Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
LMAC

Introdução à Geometria

Teste 2

19 de Janeiro de 2017 - 18h30

Duração: 1h30

1. Em $\mathbb{P}^2$ considere os pontos

$$P = [1 : 1 : 1], \quad Q_t = [t^2 - 3 : 1 : 0] \quad \text{e} \quad R_s = [0 : s - 5 : 1], \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(2 val.) a) Para cada par (t, s) determine a dimensão do subespaço projectivo $E_{t,s} \subset \mathbb{P}^2$ gerado por P, Q_t e R_s.

Solução:

$$E_{t,s} = \mathbb{P}(W_{t,s})$$

com

$$W_{t,s} = \mathcal{L}\left\{(1, 1, 1), (t^2 - 3, 1, 0), (0, s - 5, 1)\right\}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t^2 - 3 & 1 & 0 \\ 0 & s - 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 - t^2 & 3 - t^2 \\ 0 & s - 5 & 1 \end{bmatrix},$$

temos

$$\dim W_{t,s} = 1 + \operatorname{car} B_{t,s},$$

onde

$$B_{t,s} = \begin{bmatrix} 4 - t^2 & 3 - t^2 \\ s - 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $B_{t,s} \neq 0$ para todo o $t, s \in \mathbb{R}^2$ e

$$\det B_{t,s} = 19 - 6t^2 + s(t^2 - 3),$$

temos

$$\dim E_{t,s} = \dim W_{t,s} - 1 = \operatorname{car} B_{t,s} = \begin{cases} 1, & \text{se } \det B_{t,s} = 0 \\ 2, & \text{c.c.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{se } 19 - 6t^2 + s(t^2 - 3) = 0 \\ 2, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(1 val.) b) Determine a equação que define $E_{2,5}$.

Solução:

$$E_{2,5} = \mathcal{L}\left\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\right\}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_0 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_0 \end{bmatrix},$$

temos

$$E_{2,5} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : \, x_1 = x_0\}.$$

(1 val.) c) Qual a equação da recta projectiva m que passa em Q_0 e R_6?

Solução:

$$Q_0 = [-3 : 1 : 0] \quad \text{e} \quad R_6 = [0 : 1 : 1].$$

Como

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_0 + 3x_1 - 3x_2 \end{bmatrix},$$

temos

$$m = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : \, x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0\}.$$

(1 val.) d) Determine $m \cap E_{2,5}$.

Solução:

$$\begin{cases} x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = 3x_2 \\ x_1 = x_0 \end{cases} \Rightarrow [x_0 : x_1 : x_2] = \left[x_1 : x_1 : \frac{4}{3}x_1\right].$$

Assim,

$$m \cap E_{2,5} = [3 : 3 : 4].$$

(1 val.) e) Indique, se existir, um referencial projectivo que inclua os pontos P, Q_2 e R_6.

Solução:

$$P = [1 : 1 : 1], \quad Q_2 = [1 : 1 : 0] \quad \text{e} \quad R_6 = [0 : 1 : 1].$$

Como os vectores $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ são linearmente independentes podemos, por exemplo, considerar o referencial formado pelos pontos P, Q_2, R_6 e $[2 : 3 : 2]$.

(1 val.) f) Calcule a distância projectiva $d_{\mathbb{P}^2}(P, R_0)$.

Solução:

$$d_{\mathbb{P}^2}(P, R_0) = d_{\mathbb{P}^2}([1 : 1 : 1], [0 : -5 : 1]) = \text{arcos} \left| \langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{26}}(0,-5,1) \right|$$

$$= \text{arcos} \left(\frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{26}} \right).$$

(1 val.) g) Determine a transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ que verifica

$$\tau([1 : 0 : 0]) = Q_{\sqrt{3}}, \quad \tau(Q_{\sqrt{3}}) = R_5, \quad \tau(R_5) = P \quad \text{e} \quad \tau(P) = [1 : 0 : 0].$$

Solução: $\tau([x_0 : x_1 : x_2]) = [T(x_0, x_1, x_2)]$ onde

$$T(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & c \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Como $\tau([1 : 1 : 1]) = [1 : 0 : 0]$, temos, por exemplo, $a = b = -1$ e $c = 1$, pelo que

$$T(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ou seja $\tau([x_0 : x_1 : x_2] = [x_2 : x_2 - x_0 : x_2 - x_1]$.

(1 val.) h) Indique, se existirem, os pontos fixos de τ.

Solução: Os valores próprios de

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

são as raízes do polinómio $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$. O espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = 1$ (o único valor próprio real) é $\mathcal{L}\{(1,0,1)\}$, pelo que τ tem um único ponto fixo: o ponto $[1:0:1]$.

2. Sejam $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma meia volta e $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ uma isometria inversa com pontos fixos em $\mathbb{H}$ tais que

$$f(i) = g(i) = 2i.$$

(2 val.) a) Determine as expressões de f e g e indique os seus conjuntos de pontos fixos.

Solução: Como f é uma isometria directa de $\mathbb{H}$ então f é da forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

Então $f(i) = 2i$ implica

$$f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = 2i \Leftrightarrow b = -2c \quad \text{e} \quad a = 2d.$$

Como f é uma meia volta, temos $f^2 = \text{id}$, pelo que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d^2-2c^2 & -6cd \\ 3cd & d^2-2c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

para algum $k \in \mathbb{R}$, e então

$$cd = 0 \quad \text{e} \quad 4d^2 - 2c^2 = d^2 - 2c^2.$$

Se $c = 0$ então também $d = 0$ o que é impossível. Concluimos assim que $d = 0$ e

$$f(z) = -\frac{2}{z}.$$

O único ponto de $\mathbb{H}$ fixo por esta isometria é o ponto $z_0 = \sqrt{2}i$.

Como g é uma isometria inversa de $\mathbb{H}$ então g é da forma

$$f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc < 0$.

Então $g(i) = 2i$ implica

$$f(i) = \frac{-ai+b}{-ci+d} = 2i \Leftrightarrow b = 2c \quad \text{e} \quad a = -2d.$$

Como g é uma isometria inversa com pontos fixos em $\mathbb{H}$ temos que é uma reflexão e então $g^2 = \text{id}$. Assim

$$g^2(z) = \frac{(4d^2 + 2c^2)z - 2cd}{-cd\,z + 2c^2 + d^2} = z, \quad \forall z \in \mathbb{H}$$

pelo que

$$cd = 0 \quad \text{e} \quad 4d^2 + 2c^2 = d^2 + 2c^2.$$

Se $c = 0$ então também $d = 0$ o que é impossível. Concluimos assim que $d = 0$ e

$$f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

O conjunto de pontos fixos desta isometria é a recta hiperbólica de equação $|z| = \sqrt{2}$.

(2 val.) b) Calcule a distância hiperbólica entre i e $2i$ e indique o ponto médio do segmento de recta hiperbólico que une estes dois pontos.

Solução:

$$d_{\mathbb{H}}(i, 2i) = 2\,\text{arctgh}\,\delta_{\mathbb{H}}(i, 2i) = 2\,\text{arctgh}\left(\frac{|i - 2i|}{|i + 2i|}\right) = 2\,\text{arctgh}\left(\frac{1}{3}\right).$$

O segmento de recta que une i a $2i$ está contido na recta de equação Re$z = 0$, pelo que o ponto médio entre estes dois pontos é da forma $M = ai$ com $1 < a < 2$.
Se X é um ponto fixo de g então, como $g(i) = 2i$, temos

$$d_{\mathbb{H}}(i, X) = d_{\mathbb{H}}(g(i), g(X)) = d_{\mathbb{H}}(2i, X)$$

pelo que todos os pontos da recta hiperbólica m de equação $|z| = \sqrt{2}$ são equidistantes de i e $2i$. Assim o ponto médio M é o ponto de intersecção de m com a recta hiperbólica Re$z = 0$, pelo que $M = \sqrt{2}i$.

Alternativamente, $M = ai$ com $1 < a < 2$ verifica

$$d_{\mathbb{H}}(ai, i) = d_{\mathbb{H}}(ai, 2i) \Leftrightarrow \delta_{\mathbb{H}}(ai, i) = \delta_{\mathbb{H}}(ai, 2i) \Leftrightarrow \frac{|ai - i|}{|ai + i|} = \frac{|ai - 2i|}{|ai + 2i|}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|a - 1|}{a + 1} = \frac{|a - 2|}{a + 2} \Leftrightarrow \frac{a - 1}{a + 1} = \frac{2 - a}{a + 2} \Leftrightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

(1 val.) c) Sendo $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ a isometria que fixa todos os pontos da recta hiperbólica de equação $|z - 1| = 2$, determine $h(1 + i)$.

Solução:

O ponto $1 + i$ pertence à recta hiperbólica n de equação Re $z = 1$ que é perpendicular à recta ℓ de equação $|z - 1| = 2$ (fixa por h). Assim $h(n) = n$ pelo que $h(1 + i) \in n$, ou seja

$$h(1 + i) = 1 + ai$$

com $a > 0$.

Então, como $\ell \cap n = \{1 + 2i\}$ temos

$$d_{\mathbb{H}}(1 + i, 1 + 2i) = d_{\mathbb{H}}(h(1 + i), h(1 + 2i)) = d_{\mathbb{H}}(1 + ai, 1 + 2i),$$

pelo que

$$\delta_{\mathbb{H}}(1+i,1+2i) = \delta_{\mathbb{H}}(1+ai,1+2i) \Leftrightarrow \frac{|1+i-(1+2i)|}{|1+i-(1-2i)|} = \frac{|1+ai-(1+2i)|}{|1+ai-(1-2i)|} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{a-2}{a+2},$$

e então $a = 4$. Assim $h(1+i) = 1+4i$.

Alternativamente, como h é a reflexão na recta ℓ de equação

$$|z-1| = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) = 4 \Leftrightarrow z = 1 + \frac{4}{\overline{z}-1} \Leftrightarrow z = \frac{\overline{z}+3}{\overline{z}-1},$$

e esta recta hiperbólica é fixa por h, temos

$$h(z) = z \Leftrightarrow |z-1| = 2 \Leftrightarrow z = \frac{\overline{z}+3}{\overline{z}-1},$$

pelo que

$$h(z) = \frac{\overline{z}+3}{\overline{z}-1}$$

e então $h(1+i) = 1+4i$.

3. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(1,5 val.) a) Existem pontos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1$ (com os três primeiros distintos) e uma transformação projectiva $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ tal que

$$[A, B; C, D] \neq [\tau(A), \tau(B); \tau(C), \tau(D)].$$

Solução: Falso. Se $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é uma transformação projectiva e

$$A' := \tau(A), \quad B' := \tau(B), \quad C' := \tau(C) \quad D' := \tau(D)$$

então, como existe uma transformação projectiva que leva os pontos A, B, C, D nos pontos A', B', C', D', temos necessariamente

$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Alternativamente, podemos provar facilmente este resultado. Se $\phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é uma transformação projectiva tal que

$$\phi(A) = [1:0], \quad \phi(B) = [0:1] \quad \text{e} \quad \phi(C) = [1:1],$$

então $[A, B; C, D] := \phi(D)$. Se $\tau : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ é uma transformação projectiva e

$$A' := \tau(A), \quad B' := \tau(B), \quad C' := \tau(C) \quad \text{e} \quad D' := \tau(D)$$

então

$$(\phi \circ \tau^{-1})(A') = [1:0], \quad (\phi \circ \tau^{-1})(B') = [0:1] \quad \text{e} \quad (\phi \circ \tau^{-1})(C') = [1:1],$$

pelo que

$$[A', B'; C', D'] := (\phi \circ \tau^{-1})(D') = \phi(D) = [A, B; C, D].$$

(1,5 val.) b) Para cada $\alpha \in]0,\pi[$ existe um triângulo esférico cuja soma dos ângulos internos é $\pi + \alpha$.

Solução: Verdadeiro. Sejam ℓ e m os círculos máximos de S^2 de equações $z = 0$ e $x = 0$ respectivamente. Seja ainda n o círculo máximo de equação

$$ax + by = 0$$

com $a^2 + b^2 = 1$ e $b > 0$, ou seja, $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$ com $\alpha \in]0,\pi[$. Os três círculos máximos formam um triângulo esférico Δ com ângulos internos

$$\begin{aligned}
&\measuredangle(\ell, m) = \measuredangle((0,0,1),(-1,0,0)) = \frac{\pi}{2}\\
&\measuredangle(\ell, m) = \measuredangle((0,0,1),(-1,0,0)) = \frac{\pi}{2}\\
&\measuredangle(m, n) = \measuredangle((1,0,0),(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)) = \text{arccos}\langle(1,0,0),(\cos\alpha,\sin\alpha,0)\rangle = \alpha.
\end{aligned}$$

Assim, a soma dos ângulos internos de Δ é $\pi + \alpha$.

(3 val.) 4. Seja $\ell \subset \mathbb{H}$ uma recta hiperbólica. Dados dois pontos $z_0, w_0 \in \mathbb{H} \setminus \ell$ determine o mínimo do conjunto

$$A = \{d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(w_0, z) : \ z \in \ell\} \subset \mathbb{R}$$

e indique em que pontos de ℓ é obtido.

Solução:

Se z_0 e w_0 estão em lados opostos de ℓ, o segmento de recta hiperbólico que une z_0 a w_0 intersecta ℓ num único ponto P e

$$d_{\mathbb{H}}(z_0, P) + d_{\mathbb{H}}(w_0, P) = d(z_0, w_0).$$

Como, pela desigualdade triangular temos

$$d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(w_0, z) \geq d(z_0, w_0), \quad \forall z \in \ell,$$

o mínimo do conjunto A é $d(z_0, w_0)$ e este valor é obtido no ponto $P \in \ell$.

Se z_0 e w_0 estão no mesmo lado de ℓ, o segmento de recta hiperbólico que une z_0 a w_0 não intersecta ℓ. No entanto, usando a reflexão R_ℓ na recta ℓ, temos, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{H} \quad d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(w_0, z) &= d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(R_\ell(w_0), R_\ell(z))\\
&= d_{\mathbb{H}}(z_0, z) + d_{\mathbb{H}}(R_\ell(w_0), z) \geq d_{\mathbb{H}}(z_0, R_\ell(w_0)).
\end{aligned}$$

Como z_0 e $R_\ell(w_0)$ estão em lados opostos de ℓ, o segmento de recta hiperbólico que une z_0 a $R_\ell(w_0)$ intersecta ℓ num único ponto Q e então

$$d_{\mathbb{H}}(z_0, Q) + d_{\mathbb{H}}(w_0, Q) = d(z_0, R_\ell(w_0)).$$

Assim, neste caso, o mínimo do conjunto A é $d(z_0, R_\ell(w_0))$ e este valor é obtido no ponto $Q \in \ell$.