Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 6

Singularidades, Resíduos e Teorema dos Resíduos.

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções. Calcule os resíduos correspondentes.

$$\textbf{a)}\ f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z-\pi} \qquad \textbf{b)}\ f_2(z) = \frac{z}{(z^2+2)^2} \qquad \textbf{c)}\ f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)}$$

$$\textbf{d)}\ f_4(z) = \frac{\mathrm{sen} z}{z^4(1-z^2)} \qquad \textbf{e)}\ f_5(z) = z^2 \exp\frac{1}{z} \qquad \textbf{f)} f_6(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}\, z} - \mathrm{sen}\,\frac{1}{z}$$

Resolução:

(a) f_1 é o quociente de funções inteiras, logo é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\pi\}$. Como

$$\lim_{z\to\pi} (z-\pi) f_1(z) = \lim_{z\to\pi} (1-\cos z) = 1 - \cos\pi = 2 \neq 0,$$

concluímos que π é um pólo simples e Res $(f_1, \pi) = 2$.

(b) Visto f_2 ser uma função racional, será analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$. Note-se que a função f_2 pode ser escrita na forma

$$f_2(z) = \frac{z}{(z-\sqrt{2}i)^2(z+\sqrt{2}i)^2}$$

e como tal $\pm i\sqrt{2}$ são candidatos a pólos de segunda ordem. De facto

$$\lim_{z\to\sqrt{2}i} (z-\sqrt{2}i)^2 f_2(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}i} \frac{z}{(z+\sqrt{2}i)^2} = \frac{\sqrt{2}i}{(2\sqrt{2}i)^2} = -\frac{i\sqrt{2}}{8}$$

pelo que $\sqrt{2}i$ é um pólo de segunda ordem, e

$$\mathrm{Res}(f_2, \sqrt{2}i) = \lim_{z\to\sqrt{2}i} \Big((z-\sqrt{2}i)^2 f_2(z)\Big)' = \lim_{z\to\sqrt{2}i} \frac{(z+\sqrt{2}i)^2 - 2z(z+\sqrt{2}i)}{(z+\sqrt{2}i)^4} = 0$$

Analogamente se conclui que $-\sqrt{2}i$ é um pólo de segunda ordem e Res$(f_2, -\sqrt{2}i) = 0$

(c) Mais uma vez f_3 é uma função racional, pelo que f_3 é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$. Note-se que podemos escrever

$$f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z)(1+z)}$$

pelo que 0 é candidato a pólo de ordem 7, e ± 1 são candidatos a pólos simples. De facto

$$\lim_{z \to 0} z^7 f_3(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1-z^2} = 1$$

pelo que 0 é um pólo de ordem 7, e

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f_3(z) = \lim_{z \to 1} \frac{-1}{z^7(z+1)} = -\frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f_3(z) = \lim_{z \to -1} \frac{-1}{z^7(z+1)} = -\frac{1}{2}$$

donde 1 e -1 são pólos simples, podendo ser concluido de imediato que Res$(f_4, \pm 1) = -\frac{1}{2}$. Para calcular o resíduo de f_3 em 0 e para evitar ter que calcular 6 derivadas, vamos recorrer ao desenvolvimento em série de f_3 em torno de $z_0 = 0$. Assim, para $|z| < 1$

$$f_3(z) = \frac{1}{z^7(1-z^2)} = \frac{1}{z^7} \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-7} = \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^1} + z + z^3 + ...$$

Confirma-se que 0 é um pólo de ordem 7, e Res$(f, 0) = 1$.

(d) Como anteriormente, f_4 é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$. Note-se que podemos escrever

$$f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z)(1+z)}$$

pelo que, 0 é candidato a pólo de ordem 3 e ± 1 são candidatos a pólos simples. De facto

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f_4(z) = -\lim_{z \to 1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(z+1)} = -\frac{\operatorname{sen} 1}{2}$$

e

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f_4(z) = -\lim_{z \to -1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1-z)} = -\frac{\operatorname{sen} 1}{2}$$

pelo que ± 1 são pólos simples e Res$(f_4, \pm 1) = \mp \frac{\operatorname{sen} 1}{2}$. Por outro lado

$$\lim_{z \to 0} (z^3 f_4(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z(1-z^2)} = 1$$

concluindo-se que 0 é um pólo de ordem 3. Para calcular o resíduo, e evitar o cálculo da segunda derivada e alguns limites trabalhosos, vamos recorrer ao desenvolvimento em série de potências de z da função f_4. Assim, para $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} f_4(z) &= \frac{1}{z^4} \operatorname{sen} z \frac{1}{1-z^2} \\ &= \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \end{aligned}$$

O facto de se ter um produto de séries dificulta um pouco o processo, mas para calcular o resíduo necessitamos apenas de saber qual o coeficiente da potência $\frac{1}{z}$. Efectuando alguns produtos relevantes, resulta que

$$\begin{aligned} f_4(z) &= \frac{1}{z^4}\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\Big)\Big(1 + z^2 + z^4 + z^6 + ...\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^2}{7!} + ...\Big)\Big(1 + z^2 + z^4 + z^6 + ...\Big) \\ &= \frac{1}{z^3} - \Big(\frac{1}{3!} - 1\Big)\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

pelo que se confirma que 0 é um pólo de terceira ordem e $\text{Res}(f_4, 0) = -\frac{1}{3!} + 1 = \frac{5}{6}$.

(e) É fácil de observar que f_5 é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Atendendo a qu,e para $z \neq 0$,

$$f_5(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \frac{1}{5!z^3} + ...$$

resulta que 0 é uma singularidade essencial e $\text{Res}(f_5, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

(f) Podemos escrever $f_6 = g + h$ sendo $g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ e $h(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$.

- A função g é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \operatorname{sen} z = 0\}$, isto é, em $\mathbb{C} \setminus \{z = k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$. Dado que, para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tem

$$\lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) g(z) = \lim_{w \to 0} \frac{w}{\operatorname{sen}(w + k\pi)} = \lim_{w \to 0} \frac{w}{(-1)^k \operatorname{sen}(w)} = (-1)^k \neq 0$$

  pelo que todas as singularidades de g são pólos simples. Consequentemente

$$\text{Res}\,(g, k\pi) = \lim_{z \to k\pi} (z - k\pi) g(z) = (-1)^k \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- A função h é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Suspeitamos que 0 é uma singularidade essencial de h. Para o demonstrar, recorremos ao desenvolvimento em série de Laurent de h convergente numa vizinhamça de 0. Assim, para $|z| > 0$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big(\frac{1}{z}\Big)^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots$$

  Verifica-se que a parte principal da série tem um número infinito de termos e, como tal, 0 é uma singularidade essencial de h. O resíduo de h em 0 é o coeficiente do termo $\frac{1}{z}$ na série obtida, ou seja

$$\text{Res}\,(h, 0) = 1$$

Temos então que

- 0 é uma singularidade essencial de f e

$$\text{Res}\,(f,0) = \text{Res}\,(g,0) + \text{Res}\,(h,0) = 2$$

- $k\pi$, com $k \neq 0$, é um pólo simples de f e

$$\text{Res}\,(f,0) = \text{Res}\,(g,0) = (-1)^k$$

2. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-\cos z)}$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Escreva a parte principal da série de Laurent de f em torno de 0 que converge em $z = \pi$.

Resolução:

a) As singularidades de f são dadas popr

$$z(1-\cos z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{C}$$

Verifica-se que 0 é raíz tanto de z como de $1-\cos z$, enquanto que $2k\pi$ para $k \neq 0$ é apenas raíz de $1 - 1\cos z$; por isso, iremos fazer o estudo dessas singularidades separadamente.

- Para $z = 0$, e usando a série de Maclaurin da função $\cos z$, tem-se que

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{((2n)!} z^{2n})} = \frac{e^z}{z(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots)} = \frac{e^z}{z^3(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots)}$$

  Atendendo a que a função

$$F(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots}$$

  é analítica em 0 e $F(0) = 2 \neq 0$ conclui-se que 0 é um pólo de ordem 3 de f.

- Para $z = 2k\pi$, $k \neq 0$, suspeitamos que é um pólo de ordem 2 (neste caso, $2k\pi$ já não anula z). Para o confirmar, vamos calcular o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2k\pi} (z-2k\pi)^2 f(z) &= \lim_{z\to 2k\pi} \frac{(z-2k\pi)^2 e^z}{z(1-\cos z)} \\
&= \frac{e^{2k\pi}}{21k\pi} \lim_{w\to 0} \frac{w^2}{1-\cos(w+2k\pi)} \\
&= \frac{e^{2k\pi}}{2k\pi} \lim_{w\to 0} \frac{w^2}{1-\cos w}
\end{aligned}$$

Visto que as funções w^2 e $1-\cos w$ são inteiras e se anulam em 0, podemos usar a regra de Cauchy para calcular o limite. Assim

$$\lim_{z\to 2k\pi}(z-2k\pi)^2 f(z) = \frac{e^{2k\pi}}{2k\pi}\lim_{w\to 0}\frac{2w}{\operatorname{sen} w}$$

Como continuamos na mesma situação, as funções w e $\operatorname{sen} w$ são inteiras e anulam-se em 0, usamos de novo a regra de Cauchy parra calcular o limite

$$\lim_{z\to 2k\pi}(z-2k\pi)^2 f(z) = \frac{e^{2k\pi}}{2k\pi}\lim_{w\to 0}\frac{2}{\cos w} = \frac{2e^{2k\pi}}{2k\pi}$$

Como este limite existe ($k\neq 0$) e não é zero confirma-se que para $k\neq 0$ as singularidades $2k\pi$ sáo pólos de ordem 2 de f.

b) É pedida a parte principal da série de Laurent de f convergente em $0<|z|<2\pi$ (a maior coroa circular centrada em 0 onde f é analítica e à qual pertence π). Visto 0 ser um pólo de ordem 3 de f, essa parte principal será da forma

$$\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-3}}{z^3} \quad , \quad a_{-1},\, a_{-2},\, a_{-3}\in\mathbb{C}$$

Para calcular a_{-1}

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma f(z)dz$$

em que γ é qualquer curva de Jordan percorrida em sentido positivo, contido na região de convergência da série e tal que 0 pertence à sua região interior. Pelos cálculos acima efectuad e a fórmula integral de Cauchy generalizada ($n=2$)

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{F(z)}{z^3}dz = \frac{1}{2}F''(0) = \frac{1}{6}$$

Note-se que o coeficiente a_{-1} é o resíduo de f em 0, e poderíamos calculá-lo de forma alternativa pela fórmula do resíduo de um pólo de ordem 3. Ou seja:

$$a_{-1} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(z^3 f(z)\Big)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\Big(\frac{z^2e^z}{1-\cos z}\Big)''$$

Este cálculo não é mais simples que o anterior..

Para calcular a_{-2}

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{-1}}dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma zf(z)dz$$

em que γ é qualquer curva de Jordan como acima descrita. Usando os cálculos efectuados acima e a fórmula integral de Cauchy generalizada ($n=1$)

$$a_{-2} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{F(z)}{z^2}dz = F'(0) = 2$$

Finalmente, para calcular a_{-3}

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{-2}} dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma z^2 f(z) dz$$

em que γ é qualquer curva de Jordan como acima descrita. Usando os cálculos efectuados acima e a fórmula integral de Cauchy

$$a_{-3} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{F(z)}{z} dz = F(0) = 2$$

3. Considere a função

$$f(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi}$$

(a) Mostre que f tem singularidades removíveis em $z = 0$, $z = \pi$ e $z = -\pi$.

(b) Determine a extensão analítica de f a 0 e indique o seu domínio de analiticidade.

Resolução:

a) Para demonstrar o pretendido, há que verificar que existem os limites de $f(z)$ quando z converge para cada um dos pontos indicados.

- Para $z = 0$

  $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi} \right) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \operatorname{sen} z}{z \operatorname{sen} z}$$

  Usando as séries de Maclaurin das funçoes $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, temos que

  $$z \operatorname{sen} z = z\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \Big) = z^2 \Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots \Big)$$

  e

  $$\begin{aligned} z\cos z - \operatorname{sen} z &= z\Big(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\Big) - \Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\Big) \\ &= \Big(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\Big) z^3 + \Big(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\Big) z^5 + \cdots \\ &= z^3 \Big[-\frac{1}{3} + \frac{4}{5!} z^2 + \cdots \Big] \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^3\Big[-\frac{1}{3}+\frac{4}{5!}z^2+\cdots\Big]}{z^2\Big(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big)} = 0$$

Como este limite existe, confirma-se que 0 é uma singularidade removível de f.

- Para $z=\pi$

$$\lim_{z\to\pi} f(z) = \lim_{z\to\pi}\left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z-\pi}\right) - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

Fazendo $w = z-\pi$

$$\lim_{z\to\pi} f(z) = \lim_{w\to 0}\left(\frac{\cos(w+\pi)}{\operatorname{sen}(w+\pi)} - \frac{1}{w}\right) - \frac{3}{2\pi} = \lim_{w\to 0}\left(\frac{-\cos w}{-\operatorname{sen} w} - \frac{1}{w}\right) - \frac{3}{2\pi} = -\frac{3}{2\pi}$$

onde usámos o limite já calculado no caso anterior:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z}\right) = 0$$

Como este limite existe, confirma-se que π é uma singularidade removível de f.

- Para $z=-\pi$

$$\lim_{z\to -\pi} f(z) = \lim_{z\to -\pi}\left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} - \frac{1}{z+\pi}\right) + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

Fazendo $w = z+\pi$ (cálculo idêntico ao anterior)

$$\lim_{z\to -\pi} f(z) = \lim_{w\to 0}\left(\frac{\cos(w-\pi)}{\operatorname{sen}(w-\pi)} - \frac{1}{w}\right) + \frac{3}{2\pi} = \lim_{w\to 0}\left(\frac{-\cos w}{-\operatorname{sen} w} - \frac{1}{w}\right) + \frac{3}{2\pi} = +\frac{3}{2\pi}$$

Como este limite existe, confirma-se que $-\pi$ é uma singularidade removível de f.

b) Dado que 0 é uma singularidade removível, a série de Laurent de f que converge numa vizinhança de 0 tem parte principal nula. Isto é, para qualquer z na coroa circular $0<|z|<\pi$ (onde f é analítica)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Sendo então $f(z)$ representada por uma série de potências que, como sabemos, é uma função analítica em $|z|<\pi$ (logo, também em 0) então:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\Big(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\Big) = a_0 = 0$$

conforme calculado em (a). Assim a extensão analítica de f a 0 é, precisamente, dada por

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

A função $F(z)$ coincide com $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ em $|z|<\pi$, logo é analítica nesse disco.

4. Considere a função
$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}.$$
Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

Resolução:

Por g ser definida à custa de quocientes e composições de funções analíticas, será analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{sen}\frac{\pi}{z} = 0 \text{ e } z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \big(\{0\} \cup \{\tfrac{1}{k} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}\big)$$

Por definição, 0 será uma singularidade isolada de $g(z)$ se existir $\epsilon > 0$ tal que $g(z)$ é analítica em $\{z : 0 < |z| < \epsilon\}$. Como $\frac{1}{k} \to 0$, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos sempre encontrar (um número infinito de) pontos da forma $\frac{1}{k}$ em $\{z : 0 < |z| < \epsilon\}$, e como tal 0 não é uma singularidade isolada.

5. Calcule Res$\big(f, a\big)$ nos seguintes casos

$$(\mathbf{a})\ \ f(z) = \frac{e^z}{z^5} \quad , \quad a = 0 \qquad (\mathbf{b})\ \ f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^6} \quad , \quad a = 1$$
$$(\mathbf{c})\ \ f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^3} \quad , \quad a = 0 \qquad (\mathbf{d})\ \ f(z) = \frac{1+\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \quad , \quad a = 1$$

Resolução:

a) Dado que e^z não se anula em 0, conjecturamos que 0 é um pólo de ordem 5 de f. De facto

$$\lim_{z \to 0} \Big(z^5 f(z)\Big) = \lim_{z \to 0} e^z = 1;$$

confirma-se que 0 é um pólo de ordem 5. Como tal,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{4!} \lim_{z \to 0} \frac{d^4}{dz^4}\Big(z^5 f(z)\Big) = \frac{1}{4!} \lim_{z \to 0} \frac{d^4}{dz^4}\Big(e^z\Big) = \frac{1}{4!}$$

b) Dado que $\cos(\pi z)$ não se anula em 1, conjecturamos que 1 é um pólo de ordem 6 de f. De facto

$$\lim_{z \to 1} \Big((z-1)^6 f(z)\Big) = \lim_{z \to 0} \cos(\pi z) = -1;$$

confirma-se que 1 é um pólo de ordem 6. Como tal,

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{5!} \lim_{z \to 1} \frac{d^5}{dz^5}\Big((z-1)^6 f(z)\Big) = \frac{1}{5!} \lim_{z \to 1} \frac{d^5}{dz^5}\Big(\cos(\pi z)\Big) = \frac{1}{5!} \lim_{z \to 1} \Big(-\pi^5 \operatorname{sen}(\pi z)\Big) = 0$$

c) Visto que $\operatorname{sen}(\pi z)$ se anula em 0 e que a sua série de MacLaurin é

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi z)^{2n+1} = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \frac{\pi^5 z^5}{5!} + \cdots = z\Big(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} + \cdots\Big)$$

temos que

$$f(z) = \frac{z\Big(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} + \cdots\Big)}{z^3} = \frac{1}{z^2}\Big(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} + \cdots\Big)$$

Como $F(z) = \pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} + \cdots$ é analítica em 0 e $F(0) = \pi \neq 0$ tem-se que 0 é um pólo de ordem 2 de f. Como tal

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\Big(z^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to 0} F'(z) = \lim_{z\to 0}\Big(-\frac{2\pi^3 z}{3!} + \frac{4\pi^5 z^3}{5!} + \cdots\Big) = 0$$

d) Visto que $1+\cos(\pi z)$ se anula em 1 e que a sua série de Taylor centada em 1 é

$$\begin{aligned}
1+\cos(\pi z) &= 1+\cos(\pi(z-1)+\pi) \\
&= 1-\cos(\pi(z-1)) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}(z-1)^{2n} \\
&= \frac{\pi^2(z-1)^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-1)^4}{4!} + \frac{\pi^6(z-1)^6}{6!} - \cdots \\
&= (z-1)^2\Big(\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-1)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-1)^4}{6!} - \cdots\Big)
\end{aligned}$$

temos que

$$f(z) = \frac{(z-1)^2\Big(\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-1)^2}{4!} + \cdots\Big)}{(z-1)^5} = \frac{1}{(z-1)^3}\Big(\frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-1)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-1)^4}{6!} - \cdots\Big)$$

Como $F(z) = \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^4(z-1)^2}{4!} + \frac{\pi^6(z-1)^4}{6!} - \cdots$ é analítica em 1 e $F(1) = \frac{\pi^2}{2} \neq 0$ tem-se que 0 é um pólo de ordem 3 de f. Como tal

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,1) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1} \frac{d^2}{dz^2}\Big((z-1)^3 f(z)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1} F''(z) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\Big(-\frac{2\pi^4}{4!} + \frac{12\pi^8}{6!}(z-1)^2 - \cdots\Big) = -\frac{\pi^4}{24}
\end{aligned}$$

6. Considere as curvas definidas por $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor

dos integrais

$$\oint_{\gamma_k} g(z)dz, \qquad k = 1, 2$$

para cada uma das seguintes funções complexas:

$\mathbf{a})\ \ g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} \qquad \mathbf{b})\ \ g(z) = z^2 \operatorname{sen}(z^{-1}) \qquad \mathbf{c})\ \ g(z) = \dfrac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$

Resolução:

(a) A função

$$g(z) \equiv \frac{1}{e^z - 1}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z \, : \, e^z - 1 = 0\}$, ou seja, tem singularidades nos pontos $z = 2k\pi i$, para $k \in \mathbb{Z}$. Note-se que

$$|2k\pi i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

pelo que

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g, 0)$$

Para calcular o referido resíduo, note-se que

$$g(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots}$$

o que implica que

$$\lim_{z \to 0} zg(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \ldots} = 1$$

concluindo-se que 0 é um pólo simples e que Res$(g, 0) = 1$. Então

$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i$$

Por outro lado

$$|2k\pi i + 2\pi i| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1$$

pelo que

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g, -2\pi i)$$

Para calcular o resíduo, usando a regra de Cauchy:

$$\lim_{z \to -2\pi \mathrm{i}} (z + 2\pi i) g(z) = \lim_{z \to -2\pi i} \frac{z + 2\pi i}{e^z - 1} = \lim_{z \to -2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{e^z} = 1.$$

Conclui-se que $-2\pi i$ é um pólo simples e que Res$(g, -2\pi i) = 1$. Assim sendo:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 2\pi i$$

(b) A função
$$g(z) \equiv z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$$
é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ou seja tem uma singularidade em $z = 0$. Assim:
$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$
Para calcular o respectivo resíduo
$$g(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = z - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^3} - \ldots$$
pelo que 0 é uma singularidade essencial e Res$(g, 0) = -\frac{1}{6}$. Então
$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = -\frac{\pi i}{3}$$
Por outro lado, dado que $|0 + 2\pi i| > 1$, g é analítica na região interior a γ_2, e pelo Teorema de Cauchy
$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$$
(c) A função
$$g(z) \equiv \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2} = \frac{z - 2i}{z^2(z^2 - 4iz - 4)} = \frac{1}{z^2(z - 2i)}$$
é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 2i\}$. No interior de γ_1 temos apenas a singularidade $z = 0$, pelo que
$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$
Para calcular o respectivo resíduo, note-se que
$$\lim_{z \to 0} z^2 g(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z - 2i} = -\frac{1}{2i} \neq 0,$$
pelo que 0 é um pólo de ordem 2, e
$$\operatorname{Res}(g, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}(z^2 g(z)) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z - 2i} = \frac{1}{4}$$
Então
$$\oint_{\gamma_1} g(z)\, dz = \frac{\pi i}{2}$$
Por outro lado, como g é analítica na região interior a γ_2, o Teorema de Cauchy mostra que
$$\oint_{\gamma_2} g(z)\, dz = 0$$

7. Calcule o seguinte integral
$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$
onde C é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

Por linearidade do integral complexo:
$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz = \oint_C \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}\, dz + \oint_C z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2}\, dz$$
Relativamente ao primeiro integral, verifica-se que a função
$$f(z) = \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$
é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \operatorname{sen}(\pi z) = 0\}$, isto é, f tem singularidades nos pontos $z_k = k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, as singularidades de f no interior de C são as que verificam
$$|z-1| + |z+1| < 3,$$
ou seja, 0 e ± 1. Pelo Teorema dos Resíduos
$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,-1) \Big)$$
Atendendo a que
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}(\pi z)} \cdot \lim_{z\to 0} z = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$$
conclui-se que $z_0 = 0$ é uma singularidade removível e, consequentemente, $\operatorname{Res}(f,0) = 0$. Por outro lado, e usando a regra de Cauchy:
$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} (z^2) \cdot \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{\operatorname{sen}(\pi z)} = 1 \cdot \lim_{z\to 1} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} = -\frac{1}{\pi}$$
pelo que $z_1 = 1$ é um pólo simples e Res$(f,1) = -\dfrac{1}{\pi}$. De forma análoga se verifica que $z_{-1} = -1$ é um pólo simples e Res$(f,-1) = -\frac{1}{\pi}$.
Desta forma,
$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \left(0 - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right) = -4i$$
Relativamente ao segundo integral, começamos por constatar que a função
$$g(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dado que $1 \in \operatorname{int} C$, pelo teorema dos resíduos

$$\oint_C g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, 1)$$

Utilizando mais uma vez o desenvolvimento em série de potências de $z-1$ da função seno, tem-se que (para $z \neq 1$):

$$\begin{aligned} g(z) &= z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} = \big((z-1)+1\big)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big(\frac{1}{(z-1)^2}\Big)^{2n+1} \\ &= \Big((z-1)^2 + 2(z-1) + 1\Big)\Big(\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1/3!}{(z-1)^6} + \frac{1/5!}{(z-1)^{10}} - \cdots\Big) \\ &= 1 + \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1/6}{(z-1)^4} - \frac{1/3}{(z-1)^5} - \frac{1/6}{(z-1)^6} + \cdots \end{aligned}$$

donde se conclui que 1 é uma singularidade essencial de g. Utilizando esta série, $\operatorname{Res}(g, 1) = 2$, pelo que

$$\oint_C g(z)\, dz = 4\pi i$$

Em conclusão:

$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz = -4i + 4\pi i = 4(\pi - 1)i.$$

2 Exercícios Propostos

1. Classifique a singularidade z_0 da função $f(z)$

(**a**) $(z) = \dfrac{1}{z - \operatorname{sen} z}, \quad z_0 = 0$

(**b**) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^{-z} + z - 1}, \quad z_0 = 0$

(**c**) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi$

(**d**) $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{z}, \quad z_0 = 0$

(**e**)$f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = 0$

(**f**) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z_0 = -1$

2. Mostre que todas as singularidades da função

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z} - 1 + 2z^2}{z(z^2 - 1)}$$

são removíveis.

3. Mostre que $z=0$ é uma singularidade removível de função

$$f(z)=\frac{1}{\operatorname{tg} z}-\frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

4. Considere a função

$$f(z)=\frac{z}{\operatorname{sen} z}-\frac{a}{z-\pi}-\frac{b}{z+\pi}$$

em que a, b são constantes em $\mathbb{C}$.

(a) Determine os valores das constantes a e b de forma a que a função tenha singularidades removíveis em $z=\pi$ e $z=-\pi$.

(b) Seja $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ a série de Laurent da funçao $\frac{z}{\operatorname{sen} z}$ convergente em $z=\frac{\pi}{2}$. Indique a sua parte principal.

5. Determine e classifique todas as singularidades das seguintes funções:

(**a**) $f(z)=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} z}$

(**b**) $f(z)=\cos\left(z^{-1}\right)$

(**c**) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}-1}+z^{-2}$

(**d**) $f(z)=\dfrac{ze^{1/z}\operatorname{sen} z}{(z-2)^2(z+\pi)^2}$

(**e**) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{e^{2z}-1}+(z-2)e^{1/(z-i\pi)}$

(**f**) $f(z)=z^2e^{1/z}-(z^2-2z)\operatorname{sen}\dfrac{1}{z-1}$

6. Calcule os resíduos da função $f(z)$ nas suas singularidades

(a) $f(z)=\dfrac{\cot z}{z^2-\pi z/4}$

(b) $f(z)=z^3e^{1/z}$

(c) $f(z)=\dfrac{\cosh z}{(z^2+1)(z-3)}$

(d) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$

(e) $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z+1}$

7. Calcule Res (f, z_0)

(a) $f(z)=\dfrac{z^{n-1}}{\operatorname{sen}^n z},\quad z_0=0,\ n=1,2,\ldots$

(b) $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\operatorname{sen} z},\quad z_0=0$

(c) $f(z)=\dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{senh}^n z},\quad z_0=0,\ n=1,2,\ldots$

8. Determine e clssifique as singularidades das seguintes funções, calculando os respectivos resíduos:

(**a**) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z(2z-1)(z+1)}$

(**b**) $g(z)=\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+4}$

(**c**) $h(z)=\dfrac{\cos(\pi z)}{z(2z-1)(6z-1)}$

9. Calcule os integrais, onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2-6z}\,dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} iz}{z^2-4z+3}\,dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}}\,dz$

(d) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos(iz)}{z^3}\,dz$ (e) $\displaystyle\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{e^z-1}dz$, γ é o polígono de vértices em ± 1, $-\pi i$ e $3\pi i$

(f) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z/2)}{(z-1)(z+2)}\,dz$ (g) $\displaystyle\oint_{|z|=1} e^{-1/z}\operatorname{sen}\frac{2}{z}\,dz$ (h) $\displaystyle\oint_{|z-i|=5} e^{\frac{z}{z-2}}dz$

10. Determine

$$\oint_{\gamma} (1+z+z^2)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}})\,dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{3}{2}\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

11. Determine o valor do integral:

$$\oint_{|z|=R} \frac{dz}{(z^2+1)(z+3)}dz$$

nos casos

$$(\mathbf{a})\quad 0 < R < 1 \qquad (\mathbf{b})\quad 1 < R < 3 \qquad (\mathbf{c})\quad R > 3$$

3 Soluções de 6.2

1. **(a)** pólo de ordem 3 **(b)** pólo de ordem 1 **(c)** removível
(d) removível **(e)** pólo de ordem 4 **(f)** pólo de ordem 1

4. **(a)** $a = -\pi$, $b = \pi$ **(b)** $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

5. **(a)** $\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$; pólos de ordem 2.

(b) 0 ; singularidade essencial.

(c) $\begin{cases} 0 & ;\ \text{pólo de ordem 2.} \\ 2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} & ;\ \text{pólos simples.} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 0 & ;\ \text{singularidade essencial.} \\ -\pi & ;\ \text{pólo simples.} \\ 2 & ;\ \text{pólo de ordem 2.} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2k\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z} & ;\ \text{singularidades removíveis.} \\ i\pi & ;\ \text{singularidade essencial.} \\ (2k+1)\pi i\,,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} & ;\ \text{pólos simples.} \end{cases}$

(f) Singularidades:0 e 1 ambas essenciais

6. **(a)** $\begin{cases} 0 \to \text{pólo de ordem 2} & \mathrm{Res}(f,0) = -\frac{16}{\pi^2} \\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \text{pólos de ordem 1,} & \mathrm{Res}(f,k\pi) = \frac{4}{k\pi^2(4k-1)} \\ \frac{\pi}{4} \to \text{pólo de ordem 1} & \mathrm{Res}(f,\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} \end{cases}$

(b) $0 \to$ sing. essencial, Res$(f,0) = \frac{1}{4!}$ **(c)** $\begin{cases} i \to \text{pólo de ordem 1,} & \mathrm{Res}(f,i) = -\frac{\mathrm{ch}\, i}{2i(i-3)} \\ -i \to \text{pólo de ordem 1,} & \mathrm{Res}(f,-i) = \frac{\mathrm{ch}\, i}{2i(3-i)} \\ 3 \to \text{pólo de ordem 1,} & \mathrm{Res}(f,3) = \frac{\mathrm{ch}\, 3}{10} \end{cases}$

(d) $i \to$ pólo de ordem 1, Res$(f,i) = -1$ **(e)** $\begin{cases} -1 \to \text{pólo de ordem 1,} & \mathrm{Res}(f,-1) = e^{-1} \\ 0 \to \text{sing. essencial,} & \mathrm{Res}(f,0) = 1 - e^{-1} \end{cases}$

7. **(a)** $z_0 = 0$ é pólo de ordem 1 e Res $(f,0) = 1$ **(b)** $z_0 = 0$ é pólo de ordem 1 e Res $(f,0) = \frac{1}{4}$ **(c)** $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$ é pólo de ordem 2 e Res $(f,0) = 0$

8. **(a)** Singularidades -1, 0, $\frac{1}{2}$ todos pólos simples, Res$(f. -1) = \frac{2}{3}$, Res$(f,0) = -1$ e Res$(f\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ **(b)** Singularidades $\pm 2\mathrm{i}$ ambas pólos simples Res$(f, 2\mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}}{4e^2}$ e Res$(f,-2\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{4e^2}$ **(c)** Singularidades 0, $\frac{1}{6}$ pólos simples, e $\frac{1}{2}$ removível, Res$(f,0) = 1$, Res$(f\frac{1}{2} = 0$ e Res$(f\frac{1}{6} = -\frac{\pi}{2}$

9. **(a)** $-\frac{\pi i}{3}$ **(b)** $\pi \,\mathrm{senh}\, 1$ **(c)** 0 **(d)** $i\pi$ **(e)** $\pi i(2 + e^{-2\pi} + e^{2\pi})$ **(f)** $\frac{2\pi i}{3}$ **(g)** $4\pi i$ **(h)** $4\pi e i$

10. $\frac{38\pi i}{3}$

11. **(a)** 0 **(b)** $-\frac{\pi \mathrm{i}}{5}$ **(c)** 0