

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 7

Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine a ordem da EDO, verifique que a função apresentada é solução da equação diferencial, determine a solução particular para as condições iniciais e faça um esboço da solução

(a) $y' = 1 + 4y^2$, $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + c)$, $y(0) = 0$

(b) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(x) = a \cos(\pi x) + b \operatorname{sen}(\pi x)$, $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$

(a) Trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (não linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Assim

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + c)\right)' = 1 + 4\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + c)\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(2x + c)} = 1 + \operatorname{tg}^2(2x + c)$$

Atendendo a que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tem que $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$ a afirmação é verdadeira para todo x e $c \in \mathbb{R}$ e assim $y(x)$ é solução da equação. Para calcular c de modo a que $y(0) = 0$, substituímos na solução x e y por 0, obtendo

$$0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} c \Leftrightarrow c = 0$$

pelo que a solução da equação que verifica a condição dada é $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x)$.

(b) Trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem (linear). Para verificar que a função dada é solução, vamos substituir e verificar que se obtém uma proposição verdadeira. Como

$$y'(x) = -\pi a \operatorname{sen}(\pi x) + \pi b \cos(\pi x), \quad y''(x) = -\pi^2 a \cos(\pi x) - \pi^2 b \operatorname{sen}(\pi x),$$

então

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = -\pi^2 a \cos(\pi x) - \pi^2 b \sin(\pi x) + \pi^2 a \cos(\pi x) + \pi^2 b \sin(\pi x) = 0$$

A afirmação é verdadeira para todo x , a e $b \in \mathbb{R}$ e assim, $y(x)$, é solução da equação. Para calcular as constantes a e b de modo a que $y(\frac{1}{2}) = 1$, $y'(\frac{1}{2}) = 0$, substituímos na solução e na sua derivada x por $1/2$:

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = a \cos \frac{\pi}{2} + b \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ y'(\frac{1}{2}) = -\pi a \sin \frac{\pi}{2} + b\pi \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

pelo que a solução da equação que verifica as condições dadas é $y(x) = \sin(\pi x)$.

2. Determine as soluções das seguintes equações diferenciais:

(a) $y' = -\sin(\pi x)$

(b) $y' = xe^{x^2/2}$ com $y(1) = 2$.

Resolução:

(a) Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = - \int \sin(\pi x)dx \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + c$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) Primitivando ambos os membros da equação

$$\int y'(x)dx = \int xe^{x^2/2}dx \Leftrightarrow y(x) = e^{x^2/2} + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Usando a condição inicial, $2 = y(1) = e^{1/2} + c$, pelo que $c = 2 - e^{1/2}$. A solução do problema de valor inicial é, pois:

$$y(x) = e^{x^2/2} - e^{1/2} + 2.$$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ b) $\psi' = \psi - t$

c) $x \frac{dy}{dx} + 2y = (x - 2)e^x$ d) $(1 + y^2) \frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$

Resolução:

(a) Trata-se de uma equação linear em y que admite um factor integrante, $\mu(x)$, dado pela equação

$$\mu' = \mu \Leftrightarrow \mu(x) = e^x$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ , obtemos

$$\begin{aligned} e^x \frac{dy}{dx} + e^x y &= (2 + 2x)e^x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = (2 + 2x)e^x \\ \Leftrightarrow e^x y &= \int (2 + 2x)e^x dx + c \\ \Leftrightarrow e^x y &= 2xe^x + c \\ \Leftrightarrow y(x) &= 2x + ce^{-x} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(b) A equação é equivalente a

$$\psi' - \psi = -t \tag{1}$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(t)$ dado por

$$\mu' = -\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -1 \Leftrightarrow \log \mu = -t \Leftrightarrow \mu = e^{-t}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-t}\psi) &= -te^{-t} \Leftrightarrow e^{-t}\psi = -\int te^{-t}dt + c \Leftrightarrow \psi(t) = e^t(te^{-t} + e^{-t} + c) \\ \Leftrightarrow \psi(t) &= t + 1 + ce^t \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(c) Para $x \neq 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{(x-2)}{x}e^x \tag{2}$$

Trata-se de uma equação linear, e admite um factor integrante, $\mu(x)$ dado por

$$\mu' = \frac{2}{x}\mu \Leftrightarrow \mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (2) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 y) &= (x^2 - 2x)e^x \Leftrightarrow x^2 y = \int (x^2 - 2x)e^x dx + c \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} \left((x^2 - 4x + 4)e^x + c \right) \\ &\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{x^2} \left((x - 2)^2 e^x + c \right) \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$.

(d) A equação é equivalente a

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2} x = \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y \quad (3)$$

Esta equação admite um factor integrante, $\mu(y)$ dado por

$$\mu' = \frac{1}{1+y^2} \mu \Leftrightarrow \log \mu = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} y$$

Multiplicando ambos os membros da equação (3) por μ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(e^{\operatorname{arctg} y} x) &= \frac{1}{1+y^2} \operatorname{arctg} y e^{\operatorname{arctg} y} \Leftrightarrow e^{\operatorname{arctg} y} x = \int \operatorname{arctg} y e^{\operatorname{arctg} y} \frac{1}{1+y^2} dy \\ &\Leftrightarrow e^{\operatorname{arctg} y} x = \operatorname{arctg} y e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c \\ &\Leftrightarrow x(y) = \operatorname{arctg} y - 1 + ce^{-\operatorname{arctg} y} \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}$. Note que a primitiva foi calculado usando a substituição $u = \operatorname{arctg} y$, $\frac{du}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$.

4. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial

a) $xy' = 2y + x^3 e^x$, $y(1) = 0$.

b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2} v - \frac{1}{1+u^2} = 0$, $v(0) = 1$.

c) $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x$, $y(\pi) = 0$

Resolução:

(a) Para $x \neq 0$, a equação é equivalente a

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$

Trata-se de uma equação linear em y que admite como factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x}y &= e^x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = e^x \\ \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} &= e^x + c \\ \Leftrightarrow y(x) &= x^2(e^x + c) \end{aligned}$$

Dado que $y(1) = 0$, teremos

$$0 = e + c \Leftrightarrow c = -e$$

e a solução do PVI é

$$y(x) = x^2(e^x - e)$$

(b) A equação é equivalente a

$$\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v = \frac{1}{1+u^2} \quad (4)$$

que é uma equação linear em v e admite um factor integrante, $\mu(u)$, dado pela equação

$$\mu' = \frac{2u}{1+u^2}\mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2u}{1+u^2} \Leftrightarrow \log \mu = \log(1+u^2) \Leftrightarrow \mu = 1+u^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação (4) por μ obtemos

$$\begin{aligned} (1+u^2)\frac{dv}{du} + 2uv &= 1 \Leftrightarrow \frac{d}{du}\left((1+u^2)v\right) = 1 \\ \Leftrightarrow (1+u^2)v &= u + c \\ \Leftrightarrow v(u) &= \frac{u+c}{1+u^2} \end{aligned}$$

Dado que

$$1 = v(0) = c,$$

a solução do PVI é

$$v(u) = \frac{u + 1}{u^2 + 1}$$

(c) Para $x \neq 0$ a equação pode ser escrita na forma

$$y' - \frac{1}{x}y = x \operatorname{sen} x$$

que é uma equação linear em y e admite um factor integrante, $\mu(x)$, dado pela equação

$$\mu' = -\frac{1}{x}\mu \Leftrightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ obtemos

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \frac{1}{x}y' + \left(\frac{1}{x}\right)'y = \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)' = \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\cos x + c$$

$$\Leftrightarrow y(x) = -x \cos x + cx$$

Dado que $y(\pi) = 0$ tem-se

$$0 = \pi + c\pi \Leftrightarrow c = -1,$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(x) = -x \cos x - x$$

5. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30°C e que a substância arrefece de 100°C para 70°C em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40° .

Resolução:

Aplicando a lei do arrefecimento de Newton ao nosso caso:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30),$$

onde t é medido em minutos, $k > 0$ é o módulo da constante de arrefecimento e $T(t)$ é a função que representa a temperatura da substância no instante t . Resulta pois que $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\frac{dT}{dt} + kT = 30k, \quad T(0) = 100$$

Trata-se de uma equação linear não homogênea, que admite como factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{kt} T \right) = 30k e^{kt} \Leftrightarrow e^{kt} T = 30e^{kt} + c \Leftrightarrow T(t) = 30 + c e^{-kt}, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Como $T(0) = 100$, concluímos que

$$T(t) = 30 + 70e^{-kt}$$

Atendendo também a que $T(15) = 70$, resulta que

$$70 = 30 + 70e^{-15k} \Leftrightarrow e^{-15k} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow k = \frac{\log(7/4)}{15} = \frac{\log 7 - \log 4}{15} \approx 0,0373$$

Pretende-se determinar o instante em que a temperatura da substância é de 40°C , isto é,

$$\begin{aligned} T(t) = 40 &\Leftrightarrow 30 + 70e^{-kt} = 40 \Leftrightarrow -kt = \log 1/7 = -\log 7 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{\log 7}{k} \approx 52,2 \end{aligned}$$

Conclui-se que a temperatura da substância deverá atingir o valor de 40°C ao fim de, aproximadamente, 52 minutos.

6. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberta. O perito da policia chegou à 1:00h da madrugada e, imediatamente, mediu a temperatura do cadáver, que era de $34,8^\circ\text{C}$. Uma hora mais tarde a temperatura era $34,1^\circ\text{C}$. A temperatura do quarto onde se encontrava a vítima manteve-se constante a 20°C . Estime a hora a que se deu o crime, admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de $36,5^\circ\text{C}$.

Resolução:

Sendo $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t , o modelo matemático para a lei de arrefecimento de Newton é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

onde T_a é a temperatura ambiente e $-k < 0$ é a constante de proporcionalidade (do arrefecimento do corpo). Temos pois, como no problema anterior, que

$$T' + kT = 20k \Leftrightarrow (e^{kt}T)' = 20ke^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Tomando $t_0 = 0$ o instante em que a primeira medição de temperatura foi feita, temos que

$$T(0) = 34.8 \Leftrightarrow c = 14.8$$

e assim

$$T(t) = 20 + 14.8 e^{-kt}$$

Para determinar a taxa de arrefecimento, k , usamos a outra medição:

$$T(1) = 34.1 \Leftrightarrow 34.1 = 20 + 14.8 e^{-kt} \Leftrightarrow k = -\log \frac{14.1}{14.8} \approx 0.0485$$

e então

$$T(t) = 20 + 14.8 e^{-0.0485t}$$

Para saber quando o crime foi cometido, pretende-se saber a que horas a temperatura do corpo era de 36.5 C, queremos determinar t tal que

$$T(t) = 36.5 \Leftrightarrow 36.5 = 20 + 14.8 e^{-0.0485t} \Leftrightarrow t = -\frac{\log \frac{16.5}{14.8}}{0.0485} \approx -2.24$$

Conclui-se que o crime foi cometido por volta das 22h 45min.

7. No instante $t = 0$ a quantidade de um certo material radioativo armazenado é x_0 . A equação para $x(t)$, a quantidade de material radioativo é $\frac{dx}{dt} = -ax$, onde $a > 0$ é uma constante.

- Encontre a solução $x(t)$
- Calcule a “meia-vida”, ou seja o tempo necessário para que a concentração inicial x_0 se reduza a metade. Note que a “meia-vida” não depende da concentração inicial.

Resolução:

(a) Sendo a equação do decaimento radioactivo linear homogénea, tem-se que

$$\frac{dx}{dt} = -ax \Leftrightarrow x(t) = ce^{-at}$$

e dado que $x(0) = x_0$, a solução do problema é $x(t) = x_0e^{-at}$.

(b) Pretende-se saber o instante T em que se obtém a meia vida, isto é, o instante em que a quantidade de substância radioactiva é metade da quantidade inicial. Ou seja

$$x(T) = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow x_0e^{-aT} = \frac{x_0}{2} \Leftrightarrow T = \frac{\log 2}{a}$$

8. Considere a equação diferencial

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

(a) Seguindo a sugestão, fazemos $v(x) = [y(x)]^{-4}$ pelo que

$$\frac{dv}{dx} = -4y^{-5} \frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $-4y^{-5}$, obtém-se:

$$2x \underbrace{\left(-4y^{-5} \frac{dy}{dx} \right)}_{\parallel \frac{dv}{dx}} + 2x \left(-4 \underbrace{y^{-5} y^5}_{\parallel 1} \right) + 4 \underbrace{y^{-5} y}_{\parallel v} = 0,$$

ou seja,

$$2x \frac{dv}{dx} - 8x + 4v = 0$$

Dividindo por $2x$ e rearranjando os termos, obtém-se a equação linear não homogénea:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = 4 \quad (5)$$

O seu factor integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$$

Multiplicando todos os termos da equação (5) por $\mu(x)$

$$x^2 \frac{dv}{dx} + 2xv = 4x^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(x^2v) = 4x^2 \Leftrightarrow x^2v = \frac{4x^3}{3} + c \Leftrightarrow v(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

Finalmente, desfazendo a mudança de variável,

$$y^{-4}(x) = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow y(x) = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}}} = \pm \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 + c}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

(b) Dado que $y(1) = 1$, conclui-se que $y(x)$ é positivo e $c = -1$. Como tal a solução do PVI é dada por

$$y(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{4x^3 - 1}}$$

O domínio de diferenciabilidade da função $y(x)$ é

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4x^3 - 1 \neq 0 \text{ e } \frac{3x^2}{4x^3 - 1} > 0 \right\} = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo** $I \subset D$, tal que $1 \in I$, ou seja:

$$I = \left] \sqrt[3]{1/4}, +\infty \right[$$

9. Encontre as soluções da equação $y' \sin t + y \cos t = 1$ no intervalo $]0, \pi[$. Mostre que só há uma solução tal que $\lim_{t \rightarrow 0} y(t)$ é finito e indique um problema de valor inicial que tenha essa solução.

Resolução:

É de notar que $(\sin t)' = \cos t$ e, como tal, a equação pode ser escrita na forma

$$y' \sin t + y(\sin t)' = 1 \Leftrightarrow (y \sin t)' = 1 \Leftrightarrow y \sin t = t + C \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Dado que para $t \in]0, \pi[$ a função $\sin t$ não se anula, resulta que a solução geral da

equação (definida nesse intervalo) é dada por

$$y(t) = \frac{t + C}{\operatorname{sen} t},$$

com $C \in \mathbb{R}$. Como para $C \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{sen} t} + C \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} = 1 + C \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} t} = 1 \pm \infty = \pm \infty$$

então o limite da solução quando $t \rightarrow 0$ só é finito quando $C = 0$; nesse caso,

$$y(t) = \frac{t}{\operatorname{sen} t} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

A condição inicial a acrescentar a equação diferencial pode ser a seguinte:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Obtenha a solução $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte equação:

$$y(t) = 1 + \int_1^t sy(s) ds. \quad (6)$$

Resolução:

Derivando ambos os membros da equação integral (6) em ordem a t e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtém-se:

$$y'(t) = \left(\int_1^t sf(s) ds \right)' \Leftrightarrow y'(t) = ty(t)$$

Desta forma, $y(t)$ é solução da equação linear homogênea

$$y' = ty \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = Ke^{\int t dt} = Ke^{\frac{t^2}{2}}$$

onde $K \in \mathbb{R}$. Atendendo a que, pela mesma equação (6), $y(1) = 1$ tem-se que $Ke^{1/2} = 1$, ou seja, $K = e^{-1/2}$. Assim, a solução da equação integral é

$$y(t) = e^{\frac{t^2-1}{2}}$$

e está definida para $t \in \mathbb{R}$.

2 Exercícios Propostos

1. Diga qual das seguintes equações é uma equação linear

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} x - y' = xy & \text{(b)} y' + xy = \sqrt{x} \\ \text{(c)} y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & \text{(d)} x \operatorname{sen} x = x^2 - y' \end{array}$$

2. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{dy}{dt} = -ye^t & \text{(b)} y' = x^3 - 2xy & \text{(c)} t^2 \frac{dy}{dt} + 3ty = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \quad t < 0 \\ \text{(d)} \frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x & \text{(e)} xy' + y = 3x \cos(2x) & \text{(f)} t \frac{dy}{dt} + 2y = e^t, \quad t > 0 \\ \text{(g)} \frac{dy}{dx} - 3y = e^{3x} \operatorname{sen} x & \text{(h)} \frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = 1 & \text{(i)} \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t \right) + t \cos t \end{array}$$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 1 & \text{(b)} \frac{dy}{dt} + 4t^3 y = t^3, \quad y(0) = 1 \\ \text{(c)} \frac{dy}{dt} + y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi) = 1 & \text{(d)} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t} y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0 \\ \text{(e)} \cos^2 x \frac{dy}{dx} + y - 1 = 0, \quad y(0) = 5 & \text{(f)} \frac{dy}{dt} = y \left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t \right) + t \cos t, \quad y(\pi) = 0 \\ \text{(g)} \begin{cases} x' + h(t)x - t = 0 \\ x(-1) = 2 \end{cases} & \text{tomando-se } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

4. Determine a intensidade da corrente, $I(t)$, como uma função de t (em segundos), sabendo que I verifica a equação diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \operatorname{sen}(2t)$$

onde R e L são constantes não nulas.

5. Quando deixamos cair uma pedra, assumindo que a resistência do ar é desprezável, a aceleração do movimento, $\frac{d^2y}{dt^2} = y''$ é constante, igual a $-g$, sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade na superfície terrestre. Escreva uma equação diferencial para y , onde y é a altura da pedra no instante t . Se a pedra estava na posição y_0 , com velocidade inicial v_0 , no instante $t = 0$, mostre que a solução da equação é $y = -gt^2/2 + v_0t + y_0$. Quanto tempo demora uma queda de 100 metros de uma pedra largada com velocidade nula? E uma queda de 200 metros?

6. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1 \quad y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Determine a solução geral, na forma implícita, da equação diferencial e resolva o problema.

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$.

7. Considere a equação diferencial

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty - y^3 = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-2}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.
- (c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidas e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

8. Resolva os seguintes problemas de valor inicial, envolvendo equações de Bernoulli:

- (a) $y' + 3x^2y = x^2y^3$, $y(0) = 1$
- (b) $y' + \frac{y}{x} = x\sqrt{y}$, $y(1) = 1$
- (c) $y' = 5y - \frac{4x}{y}$, $y(0) = -\frac{1}{5}$
- (d) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$, $y(1) = -1$

9. Obtenha a solução da equação

$$y' = \frac{y}{t} - 2y^2$$

com condição inicial $y(t_1) = y_1 > 0$ para algum $t_1 > 0$. Mostre que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

10. Considere a equação de Riccati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{7}$$

- (a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Riccati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.
- (b) Determine a solução da equação (7).

11. (a) Mostre que a substituição $z = 1/P$ transforma a equação logística

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

na equação linear

$$z' + kz = \frac{k}{M}$$

- (b) Resolva a equação diferencial para obter uma expressão para $P(t)$,

3 Soluções de 1.2

1. (a), (b) e (d) sim; (c) não

2. (a) $y(t) = ce^{-t}$ (b) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$ (c) $y(t) = \frac{c - \cos t}{t^3}$
 (d) $y(x) = 2x + ce^{-x}$ (e) $y(x) = \frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{4x} \cos(2x) + \frac{c}{x}$ (f) $y(t) = \frac{e^t(t-1)+c}{t^2}$
 (g) $y(x) = e^{3x}(c - \cos x)$ (h) $y(t) = \frac{\operatorname{sen} x + c}{\cos x} = \operatorname{tg} x + c \operatorname{sec} x$ (i) $y(t) = (t^2 + ct) \cos t$
 com $c \in \mathbb{R}$, em todas as alíneas.

3. (a) $y(x) = 0$ (b) $y(t) = \frac{1}{4}(1 + 3e^{-t^4})$ (c) $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{\pi-t})$
 (d) $y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}$ (e) $y(x) = 1 + 4e^{-\operatorname{tg} x}$ (f) $y(t) = (t^2 - \pi t) \cos t$
 (g) $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2+3}{2} & \text{se } t \leq 0 \\ 1 + \frac{1}{2}e^{-t^2/2} & \text{se } t > 0 \end{cases}$

Sugestão para (g): a solução deve verificar $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} x(t)$ (continuidade em $t = 0$).

4. $I(t) = \frac{1}{4L^2 + R^2} (R \operatorname{sen}(2t) - 2L \cos(2t)) + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

5. O problema de valor inicial para a altura da pedra, $y(t)$, é:

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

As respostas são (aproximadamente): 4.5s (queda de 100m) e 6.4s (queda de 200m).

6. A solução geral na forma implícita é $\operatorname{sen} y = cx^2 + \frac{1}{3x}$, onde $c \in \mathbb{R}$. A solução do P.V.I. é $y(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3x}\right)$, para $x \in]\frac{1}{3}, +\infty[$.

7. (a) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ ou $y(t) = -\sqrt{\frac{5t}{2+5ct^5}}$ (b) $y(t) = \sqrt{\frac{5t}{2+3t^5}}$ e $I_{\text{Max}} =]0, \infty[$

$$8. \quad \text{(a)} \quad y(x) = \sqrt{\frac{3}{1+2e^{2x^3}}} \quad \text{(b)} \quad y(x) = \left(\frac{x^2}{5} + \frac{4}{5\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\text{(c)} \quad y(x) = -\frac{\sqrt{20x+2}-e^{10x}}{5} \quad \text{(d)} \quad y(x) = -\left(\frac{3x^4}{5} + \frac{2}{5x}\right)^{-1/2}$$

$$9. \quad y(t) = \frac{y_1 t}{y_1 t^2 + t_1 - y_1 t_1^2}$$

$$10. \quad \text{(a)} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t} - \varphi - \varphi^2 \text{ é equivalente à equação } \frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{2}{t} + 1\right)\psi = -\psi^2$$

$$\text{(b)} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{-t}}{t^2 \left(\int \frac{e^{-t}}{t^2} dt + C \right)}$$