Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 9

Equações Vectoriais de 1ª Ordem

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine e^{At}, onde A é a matriz:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(f)** $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **(h)** $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) A matriz A é uma matriz diagonal, pelo que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz A é uma matriz triangular superior. A equação vectorial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, com $\mathbf{y}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, é equivalente ao sistema de equações diferenciais lineares:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações lineares por substituição sucessiva (começando pela primeira equação) obtém-se:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3}{2}ae^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{bmatrix} \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo a solução na forma $\mathbf{X}(t) = S(t)C$, em que C é um vector coluna de constantes (i.e., um vector arbitrário de $\mathbb{R}^3$)

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

obtém-se uma matriz solução fundamental (MSF) de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$:

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Calculando a MSF em $t = 0$

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & e^{4t} & 0 \\ e^{2t} + 6te^{4t} - e^{4t} & 4te^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Começamos por calcular os valores próprios de A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda-4)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 4$$

Temos assim um único valor próprio $\lambda = 2$, cujos vectores próprios associados $v = (a,b)$ são dados por:

$$(A-4I)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 3a+3b=0 \quad \Leftrightarrow \quad b=-a$$

Estes vectores próprios são, pois, da forma $v = a(1,-1)$, com $a \in \mathbb{R}$, de onde se extrai apenas um vector próprio linearmente independente: por exemplo, $v_p = (3,-3)$.

Podemos desde já dizer que a matriz A não é diagonalizável, mas sim semelhante a uma matriz de Jordan com um único bloco:

$$A = SJS^{-1} \qquad \text{com} \qquad J = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para determinar S, determinamos um vector próprio generalizado, $v_g = (a,b)$, a partir de v_p:

$$(A-4I)v_g = v_p \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 3a+3b=-3 \quad \Leftrightarrow \quad b=-a-1$$

Podemos então tomar $v_g = (0,-1)$ (por exemplo). Resulta pois que

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad S^{-1} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a exponencial da matriz tA é dada por:

$$\begin{aligned} e^{tA} = S\,e^{Jt}\,S^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} e^{4t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{4t}}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3t \\ -3 & -3t-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{4t}}{3} \begin{bmatrix} 3-9t & -9t \\ 9t & 3+9t \end{bmatrix} \\ &= e^{4t} \begin{bmatrix} 1-3t & -3t \\ 3t & 1+3t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d) Começamos por calcular os valores próprios de A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 + 10 = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm i$$

Temos assim um par de valores próprios complexos conjugados, $\lambda = \pm i$, cujos vectores próprios associados $v = (a, b)$ são também (vectores complexos) conjugados. Calculando um deles:

$$\begin{aligned} (A - iI)v = 0 \qquad & \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} -3-i & 2 \\ -5 & 3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \qquad (-3-i)a + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{3+i}{2}a \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $\lambda_1 = i$ são, pois, da forma $v = (a, \frac{3+i}{2}a) = \frac{a}{2}(2, 3+i)$, com $a \in \mathbb{R}$, de onde se extrai um vector próprio linearmente independente, por exemplo, $v_1 = (2, 3+i)$. Dado que A é diagonalizável, poderíamos aqui seguir o método da alínea (c) para calcular e^{At}: note que um vector próprio associado a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ é $v_2 = \bar{v}_1 = (2.3-i)$.

No entanto, para evitar cálculos algo fastidiosos com matrizes complexas, seguimos aqui o método alternativo que consiste em determinar uma matriz solução fundamental associada à equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ a partir dos valores e vectores próprios de A.

Uma solução de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{it} \begin{bmatrix} 2 \\ 3+i \end{bmatrix} = \big(\cos t + i \operatorname{sen} t\big) \begin{bmatrix} 2 \\ 3+i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos t + 2i\operatorname{sen} t \\ 3\cos t + 3i\operatorname{sen} t + i\cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2\operatorname{sen} t \\ 3\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo $\operatorname{Re}\mathbf{y}(t)$ e $\operatorname{Im}\mathbf{y}(t)$ duas soluções linearmente independentes, então uma matriz solução fundamental de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é

$$S(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t & 3\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

Como a inversa de $S(t)$ em $t = 0$ é

$$S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}
e^{At} &= S(t)S^{-1}(0) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t & 3\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos t - 6\operatorname{sen} t & 4\operatorname{sen} t \\ 3\cos t - \operatorname{sen} t - 9\operatorname{sen} t - 3\cos t & 6\operatorname{sen} t + 2\cos t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t & 2\operatorname{sen} t \\ -5\operatorname{sen} t & 3\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(e) Tendo em conta que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$$

onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N^3 = \mathbf{0}$$

então N é uma matriz nilpotente (pois N^k é a matriz nula para algum $k \geq p$; no nosso caso, $p = 3$). Como, obviamente, $IN = NI$ então:

$$e^{At} = e^{(I+N)t} = e^{It}e^{Nt}$$

Ora

$$e^{It} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} = e^t I.$$

Por outro lado, como N é nilpotente, a série de e^{Nt} reduz-se à soma finita:

$$\begin{aligned}
e^{Nt} &= I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3t & -2t - \frac{9}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Em conclusão,

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 3t & -2t - \frac{9}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Apresentamos apenas os resultados dos passos da resolução, convidando o aluno a preencher os detalhes deste cálculo. A matriz A é diagonalizável, tendo os valores próprios

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Os vectores próprios associados (isto é, verificando $Av_i = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2$ ou 3) são

$$v_1 = (1, -3, 7), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (1, -1, 1)$$

Desta forma $A = S\Lambda S^{-1}$, com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{\Lambda t}S^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 4e^{2t} + e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} & e^{-t} + 2e^{2t} - 3e^{3t} \\ 3e^{-t} - 3e^{3t} & 6e^{3t} & -3e^{-t} + 3e^{3t} \\ -7e^{-t} + 4e^{2t} + 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} & 7e^{-t} + 2e^{2t} - 3e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(g) A matriz A é uma matriz de Jordan 4×4 com um único bloco de Jordan; como tal,

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(h) Neste caso a matriz A é diagonal por blocos, isto é tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$
A matriz A_1 é um bloco de Jordan 3×3 e, como tal
$$e^{A_1 t} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Como é óbvio,
$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \end{bmatrix}.$$
Tendo em conta que cada termo da série de e^{At},
$$\frac{t^k}{k!}A^k = \frac{t^k}{k!}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \frac{t^k}{k!}A_1^k & 0 \\ 0 & \frac{t^k}{k!}A_2^k \end{bmatrix},$$
é uma matriz diagonal por blocos, então e^{At} é a matriz diagonal por blocos
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sabendo que
$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$
é uma matriz fundamental para o sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, determine
   (a) e^{At}
   (b) $\left.\dfrac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0}$
   (c) A matriz A.
   (d) Uma solução particular de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Começamos por calcular

$$S(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resulta então que:

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

(b) Usando a definição de derivada de uma função matricial,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} (e^{2t}+e^{3t})' & (e^{2t}-e^{3t})' \\ (e^{2t}-e^{3t})' & (e^{2t}+e^{3t})' \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^{2t}+3e^{3t} & 2e^{2t}-3e^{3t} \\ 2e^{2t}-3e^{3t} & 2e^{2t}+3e^{3t} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) Por definição a matriz $X(t) = e^{At}$ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) & \text{para } t \in \mathbb{R} \\ X(0) = I \end{cases}$$

Escrevendo a equação diferencial para $t = 0$ obtém-se $\left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = X'(0) = AX(0) = A$. Desta forma, usando o resultado da alínea (b):

$$A = \left.\frac{d}{dt}e^{At}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Mais genericamente, se $S(t)$ é uma matriz fundamental de um equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (não necessariamente igual à exponencial de At) ainda assim $S'(t) = AS(t)$ e $S(t)$ é invertível, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Assim sendo, $A = S'(t)S^{-1}(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$; em particular:

$$A = S'(0)S^{-1}(0).$$

Esta fórmula permite recuperar A a partir de qualquer MSF de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$; pode, por exemplo, ser usada como verificação de um cálculo de $S(t)$.

(d) Pela fórmula da variação das constantes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_p(t) &= e^{At}\int e^{-At}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= e^{At}\int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t}+e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ e^{-2t}-e^{-3t} & e^{-2t}+e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{2}e^{At}\int \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{3t} & e^{2t}-e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t}+e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Resolva o problema de valor inicial

$$
\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = (1,0,0) \end{cases}
$$

sendo

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Resolução:

Visto A ser uma matriz triangular (neste caso, superior), os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal, ou seja

$$
\det(A-\lambda I)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=2 \ \vee \ \lambda=0 \ \vee \ \lambda=1
$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$, há que determinar um vector não nulo $\mathbf{v} = (a,b,c)$ tal que

$$
(A-2I)\mathbf{v}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b=c=0
$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_2 = 0$, há que determinar um vector não nulo $\mathbf{v} = (a, b, c)$ tal que

$$(A - 0 \cdot I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ e } c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, a, 0) = a(1, 1, 0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_2} = (1, 1, 0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_3 = 1$, há que determinar um vector não nulo $\mathbf{v} = (a, b, c)$ tal que

$$(A - I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = c \text{ e } a = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (0, b, b) = b(0, 1, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_3} = (0, 1, 1)$$

Concluimos que a matriz A é diagonalizável, ou seja

$$A = S\,\Lambda\,S^{-1}$$

em que,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{tA} \;=\; Se^{t\Lambda}S^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ 0 & 1 & e^{t}-1 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Finalmente, a solução do PVI, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1,0,0)$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-0)}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ 0 & 1 & e^{t}-1 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = (1,1,1) \end{cases}$$

Resolução:

Os valores próprios de A são as soluções da equação

$$\det(A-\lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, há que determinar $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(A-2I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = a \end{cases}$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (a,0,a) = a(1,0,1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1,0,1)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$, há que determinar $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(A-3I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (0, 0, c) = c(0, 0, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_2} = (0, 0, 1)$$

Concluimos que a matriz A não é diagonalizável mas é semelhante a uma matriz de Jordan com 2 blocos (o número de vectores próprios linearmente independentes), ou seja

$$A = S\,J\,S^{-1}$$

Como J é 3×3, então os dois blocos só podem ter dimensões 2×2 e 1×1. Tendo em conta que $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade algébrica 2 (ou seja, é um zero de ordem dois do polinómio característico de A, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$) então podemos tomar (por exemplo)

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

a que corresponde

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_1^g} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são os vectores próprios anteriormente calculados e $\mathbf{v_1^g}$ é um vector próprio generalizado gerado a partir de $\mathbf{v}_1$ (associado a $\lambda_1 = 2$ com multiplicidade algébrica 2). Para o calcular há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} b = 1 \\ c = a + 1 \end{cases}$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 1, a + 1) = a(1, 0, 1) + (0, 1, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1^g} = (0, 1, 1)$$

Tem-se então que

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & (t + 1)e^{2t} - e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a solução do PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = (1,1,1)$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-0)}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ e^{2t}-e^{3t} & (t+1)e^{2t}-e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(t+1) \\ e^{2t} \\ (t+2)e^{2t}-e^{3t} \end{bmatrix}$$

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine e^{At} e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = (1,0,0)$.

Resolução:

Os valores próprios de A são as soluções da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; \Big((5-\lambda)(3-\lambda)+1\Big)(4-\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4$$

Para calcular os vectores próprios associados, há que determinar um conjunto de vectores linearmente independentes $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$(A-4I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; a - b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (a,a,c) = (a,a,0) + (0,0,c) = a(1,1,0) + c(0,0,1)$$

donde podemos tomar dois vectores linearmente independentes, como sendo

$$\mathbf{v_1} = (1,1,0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v_2} = (0,0,1).$$

Podemos desde já concluir que a matriz A não é diagonalizável, mas é semelhante a uma matriz de Jordan com dois blocos, isto é

$$A = S\,J\,S^{-1}$$

em que (por exemplo)

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Quando a S, persiste a dúvida de saber se o bloco 2×2 de J está associado ao vector próprio $\mathbf{v}_1$, ou ao vector próprio $\mathbf{v}_2$? Para responder a esta questão, vejamos se conseguimos gerar um valor próprio generalizado a partir de $\mathbf{v}_2$. Se sim, então o bloco de Jordan correspondente será 2×2.

Tentando então resolver a equação de um (hipotético) vector próprio generalizado de v_2:

$$(A-4I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = b \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Como se vê, este sistema de equações é impossível. Concluimos assim que $\mathbf{v}_2$ terá que estar associado a um bloco de Jordan 1×1 e, necessariamente, $\mathbf{v}_1$ vai estar associado a um bloco de Jordan 2×2.

Resulta pois que a matriz S, corresponde a J acima escrita, é da forma:

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_g} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix}$$

em que $\mathbf{v}_g$ é um vector próprio generalizado de $\mathbf{v}_1$. Isto significa que $\mathbf{v}_g$ é solução da equação

$$(A-4I)\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a - b = 1$$

Temos então que

$$\mathbf{v_g} = (a,b,c) = (1+b,b,c) = (1,0,0) + (b,b,0) + (0,0,c) = (1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,0,1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_g} = (1,0,0)$$

Tem-se então que

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} e^{4t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$e^{At} = e^{4t} \begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a solução do PVI $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = (1,0,0)$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-1)}\mathbf{x}(1) = e^{4(t-1)} \begin{bmatrix} t & -(t-1) & 0 \\ t-1 & 1-(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{4(t-1)} \begin{bmatrix} t \\ t-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(t) = (0, 2e^t, e^t)$.

Resolução:

(a) Tendo em conta que A é uma matriz na forma canónica de Jordan (com dois blocos de Jordan):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) Utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{A(t-s)}\,\mathbf{h}(s)\,ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + \int_1^t e^{t-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^s \\ e^s \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t e^{-s} \begin{bmatrix} 1 & t-s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \int_1^t \begin{bmatrix} 2t-2s \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} \int_1^t (2t-2s)\,ds \\ \int_1^t 2ds \\ \int_1^t ds \end{bmatrix} \quad = \quad e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} (2ts - s^2)\big|_{s=1}^t \\ 2s\big|_{s=1}^t \\ s\big|_{s=1}^t \end{bmatrix} \\
&= e^{A(t-1)}\mathbf{y}(1) + e^t \begin{bmatrix} 2t^2 - t^2 - 2t + 1 \\ 2t-2 \\ t-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para concluir o cálculo, resta calcular a primeira parcela:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{t-1}\begin{bmatrix}1 & t-1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}t^2-2t+1\\ 2t-2\\ t-1\end{bmatrix}\\
&= e^{t-1}\begin{bmatrix}t\\1\\1\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}(t-1)^2\\ 2(t-1)\\ t-1\end{bmatrix}\\
&= e^{t-1}\begin{bmatrix}t+e(t-1)^2\\ 2e(t-1)\\ e(t-1)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases}\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)\\ \mathbf{y}(0) = (0,0,0,0)\end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix}0\\2\\0\\0\end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea.

(b) Sendo $\mathbf{y}(t) = \big(y_1(t),\, y_2(t),\, y_3(t),\, y_4(t)\big)$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

Resolução:

(a) Visto a matriz A ser da forma

$$A = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A_1 = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{At} = \begin{bmatrix}e^{A_1 t} & 0\\ 0 & e^{A_2 t}\end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Comecemos por calcular $e^{A_1 t}$, utilizando o método exposto no problema 1.(e). Tendo em conta que $A_1 = -2I + N$, onde

$$N = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad N^2 = 0,$$

então $e^{-2It} = e^{-2t}I$ e

$$e^{Nt} = I + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $(-2I)N = N(-2I)$ então:

$$e^{A_1 t} = e^{-2It}e^{Nt} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora calcular $e^{A_2 t}$. Os valores próprios de A_2 são $1+2i$ e $1-2i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v}_1 = (1, i)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -i)$. Sendo assim

$$A_2 \;=\; S\Lambda S^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e, consequentemente,

$$e^{A_2 t} \;=\; Se^{\Lambda t}S^{-1} \;=\; \frac{e^t}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \;=\; e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{At} \;=\; \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) \end{bmatrix}$$

e a solução geral da equação vectorial homogénea é dada por

$$\mathbf{y}(t) \;=\; e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} c_1\, e^{-2t} \\ 3c_1\, te^{-2t} + c_2\, e^{-2t} \\ c_3\, e^t\cos(2t) + c_4\, e^t\operatorname{sen}(2t) \\ -c_3\, e^t\operatorname{sen}(2t) + c_4\, e^t\cos(2t) \end{bmatrix}$$

com $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) \;&=\; e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds \\
&=\; \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{2s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Resulta pois que $y_2(t) = 1 - e^{-2t}$, pelo que:

$$y_2(3) = 1 - e^{-6}.$$

2 Exercícios Propostos

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At}:

(a) $A = 0$ (b) $A = I$ (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (g) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine a solução geral dos sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = -4x - 3y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -2x + y + 2z \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x - y \\ z' = -x - z \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -z \\ y' = y - 4z \\ z' = -4z \end{cases}$

3. Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$, $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 2 \end{cases}$$

Sugestão: determine uma solução particular constante.

5. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

onde $\mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t})$

7. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

8. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z.

9. Sejam A uma matriz $n \times n$ (de componentes reais ou complexas), e

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mostre que existe

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$$

tal que $A = SJS^{-1}$ sse

$$\begin{array}{lcl} (A - \lambda I)\, v_1 & = & 0 \\ (A - \lambda I)\, v_{i+1} & = & v_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{array}$$

10. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{-At} e^{(A+B)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

Soluções

1. **(a)** $e^{At} = I$ **(b)** $e^{At} = e^t I$ **(c)** $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix}$

(d) $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$ **(e)** $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-6t & 12t \\ -3t & 1+6t \end{bmatrix}$ **(g)** $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

(h) $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\pi t} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5}te^{\pi t} & e^{\pi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & \sqrt{2}te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$ **(i)** $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\operatorname{sen}(4t) \\ \operatorname{sen}(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$

(j) $e^{At} = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) & -2\operatorname{sen}(2t) \\ \operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$

2. **Nota:** as soluções são apresentadas a menos de uma transformação linear da base do espaço de soluções. Para obter uma dessas bases pode-se utilizar vários métodos, produzindo outras tantas respostas equivalentes.

(a) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{-3t} \\ -2e^{2t} & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & e^{2t} \\ e^t & -e^{-t} & 2e^{2t} \\ e^t & e^{-t} & 4e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} \operatorname{sen} t - \cos t \\ \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -\cos t - \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{-4t}\begin{bmatrix} -1/4 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. **(a)** $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{X}(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} -3t+4 \\ 3t-3 \end{bmatrix}$ **(c)**$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}-3}{2} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(f)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(t+1) \\ e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

5. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$

6. **(a)** $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 2te^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t}(t^2+2t) \\ e^{\sqrt{2}t}(t+1) \\ e^{-t}(t+1) \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathsf{sen}\,((\pi t) \\ 1-\mathsf{cos}\,(\pi t) \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1+2e^{t^2/2} \end{bmatrix}$