (u_n) é somável dizemos que a **série é convergente** e que a sua soma é $\lim s_n$. Caso contrário dizemos que a **série é divergente**.

Exemplo 6.23

Consideremos a série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Será que esta série diverge ou converge? Para isso consideramos a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1,\\
s_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4},\\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8},\\
&\vdots\\
s_k &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Podem verificar esta última fórmula por indução. Como temos:

$$\lim s_k = \lim \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = \lim \left(2 - \frac{1}{2^k}\right) = 2,$$

concluímos que a série é convergente e a sua soma é igual a 2.

Este é um caso particular do seguinte:

Séries Geométricas

Suponhamos que (u_n) é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $r \in \mathbb{R}$, i.e., $u_n := r^n$, $(n \in \mathbb{N}_0)$. A série correspondente é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

Séries deste tipo são designadas por **séries geométricas**. A sucessão das somas parciais é dada por (vejam o Exemplo 1.20):

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} u_n = \sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}\ ,\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\ .$$

Logo, se $|r| < 1$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}\,.$$

Portanto a série é convergente quando $|r| < 1$, e a sua soma é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\,, \quad (|r| < 1). \tag{47}$$

O Exemplo 6.23 corresponde ao caso $r = 1/2$. Para a descrição completa da convergência ou divergência para um $r \in \mathbb{R}$ arbitrário, veja-se (50) à frente.

Nota 6.7. Notem que (se $|r| < 1$) e começarmos a somar a partir de $n = 1$, o resultado é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}.r^n = \frac{r}{1-r}\,. \tag{48}$$

Exemplo 6.24

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$

Esta série diverge, pois a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1,\\ s_2 &= -1+1 = 0,\\ s_3 &= -1+1-1 = -1,\\ s_4 &= -1+1-1+1 = 0,\\ &\vdots \end{aligned}$$

que é uma sucessão divergente.

Séries de Mengoli ou Telescópicas.
Sao séries em que a sucessão de somas parciais se pode calcular usando a propriedade telescópica dos somatórios (relembrar Capítulo 1), por exemplo da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})\,.$$

Neste caso, temos

$$s_k = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{k-1} - b_k) + (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{k+1}$$

(é a propriedade telescópica dos somatórios) logo a série é convergente $\Leftrightarrow$ s_k é convergente $\Leftrightarrow$ $b_1 - b_{k+1}$ é convergente $\Leftrightarrow$ b_n é convergente e a sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim b_n.$$

Mais geralmente, se tivermos uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p})$$

para algum $p \in \mathbb{N}$, a série converge se b_n é convergente em $\mathbb{R}$ e $s_k = b_1 + \ldots + b_p - b_{k+1} - \ldots - b_{k+p}$, donde a soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+p}) = b_1 + \ldots + b_p - p \lim b_n$$

Exemplo 6.25

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$: série de Mengoli da forma $\sum(b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \frac{1}{n}$. Como $\lim b_n = 0$ existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 - \lim b_n = 1.$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right)$: série de Mengoli da forma $\sum(b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Como $\lim b_n = \cos 0 = 1$ existe em $\mathbb{R}$, temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 - \lim b_n = \cos \pi - 1 = -2.$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right)$: Mengoli da forma $\sum(b_{n+1} - b_n) = -\sum(b_n - b_{n+1})$, convergente, $s = -(b_1 - \lim b_n) = -1/2 + 1 = 1/2$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1))$: série de Mengoli da forma $\sum(b_n - b_{n+1})$ em que $b_n = \ln(n)$. Como $\lim b_n = +\infty$, temos que a série é divergente. (Teríamos $s_k = b_1 - b_{k+1} = \ln 1 - \ln(k+1) \to -\infty$.)

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$: para ver que é de Mengoli, podemos escrever

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \frac{An + 3A + Bn + B}{(n+1)(n+3)}$$

logo $A = -B = 1/2$ e temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right),$$

série de Mengoli da forma $\sum(b_n - b_{n+2})$, em que $b_n = \frac{1}{n+1}$. Como $\lim b_n = 0$, temos que a série é convergente e a sua soma é

$$s = b_1 + b_2 - 2 \lim b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}.$$

Nota 6.8. É fácil ver que a natureza de uma série não depende de um número **finito** de valores - embora a sua soma sim!. Ou seja, se $u_n = v_n$ para $n \neq n_1, \ldots, n_p$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge. Em particular, as primeiras p parcelas são irrelevantes para determinar a natureza da série (mas não para determinar a sua soma!) **É isso que justifica que por vezes passemos a escrever apenas $\displaystyle\sum_n u_n$ ou até $\displaystyle\sum u_n$ para designar uma série, sem especificar os índices.**

B2. Operações algébricas sobre séries. É um exercício muito simples mostrar, a partir da definição, as seguintes operações algébricas sobre séries convergentes:

Proposição 6.26: Soma e multiplicação por escalar

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries convergentes e $c \in \mathbb{R}$.

Então, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$ também são convergentes e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exemplo 6.27

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$$

Tendo em conta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3}{3^n} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

vemos que a série é geométrica com razão $r = 1/3$. Concluímos assim que se trata de uma série convergente, pois $|r| = 1/3 < 1$, e podemos usar a fórmula (48) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\,.$$

B3. Condição necessária para convergência. Em geral, dada uma série, é difícil calcular a sucessão da somas parciais e verificar se converge ou não. Precisamos pois de critérios que permitam decidir facilmente se uma série converge ou diverge.

Teorema 6.28: Condição necessária para convergência

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ convergente} \implies \lim_{n\to\infty} u_n = 0\,.$$

Demonstração. Sendo a série convergente, sabemos então que a sucessão de somas parciais

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$$

é convergente com limite finito: $\lim s_k = l \in \mathbb{R}$. Temos então

$$\begin{aligned} 0 = l - l &= \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{n\to\infty} s_{k-1} \\ &= \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} u_n - \sum_{n=1}^{k-1} u_n \right) = \lim_{k\to\infty} u_k\,. \end{aligned}$$

□

Importância prática deste resultado: O Teorema 6.28 pode ser usado como critério de divergência para séries numéricas, pois o seu resultado é logicamente equivalente ao seguinte:

$$u_n \nrightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ divergente.} \tag{49}$$

Por exemplo, no caso das séries geométricas, tendo em conta que

$$r^n \nrightarrow 0 \text{ quando } |r| \geq 1$$

e que séries geométricas são convergente quando $|r| < 1$, isso permite-nos concluir que

Classificação de séries geométricas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{convergente (com soma } \frac{1}{1-r}), & \text{se } |r| < 1; \\ \text{divergente,} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases} \tag{50}$$

Nota 6.9. A implicação contrária à especificada no Teorema 6.28 não é verdadeira, ou seja, podemos ter $u_n \to 0$ e ainda assim a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergente.

Um exemplo é dado por $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ em que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\,\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

As séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

chamam-se **séries de Dirichlet**, e a sua natureza depende de α. Usando o mesmo argumento que acima, pode ver-se que divergem se $0 < \alpha < 1$ (se $\alpha \leq 0$ também divergem, porquê?). Veremos á frente que se $\alpha > 1$ então a série converge.

O caso $\alpha = 1$, ou seja tomando a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ converge para 0, mas a série correspondente é a chamada **série harmónica** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que, como veremos adiante, é divergente.

B4. Séries de Termos Não-Negativos e Critérios de Convergência. Séries de termos não-negativos (STNN) são séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \quad \text{com} \quad a_n \geq 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Proposição 6.10. *Uma STNN* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais* (s_k) *for majorada.*

Demonstração. Por definição, a série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ for convergente. Como

$$s_{k+1} - s_k = a_{k+1} \geq 0,$$

vemos que a sucessão (s_k) é monótona crescente. Logo, segue do Exercício 6.5 e do Teorema 6.18 que (s_k) é convergente se, e só se, for majorada. □

Este resultado **não é muito útil na prática**, pois pode ser difícil verificar se a sucessão de somas parciais é ou não majorada. Vejam o exemplo da Nota 6.6, que não é mais do que a sucessão de somas parciais da série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ referida na Nota 6.9. No entanto leva a um critério muito útil.

Teorema 6.29: Critério Geral de Comparação para STNN

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais tais que

$$0 \leq a_n \leq b_n\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_n \text{ converge;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge.}$$

Demonstração. Sejam (s_k) e (t_k) as sucessões de somas parciais das séries dadas, i.e.

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \quad \text{e} \quad t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n\,.$$

Temos naturalmente que

$$0 \leq a_n \leq b_n\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq s_k \leq t_k\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Usando a Proposição 6.10, podemos então concluir que:

- $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow$ (t_k) majorada $\Rightarrow$ (s_k) majorada $\Rightarrow$ $\sum_n a_n$ converge.
- $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow$ (s_k) não-majorada $\Rightarrow$ (t_k) não-majorada $\Rightarrow$ $\sum_n b_n$ diverge. □

Nota 6.11. Nas condições do Teorema 6.29, ou seja assumindo que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, as implicações contrárias às especificadas **não são verdadeiras**. Assim, em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 6.30

(1) O critério de comparação para STNN permite, por vezes, mostrar a convergência de uma série cujo termo geral é muito complicado, como no seguinte exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1}+n^2}.$$

Como temos:

$$0 \leq \frac{1+\operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1}+n^2} \leq \frac{2}{3^{n-1}},$$

e já sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ converge (vejam o Exemplo 6.27), concluímos que a série original converge. Pensem no que é que podemos dizer sobre a soma desta série.

(2) $\sum \dfrac{1}{3^n+n}$ é convergente do critério de comparação, ja que

$$0 < \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

e a serie $\sum \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ e convergente, por ser geometrica de razao $r = 1/3 \in]-1,1[$.

(3) $\sum \dfrac{1+(-1)^n}{2^n+1}$ é convergente do critério de comparação, já que

$$0 \leq \frac{1+(-1)^n}{2^n+1} < \frac{2}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

e a série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ é convergente, por ser geométrica de razão $r = 1/2 \in]-1,1[$.

Teorema 6.31: Outro Critério de Comparação para STNN

Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões reais de termos positivos, tais que

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty.$$

Então, as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza, i.e., ou ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração. A hipótese

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty,$$

garante que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < 2L \cdot b_n\,.$$

Basta agora aplicar o Critério Geral de Comparação do Teorema 6.29 a estas desigualdades. □

Exercício 6.12. O que é que se pode dizer quando $L = 0$ ou $L = +\infty$? **Escrevam o teorema que corresponde a estes dois casos!**

Exemplo 6.32

Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{3^n - 2^n}\,.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série geométrica $\sum 1/3^n$. De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n-2^n}} = \lim \frac{3^n-2^n}{3^n} = 1 - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty\,,$$

sabemos pelo Teorema 6.31 que as séries são da mesma natureza. Como a série geométrica $\sum \dfrac{1}{3^n}$ de razão $r = 1/3 < 1$ converge, concluímos que a série $\sum \dfrac{1}{3^n - 2^n}$ também converge.

Para aplicar o critério de comparação, é útil usar a notação $u_n \sim u_n$ se $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ (informalmente, u_n e v_n são semelhantes / têm o "mesmo comportamento" no infinito). Assim, no exemplo

anterior, usámos o facto de

$$\frac{1}{3^n - 2^n} \sim \frac{1}{3^n}.$$

Para aplicar o critério de comparação também é útil e essencial recordar a escala de sucessões: para $a > 1$ e $p > 0$,

$$\ln n << n^p << a^n << n! << n^n.$$

Exemplo 6.33

(1) $\sum \frac{1}{3^n - n}$ é convergente: de facto $\frac{1}{3^n - n} \sim \frac{1}{3^n}$, ou seja

$$\lim \frac{\frac{1}{3^n - n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim \frac{3^n}{3^n - n} = 1,$$

logo a série é da mesma natureza que $\sum \frac{1}{3^n}$, que converge por ser uma série geométrica de razão $r = 1/3 \in (-1, 1)$.

(2) $\sum \frac{2^n + 3}{3^n + 2}$ converge, da mesma forma, notando que $\frac{2^n + 3}{3^n + 2} \sim \frac{2^n}{3^n}$.

(3) $\sum_{+\infty \neq 0.} \frac{4^n - n}{3^n - n^2}$ diverge, da mesma forma, notando que $\frac{4^n - n}{3^n - n^2} \sim \frac{4^n}{3^n}$.
(EM ALTERNATIVA, poderíamos simplesmente observar que

$$\lim \frac{4^n - n}{3^n - n^2} = \lim \frac{4^n}{3^n} \frac{1 - n/4^n}{1 - n^2/3^n} = +\infty$$

e invocar o critério de divergência (49))

Como vemos, para aplicar este critério precisamos de ter séries de referência, ou seja séries que saibamos à partida que convergem ou divergem. Já vimos:

- Séries Geométricas: $\sum r^n$ converge $\Leftrightarrow -1 < r < 1$;
- Séries de Mengoli: $\sum (b_n - b_{n+1})$ converge $\Leftrightarrow b_n$ é convergente (em $\mathbb{R}$).

Veremos mais à frente:

- Séries de Dirichlet: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Por agora, mais três critérios:

Teorema 6.34: Critério da Razão (ou de D'Alembert) para STNN

Seja $\sum_n a_n$ uma série numérica, com $a_n > 0$ e tal que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Então:

(a) se $r < 1$ a série $\sum_n a_n$ converge;

(b) se $r > 1$ a série $\sum_n a_n$ diverge.

Demonstração. Suponhamos que $r < 1$. Se escolhermos $r < s < 1$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s, \quad \forall n \geq N.$$

Logo:

$$a_{N+n} \leq s a_{N+n-1} \leq s^2 a_{N+n-2} \leq \cdots \leq s^n a_N.$$

Como $s<1$ a série geométrica $\sum_n^{\infty} a_N s^n = a_N \sum_n^{\infty} s^n$ converge. Pelo Critério Geral de Comparação para STNN, concluímos que a série $\sum_n a_n$ também converge.

Suponhamos agora que $r>1$. Neste caso, se escolhermos $1<s<r$, existe um $N\in\mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s, \quad \forall n \geq N.$$

Isto mostra que:

$$a_{N+n} \geq s a_{N+n-1} \geq s^2 a_{N+n-2} \geq \cdots \geq s^n a_N \geq a_N,$$

donde $\lim a_n \neq 0$ e a série $\sum_n a_n$ diverge. □

Exemplo 6.35

Seja $r>0$ e suponha-se que queremos determinar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}\,.$$

Fazendo $a_n = \frac{r^n}{n!}$, temos então que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

Concluímos pelo Critério da Razão que, qualquer que seja $r>0$, a série dada é convergente.

Nota 6.13. O critério da razão nada diz quando $r=1$. Por exemplo, para a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ temos, em ambos os casos, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Como veremos de seguida, a série harmónica diverge enquanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema 6.36: Critério da raíz (ou de Cauchy)

Seja $u_n \geq 0$ e $\lim \sqrt[n]{u_n} = r$:

(a) se $0 \leq r < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge,

(b) se $r>1$ então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge. (Se $r=1$, nada se conclui.)

Demonstração. Se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, então para algum $\varepsilon > 0$ com $r+\varepsilon < 1$, temos para $n>p$, $\sqrt[n]{a_n} < r+\varepsilon < 1 \Rightarrow a_n < (r+\varepsilon)^n$, e (i) sai do critério de comparação, já que $\sum (r+\varepsilon)^n$ converge por ser $r+\varepsilon<1$. Para (ii), se $\lim \sqrt[n]{a_n} = r > 1$ então tomando $r-\varepsilon > 1, a_n > (r-\varepsilon)^n, n>p$, e $\lim a_n = +\infty$ logo a série diverge. □

Exemplo 6.37

Usando o critério da raíz, é imediato ver que

(1) $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ converge.

(2) $\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

(3) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ diverge.

Teorema 6.38: Critério Integral para STNN

Seja $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ uma função positiva decrescente.
Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\iff$ existe e é finito o limite:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\,dx.$$

Demonstração. Primeiro observamos que o limite $\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\,dx$ existe e é finito se, e só se, a série

$$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx + \cdots$$

converge. Deixamos como exercício simples verificar que, como f é positiva e decrescente, temos:

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x)\,dx < f(n).$$

O resultado segue-se do Critério Geral de Comparação para STNN. □

Veja-se uma aplicação muito importante deste critério. Pretendemos estudar a convergência das chamadas **séries de Dirichlet**, i.e., séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,,\ \text{com } p\in\mathbb{R}_+.$$

Pelo Critério Integral para STNN a convergência desta série é equivalente à existência finita do integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx\,.$$

Observando que:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{b^{p-1}}\right), & \text{se } p\neq 1,\\ \ln b, & \text{se } p=1,\end{cases} \Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0<p\leq 1,\\ \frac{1}{p-1}, & \text{se } p>1,\end{cases}$$

vemos que o integral existe e é finito se, e só se, $p>1$. Portanto:

Séries de Dirichlet. A série de Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad \text{é} \quad \begin{cases}\text{divergente}, & \text{se } 0<p\leq 1;\\ \text{convergente}, & \text{se } p>1.\end{cases} \tag{51}$$

Considerando o caso particular $p=1$, obtemos finalmente que, de facto,

$$\text{a série harmónica } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

As Séries de Dirichlet são bastante úteis para determinar por comparação a natureza de muitas outras STNN.

Exemplo 6.39

Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\,.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série harmónica $\sum 1/n$. De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1 \quad (\text{ou seja, } \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}) \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty\,,$$

sabemos pelo Teorema 6.31 que as séries são da mesma natureza. Como a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge, podemos concluir que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ também diverge.

Exemplo 6.40

(1) $\sum \dfrac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge, por comparação com a série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

(2) $\sum \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$ diverge, por comparação com $\sum \dfrac{1}{n}$, ou seja,

$$\lim \frac{\frac{n^2+1}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^3+n^2}{n^3+1} = 1$$

logo a série é da mesma natureza que $\sum \frac{1}{n}$, e portanto diverge, por ser a série harmónica divergente.

(3) $\sum \dfrac{2\sqrt{n}+3}{n^2+n+1}$ converge, por comparação com $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

(4) $\sum \dfrac{n}{(\sqrt{n}+1)(n+1)(\sqrt[4]{n}+1)}$ diverge, por comparação com $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

B5. Convergência Simples e Absoluta. Vimos que as STNN são particularmente simples de estudar, uma vez que as somas parciais são crescentes. Se tivermos uma série de termos não positivos $\sum_n a_n$, com $a_n \leq 0$ então

$$\sum_n a_n = -\sum_n (-a_n)$$

e $\sum_n (-a_n)$ é uma STNN cuja convergência é equivalente á da série original, por isso os critérios que vimos podem aplicar-se.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série em que a_n não tem sinal fixo, ou seja a_n assume valores positivos e negativos para n arbitrariamente grande, por exemplo,

$$\sum (-1)^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{2^n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum \frac{\cos n}{n!}.$$

então a sucessão de somas parciais é não monótona, e por isso mais difícil de estudar em geral.

Neste caso, podemos considerar a **série dos módulos** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, que é uma STNN e à qual podemos aplicar os critérios já vistos. O resultado seguinte mostra que este procedimento é útil:

Teorema 6.41

Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ também converge;}$$

nesse caso,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Demonstração. Para a demonstração, introduzimos a seguinte notação. Se $a \in \mathbb{R}$ é um número real, então

$$a^+ = \max\{a, 0\} = \textit{ parte positiva de } a;$$
$$a^- = -\min\{a, 0\} = \textit{ parte negativa de } a.$$

É imediato verificar que

$$a = a^+ - a^- \quad |a| = a^+ + a^-, \quad a^+ = \frac{|a| + a}{2} \quad \text{e} \quad a^- = \frac{|a| - a}{2}.$$

Em particular, temos a desigualdade:

$$0 \leq a^+, a^- \leq |a|.$$

Esta desigualdade, aplicada à sucessão (a_n), em conjunto com o critério geral de comparação, mostra que se $\sum_n |a_n|$ é convergente então $\sum_n a_n^+$ e $\sum_n a_n^-$ também são séries convergentes. Como

$$\sum_n a_n = \sum_n \left(a_n^+ - a_n^-\right) = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^- ,$$

podemos concluir que $\sum_n a_n$ converge.

Relativamente à sua soma, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_n a_n\right| &= \left|\left(\sum_n a_n^+\right) - \left(\sum_n a_n^-\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_n a_n^+\right| + \left|\sum_n a_n^-\right| && \text{(pela desig. triangular)} \\
&= \sum_n \left(a_n^+ + a_n^-\right) = \sum_n |a_n|, && \text{(porque } a_n^+, a_n^- \geq 0\text{).}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 6.42

Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

A série de módulos correspondente é a série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que converge. Pelo Teorema 6.41, concluímos que a série original converge.

Definição 6.43

Uma série $\sum_n a_n$ diz-se

(i) **absolutamente convergente** se a correspondente série de módulos $\sum_n |a_n|$ é convergente.

(ii) **simplesmente convergente** se é convergente, mas a correspondente série de módulos $\sum_n |a_n|$ é divergente.

Reparem que da prova do Teorema 6.41 vemos que as séries absolutamente convergentes, ou seja tais que $\sum_n |a_n|$ converge, são aquelas para as quais a séries da parte positiva e da parte negativa convergem.

Para STNN, ou seja $\sum_n a_n$ com $a_n \geq 0$, temos $a_n = |a_n|$. Assim, para STNN, se houver convergência, é sempre absoluta.

Exemplo 6.44

(1) Série geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$:

Já sabemos que esta série converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Para vermos se a convergência é absoluta, vemos a série dos módulos:

$$\sum_n |r^n| = \sum_n |r|^n,$$

que converge por ser também geométrica de razão $|r| < 1$. Logo, a série geométrica $\sum_n r^n$ é:

- absolutamente convergente se $|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$;
- divergente se $|r| \geq 1 \Leftrightarrow r \leq -1 \vee r \geq 1$.

(2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente, como vimos acima. Em geral,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{é absolutamente convergente se } p > 1.$$

Se $p \leq 1$, a série dos módulos é divergente, por isso não há convergência absoluta, mas para sabermos se a série diverge ou converge (simplesmente, nesse caso), precisamos de outro tipo de critério.

B6. Séries Alternadas e Critérios de Convergência. O Teorema 6.41 mostra que, dada uma série,

convergência absoluta $\implies$ convergência.

O recíproco não é verdadeiro, ou seja podemos ter $\sum |a_n|$ divergente e $\sum a_n$ convergente. Para construirmos um exemplo vamos recorrer ao seguinte critério de convergência para **séries alternadas**, i.e., séries em que termos consecutivos trocam de sinal, verificam $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Estas series podem sempre escrever-se numa das formas

$$\sum (-1)^n b_n, \qquad \sum (-1)^{n+1} b_n$$

em que $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.45: Critério de Leibniz

Suponha-se que $b_n \geq 0$ é decrescente,

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq 0,$$

e que:

$$\lim b_n = 0$$

(de forma abreviada, escrevemos $b_n \searrow 0$). Então a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

converge.

Demonstração. Vejam uma das referências da bibliografia. A ideia é ver que, sendo s_k a sucessão de somas parciais, temos s_{2k-1} crescente e majorada, e s_{2k} decrescente e minorada, logo convergem e $\lim s_{2k-1} = \lim s_{2k} = s$, dado que $s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} \to 0$. □

Exemplo 6.46

(1) Como
$$b_n = \frac{1}{n} \searrow 0\,,$$
concluímos pelo Critério de Leibniz que a **série harmónica alternada**
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$
é convergente. A série dos módulos correspondente é a série harmónica que diverge. Portanto, a série harmónica alternada é simplesmente convergente. Em geral,
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge absolutamente,} & \text{se } \alpha > 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge simplesmente,} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ diverge,} & \text{se } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge simplesmente. Como
$$b_n = \frac{1}{\ln n} \searrow 0\,,$$
concluímos pelo Critério de Leibniz que a série converge. Por outro lado, a série dos módulos $\sum_n \frac{1}{\ln n}$ é divergente (Exercício: compare com a série harmónica, por exemplo), logo a convergência é simples.

Reparem que o critério de Leibniz só garante a convergência da série, não diz nada sobre o *tipo* de convergência (para isso é sempre preciso analisar a respectiva série dos módulos).

Os seguintes dois resultados ilustram bem a diferença entre o comportamento das séries absolutamente convergentes e o das séries simplesmente convergentes.

Teorema 6.47

Qualquer série obtida por reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente é também absolutamente convergente, com soma igual à soma da série original.

Teorema 6.48: (Riemann)

Sejam $\sum_n b_n$ uma série simplesmente convergente e $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário. Então, existem séries obtidas por reordenação de $\sum_n b_n$ com soma igual a β.

Podem encontrar as demonstrações destes resultados no livro do Spivak ou em qualquer outra referência da bibliografia. Por exemplo, para a série harmónica alternada, que converge simplesmente, teríamos
$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \ldots$$

logo

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - ...$$

'somando termo a termo',

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{8} + ... = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + ...$$

obtém-se uma reordenação da serie harmónica alternada com soma $\frac{3}{2}s \neq s$.

C. SÉRIES DE POTÊNCIAS.

C1. Definições e resultados gerais. Vamos considerar séries da forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

que são uma generalização de polinómios, mas não estão, em geral, definidas em $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, temos uma série numérica, e a primeira questão será para que valores de $x \in \mathbb{R}$ é que esta série é convergente. Começamos por ver um exemplo já nosso conhecido.

Exemplo 6.49

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ – série geométrica de razão $R = x$, logo:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente se $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x| \geq 1 \Leftarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Domínio de convergência: $]-1, 1[$. Calculando a soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ \forall x \in]-1, 1[.$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + ... + (x-2)^n + ...$ é uma série geométrica de razão $R = x - 2$, logo:

- $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ converge absolutamente se $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge se $|x-2| \geq 1 \Leftarrow x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Domínio de convergência: $]1, 3[$. Calculando a soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x},\ \forall x \in]1, 3[.$$

Definição 6.50: Série de potências

Chama-se **série de potências** centrada em $a \in \mathbb{R}$ a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \tag{52}$$

O seu **domínio de convergência** é o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ é convergente} \right\}.$$

Observe-se que ficamos com uma função bem definida $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{ou seja, para cada } x \in D,\ f(x) \text{ é a soma da série para } x \in D.$$

Exemplo 6.51

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n \ .$$

Fixado $x \in \mathbb{R}$, esta série é de facto uma série geométrica de razão $r = (x-1)/2$. Sabemos então que a série é absolutamente convergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow x \in \,]-1, 3[\ ,$$

e também que a série é divergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |x-1| \geq 2 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[\ .$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é: $D = \,]-1, 3[$.

O resultado seguinte diz que o domínio de convergência de uma série de potências centrada em a é sempre um intervalo centrado em a.

Teorema 6.52: Raio de Convergência

Dada uma série de potências $\sum_n a_n (x-a)^n$, existe um número $0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}}$, designado por **raio de convergência**, tal que:

(i) a série é absolutamente convergente quando $|x-a| < R$, i.e., para $x \in \,]a-R, a+R[$;
(ii) a série é divergente quando $|x-a| > R$, i.e., para $x \in \,]-\infty, a-R[\cup]a+R, +\infty[$;
(iii) a série pode convergir ou divergir quando $x = a+R$ e $x = a-R$.

O raio de convergência é dado por

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{53}$$

ou, alternativamente, por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{54}$$

desde que estes limites existam em $\overline{\mathbb{R}}$.

Nota 6.14. Este resultado diz-nos que o domínio de convergência de uma série de potências $\sum_n a_n (x-a)^n$ é sempre um intervalo centrado em a, também designado por **intervalo de convergência**, da forma

$$]a-R, a+R[\quad \text{ou} \quad [a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad]a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad [a-R, a+R[\ .$$

Quando $R = 0$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \{a\}$, como acontece no Exemplo 6.53. Quando $R = +\infty$ o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$, como

acontece no Exemplo 6.54. No Exemplo 6.55 o raio de convergência é $R = 2$ e o domínio de convergência é da forma $D =]a - R, a + R[$.

A demonstração do Teorema 6.52 será feita com base no seguinte lema.

Lema 6.15. *Suponhamos que existe um número real $0 \neq y \in \mathbb{R}$ tal que a série $\sum_n a_n y^n$ é convergente. Então, a série de potências $\sum_n a_n x^n$ é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < |y|$.*

Demonstração do Lema 6.15. O Teorema 6.28 diz-nos que

$$\sum_n a_n y^n \text{ convergente } \implies \lim_{n\to\infty} a_n y^n = 0\,,$$

pelo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |a_n y^n| < 1\,.$$

Logo, para $n \geq N$ temos que

$$|a_n x^n| = |a_n y^n| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^n < \left|\frac{x}{y}\right|^n .$$

Assumindo que $|x| < |y|$, temos que a série geométrica de razão $r = |x/y| < 1$ é convergente. Podemos então concluir, pelo critério de comparação, que a série $\sum_n |a_n\, x^n|$ é convergente, i.e., a série de potências $\sum_n a_n\, x^n$ é absolutamente convergente. □

Demonstração do Teorema 6.52. Substituindo $(x - a)$ por x, podemos assumir que $a = 0$. Consideremos então o conjunto $A \subset \mathbb{R}^+$ definido por

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,:\, r = |x| \text{ e } \sum_n a_n\, x^n \text{ é convergente} \right\} .$$

Tem-se imediatamente que:

- se $A = \emptyset$ então $R = 0$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema;
- se A não é majorado então o Lema 6.15 garante que $R = +\infty$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Suponhamos agora que A é não-vazio e majorado, e seja $R = \sup A \in \mathbb{R}$. Então:

- $R > 0$ porque $R \geq r > 0$ para qualquer $r \in A$;
- se $|x| > R$ então a série $\sum_n a_n\, x^n$ diverge, porque neste caso $r = |x| \notin A$;
- se $|x| < R$ então a série $\sum_n a_n\, x^n$ converge absolutamente, porque neste caso existe $r \in A$ com $|x| < r < R$ e podemos então usar o Lema 6.15.
- o Exemplo 6.55 abaixo, mostra que a série pode ser tanto convergente como divergente quando $|x| = R$.

Isto mostra que $R \in \mathbb{R}$ satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Finalmente, suponhamos que o limite (53) existe. Vamos aplicar o critério da razão à STNN $\sum_n b_n := \sum_n |a_n x^n|$. Para isso, calculamos

$$r = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim \frac{|a_{n+1}|\ |x|}{|a_n|} = |x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

e temos que:

(i) A série $\sum_n |a_n\, x^n|$ converge se $r < 1$, i.e., se:

$$|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff |x| < \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ;$$

(ii) A série $\sum_n |a_n\, x^n|$ diverge se $r > 1$, i.e., se:

$$|x| \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \iff |x| > \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ;$$

Concluímos que o raio de convergência da série $\sum_n a_n\, x^n$ é dado por (53). A segunda igualdade (54) segue da mesma forma aplicando o critério da raiz. □

Vamos agora a exemplos.

Exemplo 6.53

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \,.$$

Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (53):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é apenas o ponto onde a série está centrada, i.e. $D = \{0\}$.

Exemplo 6.54

Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \,.$$

Calculando o seu raio de convergência pela fórmula (53):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim(n+1) = +\infty\,,$$

concluímos que esta série de potências é absolutamente convergente para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Este é assim um exemplo em que o domínio de convergência é $D = \mathbb{R}$.

Exemplo 6.55

Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências

$$\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot (x+3)^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.
Trata-se de uma série de potências centrada em $x = -3$ com coeficientes $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$.
Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (53):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot \frac{(n+2)2^{n+1}}{1} = \lim \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 = 2\,.$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+3 < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \Leftrightarrow x \in \,]-5,-1[\,,$$

e é divergente para

$$|x+3| > 2 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty,-5[\cup]-1,+\infty[\,.$$

Falta ver o que se passa quando $x = -5$ e $x = -1$. Quando $x = -5$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-5} = \sum_n \frac{(-5+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}\,.$$

Trata-se de uma série alternada com $a_n = \frac{1}{n+1} \searrow 0$, pelo que o Critério de Leibniz (Teorema 6.45) garante a sua convergência. A correspondente série de módulos

$$\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_n \frac{1}{n+1}$$

é claramente da mesma natureza que a série harmónica $\sum_n 1/n$, logo divergente. Concluímos assim que a série de potências é simplesmente convergente para $x = -5$.
Quando $x = -1$ temos que

$$\left(\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}\right)_{x=-1} = \sum_n \frac{(-1+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{n+1}\,,$$

que, como já vimos, é uma série divergente. Logo, a série de potências é divergente para $x = -1$.
Resumindo: o domínio de convergência é $D = [-5, -1[$, a série converge absolutamente em $]-5, -1[$ e converge simplesmente em $x = -5$.

À semelhança do exemplo anterior, nos extremos do intervalo de convergência, ou seja, quando $x - a = \pm R$, as séries dos módulos coincidem sempre.

Assim, conclui-se que, se a série divergir num extremo e convergir no outro, esta convergência será simples. E também que, se a série converge absolutamente num dos extremos, também converge absolutamente no outro extremo do intervalo.

Exemplo 6.56

(1) $\sum \frac{1}{(n+1)^2}(x-1)^n$, centrada em 1, $R = 1$
- série converge absolutamente em $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$;
- série diverge em $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$;
- em $x = 0, 2$ converge absolutamente (comparação com $\sum \frac{1}{n^2}$)

Domínio de convergência: $D = [0, 2]$.

(2) $\sum \frac{1}{n2^n}(x+1)^n$, centrada em -1, $R = 2$ (como acima) logo
- série converge absolutamente em $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$;
- série diverge em $|x+1| > 2 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 1$;
- em $x = 1$ diverge, já que obtemos a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, e em $x = -3$ converge pelo critério de Leibniz, já que obtemos a série alternada $\sum \frac{1}{n}(-1)^n$, e a convergência é simples, já que a série dos módulos diverge.

Domínio de convergência: $D = [-3, 1[$.

(3) $\sum \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$, centrada em 0, $R = 1/2$ já que

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim 2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Logo:
- série converge absolutamente em $|x| < 1/2 \Leftrightarrow -1/2 < x < 1/2$;
- série diverge em $|x| > 1/2 \Leftrightarrow x < -1/2 \vee x > 1/2$;
- em $x = \pm 1/2$ diverge, já que se obtêm as séries $\sum \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ e $\sum \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n (-1)^n$, e

  $\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{1/2} \neq 0$, $\quad \lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n (-1)^n$ não existe.

Domínio de convergência: $D =]-1/2, 1/2[$.

(4) $\sum \frac{x^{2n}}{1+4^n}$: fazer $y = x^2$.

Domínio de convergência: $D =]-2, 2[$.

C2. Séries de Taylor. Um série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ determina uma função $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é o domínio de convergência da série de potências:

$$f(x) := a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (x \in D). \tag{55}$$

Exemplo 6.57

Por exemplo, já vimos com a série geométrica:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \ -1 < x < 1,$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ -1 < x < 1,$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-x/2} = \frac{x}{2-x}, \ -1 < x/2 < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$

Ao processo de escrever uma função como uma série de potências chama-se **desenvolver a função em série**. As funções dadas por séries de potências têm uma natureza muito especial, que se deve ao seguinte resultado:

Teorema 6.58

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida pela série de potências (55). Então

(i) f é contínua em qualquer ponto do interior de D, logo é primitivável e uma sua primitiva é dada por primitivação termo-a-termo:

$$\int f(x)dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad (x \in \operatorname{int} D). \tag{56}$$

para algum $C \in \mathbb{R}$.

(ii) f é diferenciável em qualquer ponto do interior de D e a sua derivada é dada por diferenciação termo-a-termo:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}, \quad (x \in \operatorname{int} D). \tag{57}$$

Demonstração. A demonstração deste resultado recorre ao conceito de convergência (uniforme) de sucessões de funções. Por falta de tempo, não poderemos discutir esta noção. Podem encontrar uma discussão detalhada no Capítulo 24 do Spivak, listado na bibliografia. □

O raio de convergência da série (57) (e também da série (56)) é igual ao raio de convergência da série original (55). Podemos, então, diferenciar novamente e concluir que a função f tem derivada de segunda ordem, em qualquer ponto do interior de D. A segunda derivada é dada pela série:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4(x-a)^2 \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1)(x-a)^{n-2} \quad (x \in \operatorname{int} D).$$

É claro que podemos continuar este procedimento, concluindo que:

Corolário 6.59

Se uma função f é dada por uma série de potências então possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do interior do domínio de convergência D.

Notem que a derivada de ordem k é dada pela expressão:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k) \cdot (x-a)^{n-k}, \quad (x \in \text{int } D).$$

Calculando ambos os lados em $x = a$, obtemos:

$$f^{(k)}(a) = a_k \cdot k! \;\Leftrightarrow\; a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

e, portanto, concluímos que:

Corolário 6.60

Se uma função f é dada por uma série de potências centrada em $x = a$ e com domínio de convergência D, então essa série é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (x \in \text{int } D).$$

Definição 6.61: Série de Taylor

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivada de qualquer ordem n em $a \in D$. Chama-se **série de Taylor de f em a** à série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Exemplo 6.62

(1) Com $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, já vimos que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \; -1 < x < 1,$$

logo, do Corolário anterior, a série à direita é a série de Taylor de f no ponto $a = 0$. Temos que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n n!.$$

(2) Com $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, substituindo x por x^2 no exemplo anterior, temos

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \; -1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1,$$

logo temos a série de Taylor de g no ponto $a = 0$ e

$$g^{(n)}(0) = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar, e } \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n \Leftrightarrow g^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)!.$$

(3) Com $h(x) = \dfrac{1}{x-4}$ podemos escrever

$$h(x) = \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-x/4} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(x/4)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}, \quad -4 < x < 4$$

que é a série de Taylor de h no ponto $a = 0$. Se quiséssemos o desenvolvimento em potências de $x - 1$, por exemplo, escrevíamos

$$h(x) = \frac{1}{(x-1)-3} = \frac{1}{y-3}$$

com $y = x - 1$ e seguíamos o mesmo processo.

Nota 6.16. Usando os desenvolvimentos em série dados acima, e a decomposição em fracções simples vista no Cap. 4, pode ver-se que qualquer função racional se pode escrever como série de Taylor num domínio apropriado.

Assim como uma série de potências é o limite quando $n \to \infty$ de polinómios de grau n, uma série de Taylor é o limite quando $n \to \infty$ de polinómios de Taylor de grau n (cf. Definição 3.84 e exemplos seguintes).

Tendo em conta que, à medida que aumenta o grau do polinómio de Taylor de uma função num ponto a, melhor é a aproximação que esse polinómio faz da função numa vizinhança de a, é natural fazermos a seguinte pergunta: quando é que a série de Taylor de uma função num ponto a é igual à própria função numa vizinhança de a? O Teorema de Taylor (Teorema 3.90) diz-nos que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a}(x) \quad \text{com} \quad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

onde θ é um valor entre a e x. Assim:

$$\text{se } \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0 \text{ então } f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Lema 6.17. *Se $a = 0$ e f é a função e^x, $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0.$$

Demonstração. Se $f(x) = e^x$, dado $x \in \mathbb{R}$ e θ entre 0 e x, tem-se

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

pela escala de sucessões. No caso $f(x) = \operatorname{sen} x$ ou $f(x) = \cos x$ é idêntico, usando a estimativa:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0. \qquad \square$$

Conclui-se que as funções e^x, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ coincidem com a sua série de Taylor no respectivo domínio de convergência. Relembrando os polinómios de Taylor para estas funções, temos assim que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})\,;$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})\,;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

A fórmula da soma de uma série geométrica (47) diz-nos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)\,. \tag{58}$$

Os exemplos seguintes mostram como se pode usar esta série de Taylor (verifiquem que se trata de facto da série de Taylor da função $1/(1-x)$) para obter as séries de Taylor das funções $\ln(1+x)$ e $\arctan x$, no ponto $a = 0$.

Exemplo 6.63

Recorrendo à série de Taylor (58)), temos que:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{59}$$

desde que $|-x| < 1$, ou seja $x \in]-1, 1[$. De facto, $R = 1$ é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluímos pois que a função $\frac{1}{1+x}$ é representada por uma série de potências para $|x| < 1$.
Primitivando a série (59), obtemos a série:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} =: f(x),$$

que também tem raio de convergência $R = 1$ (verifiquem!). Assim, obtemos uma função $f(x)$, definida e diferenciável para $|x| < 1$, cuja derivada é $\frac{1}{1+x}$. Como a função $\ln(1+x)$ também tem derivada $\frac{1}{1+x}$, concluímos que:

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para determinar C, calculamos ambos os lados em $x = 0$ obtendo:

$$\ln(1) = C + 0 \;\Rightarrow\; C = 0\,.$$

Concluímos que a função $\ln(1+x)$ admite uma expansão em série de potências, válida para $|x| < 1$, dada por:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)\,. \tag{60}$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função $\ln(1+x)$ em torno de $a = 0$, como também podem verificar directamente calculando as derivadas de $\ln(1+x)$ em $x = 0$.
Por exemplo, com $x = 1/2$ temos

$$\ln(3/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n},$$

e também, por continuidade uma vez que a série converge, com $x = 1$ temos

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{série harmónica alternada}$$

Exemplo 6.64

Recorrendo à série de Taylor (58), temos que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,, \tag{61}$$

desde que $x^2 < 1$, ou seja $x \in]-1,1[$. De facto, $R = 1$ é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluímos pois que a função $\frac{1}{1+x^2}$ é representada por uma série de potências para $|x| < 1$.
Primitivando a série (61), obtemos a série:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} =: f(x)\,,$$

que também tem raio de convergência $R = 1$ (verifiquem!). Assim, obtemos uma função $f(x)$, definida e diferenciável para $|x| < 1$, cuja derivada é $\frac{1}{1+x^2}$. Como a função $\arctan x$ também tem derivada $\frac{1}{1+x^2}$, concluímos que:

$$\arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1)\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. Para determinar C, calculamos ambos os lados em $x = 0$ obtendo:

$$\arctan 0 = C + 0 \;\Rightarrow\; C = 0\,.$$

Concluímos que a função $\arctan x$ admite uma expansão em série de potências, válida para $|x| < 1$, dada por:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)\,.$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função $\arctan x$ em torno de $x = 0$. Notem que o cálculo directo da série de Taylor, através do cálculo das derivadas de $\arctan x$ em $x = 0$, é bastante mais trabalhoso (experimentem!).

A partir das séries de Taylor de e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e da série geométrica saem agora desenvolvimentos em série de muitas outras funções:

Exemplo 6.65

(1) $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}, \quad xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!},$

(2) $\operatorname{sen}(2x) + \cos(3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

$$\operatorname{sen}(2x) + x\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{3^{2n}}{(2n)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}$$

(3) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

[a]

Tomando $i^2 = -1$ e admitindo que este desenvolvimento em série é válido em $\mathbb{C}$, temos $\cosh(ix) = \cos(x)$ e $\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen} x$, e $e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen} x$.

[a] Notem que os desenvolvimentos em série reflectem que $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x$: $\cosh x$ potências pares e $\operatorname{senh} x$ as potências ímpares.

Uma função que pode ser representada por uma série de potências chama-se uma **função analítica**. O estudo das funções analíticas é uma parte da *Análise Complexa*, que vocês estudarão no segundo ano. Esse estudo explicará, por exemplo, porque é que o raio de convergência da série

de Taylor (61) é $R = 1$, algo que não é óbvio olhando para a expressão da função que representa (que é uma função racional definida em todo o $\mathbb{R}$).