TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1^{o} Semestre $2020/2021$

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 4

Integral Complexo. Teorema de Cauchy. Fórmulas Integrais de Cauchy.

1 Exercícios Resolvidos

1. Qual a curva descrita pela função

   (a) $\gamma(t) = (1-t)w + tz$, $0 \le t \le 1$, sejam z e w dois números complexos arbitrários.

   (b) $\gamma(t) = 3t + 4 + \mathrm{i}(t-6)$ com $0 \le t \le 1$.

   (c) $\gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$.

   Resolução:

a) $\gamma(t)$ é a parametrização de uma recta. Tem-se que $\gamma(0) = w$ e $\gamma(1) = z$, pelo que $\gamma(t)$ descreve o segmento de recta que une w a z.

b) $\gamma(t)$ dependendo linearmente de t representa uma recta. Tem-se que $\gamma(0) = 4$ e $\gamma(1) = -6\mathrm{i}$, pelo que $\gamma(t)$ descreve o segmento de recta que une 4 a $-6\mathrm{i}$.

c) Dado que $|\gamma(t)| = |2e^{\mathrm{i}t}| = 2$ e t representa o argumento de $\gamma(t)$, tem-se que γ representa a circunferência centrada em 0 e de raio 2 percorrida em sentido directo.

2. Determine uma função, $\gamma(t)$ que descreva a curva

   (a) $y = 4x^3 + 1$ entre os pontos $x = 0$ e $x = 10$.

   (b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ unindo os pontos $7 + 3\mathrm{i}$ a $2 - 2\mathrm{i}$ em sentido inverso.

   Resolução:

a) Usando $t = x$ como parâmetro, a curva será descrita pela parametrização (por exemplo) $\gamma(t) = t + \mathrm{i}(4t^3 + 1)$ com $0 \leq t \leq 10$.

b) Dado que

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad |z - (2+3\mathrm{i})| = 5$$

uma parametrização possível é

$$\gamma(t) = 2 + 3\mathrm{i} + 5e^{-\mathrm{i}t} \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

3. Dada a função complexa $f(z) = \overline{z}$ calcule o valor do integral complexo $\int_\gamma f(z)\,dz$ em que γ é a curva parametrizada por $x(t) = 3t$ e $y(t) = t$, com $t \in [1, 4]$.

Resolução:

Usando a definição de integral complexo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_1^4 \overline{3t + \mathrm{i}t}\,(3t + \mathrm{i}t)'dt = (3 - \mathrm{i})(3 + \mathrm{i}) \int_1^4 t\,dt = 75$$

4. Calcule o valor do integral complexo $\int_\gamma f(z)\,dz$ para

(a) $(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e γ a semicircunferência parametrizada por $\gamma(\theta) = 2e^{\mathrm{i}\theta}$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $\operatorname{Im}\gamma(\theta) \geq 0$.

(b) $f(x + \mathrm{i}y) = y - x - 3x^2\mathrm{i}$ e γ a curva que é a união do segmento de recta ligando $z = 0$ a $z = \mathrm{i}$ com o segmento de recta ligando $z = \mathrm{i}$ a $z = 1 + \mathrm{i}$

Resolução:

a) Usando a definição de integral complexo

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z}\,dz = \int_0^\pi \frac{2e^{\mathrm{i}\theta} + 1}{2e^{\mathrm{i}\theta}} \left(2e^{\mathrm{i}\theta}\right)' d\theta = \mathrm{i} \int_0^\pi (2e^{\mathrm{i}\theta} + 1)d\theta = -4 + \pi\mathrm{i}$$

b) Considerem-se as curvas γ_1 como sendo o segmento de recta que une $z = 0$ a $z = \mathrm{i}$ e γ_2 como sendo o segmento de recta que une $z = \mathrm{i}$ a $z = 1 + \mathrm{i}$. Uma parametrização possível para

γ_1 é $z(t) = \mathrm{i}t$ com $0 \leq t \leq 1$. Usando a definição de integral complexo

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_0^1 t(\mathrm{i}t)' dt = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

Uma parametrização possível para γ_2 é $z(t) = t + \mathrm{i}$ com $0 \leq t \leq 1$. Usando a definição de integral complexo

$$\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^1 (1 - t + 3t^2\mathrm{i})(t + \mathrm{i})' dt = \int_0^1 (1 - t - 3t^2\mathrm{i}) dt = \frac{1}{2} - \mathrm{i}$$

Finalmente

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$$

5. Calcule o valor do integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ onde γ é a curva de equação dada, em coordenadas rectangulares, por $y = x^3$ entre os pontos $z = -1 - \mathrm{i}$ e $z = 1 + \mathrm{i}$, e onde f é a função definida por

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y < 0 \\ 4y & \text{se} \quad y > 0 \end{cases}$$

Resolução:

Uma parametrização possível para γ é $z(t) = t + t^3\mathrm{i}$ com $-1 \leq t \leq 1$. Devido às definições de $f(z)$ e da curva, vê-se que se $-1 \leq t \leq 0$ então $f(z(t)) = 1$ e se $0 \leq t \leq 1$ então $f(z(t)) = 4t^3$. Usando a definição de integral complexo

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{-1}^0 \Big(t + t^3\mathrm{i}\Big)' dt + \int_0^1 4t^3 \Big(t + t^3\mathrm{i}\Big)' dt = \int_{-1}^0 (1 + 3\mathrm{i}t^2) dt + 4\int_0^1 (t^3 + 3\mathrm{i}t^5) dt = 2 + 3\mathrm{i}$$

6. Sendo $f(z) = \frac{1}{z}$ mostre que

$$\oint_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi\mathrm{i}$$

onde γ é a fronteira do quadrado de vértices $z = 2\mathrm{i}$, $z = -2$, $z = -2\mathrm{i}$ e $z = 2$ percorrida em sentido directo..

Resolução:

a) Considerem-se as curvas γ_k com $k \in \{1,\, 2,\, 3\, 4\}$ em que γ_1 é o segmento de recta que une $z = 2$ a $z = 2\mathrm{i}$, γ_2 é o segmento de recta que une $z = 2\mathrm{i}$ a $z = -2$, γ_3 é o segmento de recta que une $z = -2$ a $z == -2\mathrm{i}$ e γ_4 é o segmento de recta que une $z = -2\mathrm{i}$ a $z = 2$. Tem-se então que

- Uma parametrização possível para γ_1 é $z(t) = (1-t)2 + 2\mathrm{i}t = 2 + (2\mathrm{i} - 21)t$ com $0 \le t \le 1$. Usando a definição de integral complexo
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{2+2(\mathrm{i}-1)t}(2+2(\mathrm{i}-1)t)'dt = \int_0^1 \frac{2(\mathrm{i}-1)}{2+2(\mathrm{i}-1)t}dt = \log(2+2(\mathrm{i}-1)t)\Big|_0^1$$
onde usamos o valor principal do logaritmo (contínuo em γ_1). Assim
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \log(2\mathrm{i}) - \log 2 = \log 2 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i} - \log 2 = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

- Uma parametrização possível para γ_2 é $z(t) = (1-t)2\mathrm{i} - 2t = 2\mathrm{i} - 2(\mathrm{i}+1)t$ com $0 \le t \le 1$. Usando a definição de integral complexo
$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{2\mathrm{i}-2(\mathrm{i}+1)t}(2\mathrm{i}-2(\mathrm{i}+1)t)'dt = \int_0^1 \frac{-2(\mathrm{i}+1)}{2\mathrm{i}-2(\mathrm{i}+1)t}dt = \log(2\mathrm{i}-2(\mathrm{i}+1)t)\Big|_0^1$$
onde usamos o valor 0 do logaritmo (contínuo em γ_2). Assim
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \log(-2) - \log(2\mathrm{i}) = \log 2 + \mathrm{i}\pi - \log 2 - \frac{\pi}{2}\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

- Uma parametrização possível para γ_3 é $z(t) = -(1-t)2 - 2\mathrm{i}t = -2 - 2(\mathrm{i}-1)t$ com $0 \le t \le 1$. Usando a definição de integral complexo
$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{-2-2(\mathrm{i}-1)t}(-2-2(\mathrm{i}-1)t)'dt = \int_0^1 \frac{-2(\mathrm{i}-1)}{-2-2(\mathrm{i}-1)t}dt = \log(-2-2(\mathrm{i}-1)t)\Big|_0^1$$
onde usamos o valor 0 do logaritmo (contínuo em γ_3). Assim
$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z}\, dz = \log(-2\mathrm{i}) - \log(-2) = \log 2 + \frac{3\pi}{2}\mathrm{i} - \log 2 - \mathrm{i}\pi = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

- Uma parametrização possível para γ_4 é $z(t) = -(1-t)2\mathrm{i} + 2t = -2\mathrm{i} + 2(\mathrm{i}+1)t$ com $0 \le t \le 1$. Usando a definição de integral complexo
$$\int_{\gamma_4} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{-2\mathrm{i}+2(\mathrm{i}+1)t}(-2\mathrm{i}+2(\mathrm{i}+1)t)'dt = \int_0^1 \frac{2(\mathrm{i}+1)}{-2\mathrm{i}+2(\mathrm{i}+1)t}dt = \log(-2\mathrm{i}+2(\mathrm{i}+1)t)\Big|_0^1$$
onde usamos o valor pricipal do logaritmo (contínuo em γ_4). Assim
$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \log(2) - \log(-2\mathrm{i}) = \log 2 - \log 2 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

Finalmente
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i}$$
como pedido.

7. Calcule, pela definição, o valor do integrai

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz$$

em que γ é definida pela parametrização $z(\theta) = 2e^{\mathrm{i}\theta}$ com

$$(\mathbf{a})\ \ 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (\mathbf{b})\ \ \pi \leq \theta \leq 2\pi \qquad (\mathbf{c})\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Resolução:

a) Usando a definição de integral complexo

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz = \int_\gamma \Big(\frac{2}{z} + 1\Big)\, dz = \int_0^\pi \Big(\frac{2}{2e^{\mathrm{i}\theta}} + 1\Big)\Big(2e^{\mathrm{i}\theta}\Big)' d\theta = \int_0^\pi \Big(2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\Big) d\theta = 2\pi\mathrm{i} - 4$$

b) Usando a definição de integral complexo

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz = \int_\gamma \Big(\frac{2}{z} + 1\Big)\, dz = \int_\pi^{2\pi} \Big(\frac{2}{2e^{\mathrm{i}\theta}} + 1\Big)\Big(2e^{\mathrm{i}\theta}\Big)' d\theta = \int_\pi^{2\pi} \Big(2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\Big) d\theta = 2\pi\mathrm{i} + 4$$

c) Tendo em conta que a curva é a concatenação das curvas das alíneas anteriores

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz = 2\pi\mathrm{i} - 4 + 2\pi\mathrm{i} + 4 = 4\pi\mathrm{i}$$

8. Considere a curva $\gamma(t) = Re^{\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, \pi]$ em que R é um número real positivo maior que 1. Mostre que

$$\mathbf{a})\ \ \Big| \int_\gamma \frac{z+2}{z^3+1}\, dz \Big| \leq \pi R \frac{R+2}{R^3-1} \qquad \mathbf{b})\ \Big| \int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\, dz \Big| \leq \pi$$

Resolução:

Note-se que para $z \in \gamma$ se tem que $|z| = R$ e $\operatorname{Im} z > 0$.

a) Majorando o valor do módulo do integral

$$\Big| \int_\gamma \frac{z+2}{z^3+1}\, dz \Big| \leq \int_\gamma \Big| \frac{z+2}{z^3+1} \Big|\, |dz|$$

Usando as desigualdades $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triangular) e $|a+b| \geq \Big| |a| - |b| \Big|$ (consequência da anterior) obtém-se

$$\Big| \oint_\gamma \frac{z+2}{z^3+1}\, dz \leq \int_\gamma \frac{|z| + |2|}{||z|^3 - |1||} |dz| = \int_\gamma \frac{R+2}{|R^3-1|} |dz| = \frac{R+2}{|R^3-1|} \int_\gamma |dz|$$

Visto o último integral representar o comprimento da curva (uma semi-circunferência de raio R) e $R > 1$ tem-se então que

$$\left| \oint_\gamma \frac{z+2}{z^3+1}\,dz \leq \pi R \frac{R+2}{R^3-1}$$

como se queria.

b) Majorando o valor do módulo do integral

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz \right| \leq \int_\gamma \left| \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z} \right| |dz|$$

Usando a parametrização indicada para γ

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}}}{Re^{\mathrm{i}\theta}} \left(Re^{\mathrm{i}\theta}\right)' \right| d\theta = \int_0^\pi e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

onde usámos o facto de que $e^{\mathrm{i}r}| = 1$ para qualquer real r. Dado que para $\operatorname{sen}\theta > 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$ tem-se que $e^{-R\operatorname{sen}\theta} < 1$ e assim

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\,dz \right| \leq \pi$$

9. Calcule o valor dos seguintes integrais

$$(\mathbf{a}) \int_{|z|=5} \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}\,dz \quad (\mathbf{b}) \int_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{1}{z^2+4}\,dz \quad (\mathbf{c}) \int_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z(z^2+9)}\,dz$$

onde as curvas são percorridas uma vez em sentido directo e em c) usa-se o valor principal do logaritmo.

Resolução:

a) Sendo $F(z) = \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}$ verifica-se facilmente que F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$ e que $-\frac{\pi}{2}$ pertence à região interior à curva $|z| = 5$. Então o integral pode ser escrito na forma

$$\int_{|z|=5} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

com $f(z) = \operatorname{sen}(3z)$ que é uma função inteira, e $z_0 = -\frac{\pi}{2}$ que como já referimos, pertence à região interior à curva. Como $|z| = 5$ percorrida uma vez é uma curva de Jordan, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy e, assim,

$$\int_{|z|=5} \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z+\frac{\pi}{2}}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,\operatorname{sen}(3z_0) = 2\pi\mathrm{i}$$

b) Seja $F(z) = \frac{1}{z^3+4} = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})}$ verifica-se facilmente que F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i},\, 2\mathrm{i}\}$. Além disso $2\mathrm{i}$ pertence à região interior à curva $|z-\mathrm{i}| = 2$ (visto que $|2\mathrm{i}-\mathrm{i}| = 1 < 2$) e $-2\mathrm{i}$ pertence à região exterior à curva $|z-\mathrm{i}| = 2$ (visto que $|-2\mathrm{i}-\mathrm{i}| = 3 > 2$). Então o integral pode ser escrito na forma

$$\int_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

com $f(z) = \frac{1}{z+2\mathrm{i}}$, que é uma função analítica em (por exemplo) $\mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\}$ que é um conjunto aberto que contém a curva e o seu interior, e $z_0 = 2\mathrm{i}$. Como $|z-\mathrm{i}| = 2$ percorrida uma vez é uma curva de Jordan, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy e assim

$$\int_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{\frac{1}{z+2\mathrm{i}}}{z-2\mathrm{i}} dz = 2\pi\mathrm{i} \frac{1}{z_0+2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}$$

c) Seja $F(z) = \frac{\log(z+3)}{z(z^2+9)} = \frac{\log(z+3)}{z(z-3\mathrm{i})(z+3\mathrm{i})}$. O valor principal de $\log(z+3)$ é uma função analítica em $A = \mathbb{C} \setminus \{z = -3 + xe^{\mathrm{i}\pi},\ x \geq 0\}$. Desta forma F é analítica em $A \setminus \{0,\, -2\mathrm{i},\, 2\mathrm{i}\}$. Além disso 0 pertence à região interior à curva $|z| = 2$ e $\pm 3\mathrm{i}$ pertencem à região exterior à curva $|z| = 2$. Então o integral é da forma

$$\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

com $f(z) = \frac{\log(z+3)}{z^2+9}$, uma função analítica em (por exemplo) $D = \{z : |z| < 2\}$. Note-se que D é um conjunto aberto contendo a curva e o seu interior, e $z_0 = 0$ pertence à região interior à curva. Como $|z| = 2$ percorrida uma vez é uma curva de Jordan, podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{|z|=5} \frac{\frac{\log(z+3)}{z^2+9}}{z} dz = 2\pi\mathrm{i} \frac{\log(z_0+3)}{z_0^2+9} = \frac{2\pi\mathrm{i} \log 3}{9}$$

10. Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ onde γ é a curva definida por $|z| = 1$ para f igual a cada uma das seguintes funções:

(**a**) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z^2-25)(z^2+9)}$ (**b**) $f(z) = \operatorname{tg} z$ (**c**) $f(z) = \dfrac{e^z}{z+3} - 3\overline{z}$

Resolução:

a) A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-3\mathrm{i},\, 3\mathrm{i},\, 5\ -5\}$, e verifica-se que tanto $|\pm 5| > 1$ como $|\pm 3\mathrm{i}| > 1$; assim, nenhum destes pontos pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Portanto

f é analítica em $D = \{z : |z| < 2\}$: um conjunto aberto, simplesmente conexo contendo a curva. Pelo teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

b) A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus C$ em que C é o conjunto constituido pelos zeros da função coseno, isto é $C = \{z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$, verifica-se que para todo o $k \in \mathbb{Z}$ se tem que $|\frac{\pi}{2} + k\pi| > 1$ pelo que nenhum destes pontos pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Assim f é analítica em, por exemplo, $D = \{z : |z| < \frac{3}{2}\}\}$ que é um conjunto aberto, simplesmente conexo contendo a curva. Pelo teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

c) Considera-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ com $\frac{e^z}{z+3}$ e $f_2(z) = 3\overline{z}$. Tal como nos casos anteriores, a função f_1 é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$, e verifica-se que -3 não pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Assim f_1 é analítica em, por exemplo, $D = \{z : |z| < 2\}$. Pelo teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma f_1(z)dz = 0$$

Quanto à função f_2, sabemos que é contínua em $\mathbb{C}$ (pelo que o integral está bem definido) mas não é analítica em ponto algum de $\mathbb{C}$. Assim, a única forma de calcular o integral de f_2 é por definiçao. Uma parametrização de γ é $z(t) = e^{\mathrm{i}t}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, pelo que

$$\oint_\gamma f_1(z)dz = \int_0^{2\pi} 3\overline{e^{\mathrm{i}t}}\left(e^{\mathrm{i}t}\right)'dt = 3\mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}t}e^{\mathrm{i}t}dt = 6\pi\mathrm{i}$$

Finalmente, pela linearidade do integral

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma f_1(z)dz - \oint_\gamma f_2(z)dz = -6\pi\mathrm{i}$$

11. Determine todos os valores o valor do integral

$$\oint_\gamma \frac{z-1}{z(z-\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})}\,dz$$

em que γ é uma curva de Jordan contida em $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{\mathrm{i}, 3\mathrm{i}, 0\}$.

Resolução:

A função $F(z) = \frac{z-1}{z(z-\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}, 3\mathrm{i}, 0\}$. Seja A a região interior a γ. Observe-se que $0 \notin A$ para qualquer curva de Jordan contida no conjunto indicado. Temos então os seguintes casos

Caso 1 i e $3\mathrm{i} \notin A$

Neste caso F é analítica num aberto simplesmente conexo contendo a curva e não contendo nenhum dos três pontos. Pelo teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{z-1}{z(z-\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})}dz = 0$$

Caso 2 $\mathrm{i} \in A$ e $3\mathrm{i} \notin A$.

Neste caso o integral pode ser escrito na forma

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

com $f(z) = \frac{z-1}{z(z-3\mathrm{i})}$, que é uma função analítica num aberto simplesmente conexo contendo a curva, e $z_0 = \mathrm{i} \in \mathrm{int}\,\gamma$. Como γ é uma curva de Jordan, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy, pelo que

$$\int_\gamma \frac{\frac{z-1}{z(z-3\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}dz = 2\pi\mathrm{i}\frac{z_0-1}{z_0(z_0-3\mathrm{i})} = -\pi(1+\mathrm{i})$$

se γ for percorrida em sentido positivo, e

$$\int_\gamma \frac{\frac{z-1}{z(z-3\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}dz = \pi(1+\mathrm{i})$$

se γ for percorrida em sentido negativo.

Caso 3 $3\mathrm{i} \in A$ e $\mathrm{i} \notin A$.

Neste caso integral pode ser escrito na forma

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

com $f(z) = \frac{z-1}{z(z-\mathrm{i})}$, que é uma função analítica num aberto simplesmente conexo contendo a curva, e $z_0 = 3\mathrm{i} \in \mathrm{int}\,\gamma$. Como γ é uma curva de Jordan, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy, pelo que

$$\int_\gamma \frac{\frac{z-1}{z(z-\mathrm{i})}}{z-3\mathrm{i}}dz = 2\pi\mathrm{i}\frac{z_0-1}{z_0(z_0-\mathrm{i})} = \frac{\pi}{3}(3+\mathrm{i})$$

se γ for percorrida em sentido positivo, e

$$\int_\gamma \frac{\frac{z-1}{z(z-3\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}dz = -\frac{\pi}{3}(3+\mathrm{i})$$

se γ for percorrida em sentido negativo.

Caso 4 i e $3\mathrm{i} \in A$.

Considere-se γ_1 e γ_2 duas curvas de Jordan em $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\} \setminus \{\mathrm{i}, 3\mathrm{i}\}$, com a mesma orientação de γ, A_1 a região interior a γ_1, A_2 a região interior a γ_2 e tais que

$$\begin{cases} \mathrm{i} \in A_1 \\ 3\mathrm{i} \notin A_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3\mathrm{i} \in A_2 \\ \mathrm{i} \notin A_2 \end{cases}$$

Então, tal como no caso 2,

$$\oint_{\gamma_1} F(z)dz = \mp\pi(\mathrm{i}+1)$$

e como no caso 3

$$\oint_{\gamma_2} F(z)dz = \mp\frac{\pi}{3}(3-\mathrm{i})$$

Pelo Teorema de Cauchy para regiões multiplamentre conexas

$$\oint_{\gamma} F(z)dz = \oint_{\gamma_1} F(z)dz + \oint_{\gamma_2} F(z)dz = --\pi(\frac{\mathrm{i}}{3}+1)$$

se γ for percorrida em sentido positivo, e

$$\oint_{\gamma} F(z)dz = \pi(\frac{\mathrm{i}}{3}+1)$$

se γ for percorrida em sentido negativo.

12. Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem, percorrida uma vez no sentido positivo. Use o teorema de Cauchy ou as fórmulas integrais de Cauchy para calcular o valor de cada um dos seguintes integrais:

$$(\mathbf{a}) \quad \oint_{\gamma} \frac{e^z}{z^2}\,dz \qquad (\mathbf{b}) \quad \oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z^7}\;dz \qquad (\mathbf{c}) \quad \oint_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{(2z-\mathrm{i})^6}\,dz$$

onde na alínea d) se considera o valor pricipal do logaritmo complexo.

Resolução:

a) Sendo $F(z) = \frac{e^z}{z^2}$ verifica-se facilmente que F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que 0 pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Então o integral pode ser escrito na forma

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\,,$$

$f(z) = e^z$ uma função inteira, $z_0 = 0$ que pertence à região interior à curva e $n = 1$. Como $|z| = 1$ percorrida uma vez é uma curva de Jordan, estamos nas condições da Fórmula integral de Cauchy generalizada e, assim,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\, dz = 2\pi \mathrm{i} (e^z)'\Big|_{z=0} = 2\pi \mathrm{i} e^z\Big|_{z=0} = 2\pi \mathrm{i}$$

b) Sendo $F(z) = \frac{\cos z}{z^7}$ verifica-se facilmente que F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e que 0 pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Então o integral pode ser escrito na forma

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$f(z) = \cos z$ é uma função inteira, $z_0 = 0$ pertence à região interior à curva e $n = 6$. Como $|z| = 1$ percorriada uma vez é uma curva de Jordan, estamos nas condições da Fórmula integral de Cauchy generalizada, e assim,

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^7}\, dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{6!} (\cos z)^{(6)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{6!} (-\cos z\Big|_{z=0} = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{6!}$$

c) Sendo

$$F(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(2z - \mathrm{i})^6} = \frac{1}{2^6 \times} \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \frac{\mathrm{i}}{2})^6}$$

verifica-se facilmente que F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\mathrm{i}}{2}\}$ e que $\frac{\mathrm{i}}{2}$ pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Então, o integral pode ser escrito na forma

$$\frac{1}{2^6} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

onde $f(z) = \operatorname{sen} z$ uma função inteira, $z_0 = \frac{\mathrm{i}}{2}$ que pertence à região interior à curva e $n = 5$. Como $|z| = 1$ percorrida uma vez é uma curva de Jordan, estamos nas condições da Fórmula integral de Cauchy generalizada e assim,

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{(2z - \mathrm{i})^6}\, dz = \frac{1}{2^6} \frac{2\pi \mathrm{i}}{5!} (\operatorname{sen} z)^{(5)}\Big|_{z=\mathrm{i}/2} = \frac{\pi \mathrm{i}}{5! 2^5} (-\operatorname{sen} z)\Big|_{z=\frac{\mathrm{i}}{2}} = -\frac{\pi \mathrm{i}}{5! 2^5} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{i}}{2} = \frac{\pi}{5! 2^5} \operatorname{senh} \frac{1}{2}$$

13. Calcule o valor de

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz$$

em que a curva C é parametrizada por $z(t) = e^{2\mathrm{i}\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$

Resolução:

A curva de integração é a circunferência de centro 0 e raio 1 percorrida uma vez em sentido directo. Consideremos os casos:

$n = 0$ Neste caso $f(z) = e^z$ que é uma função inteira. Pelo que pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_C e^z dz = 0$$

$n < 0$ Sendo n um número inteiro negativo, seja p o seu simétrico. Neste caso $f(z) = z^p e^z$ que é uma função inteira, pelo que pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz = \oint_C z^p e^z dz = 0$$

$n > 0$ Neste caso $f(z)$ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e 0 pertence à região interior à curva $|z| = 1$. Pela Fórmula Integral de Cauchy generalizada

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz\Big|_{n>0} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!} \left(e^z\right)^{(n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!}$$

14. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

(a) Mostre que u é uma função harmónica.

(b) Determine a função harmónica conjugada, v, tal que $v(0, 0) = 0$.

(c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz$$

onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

Resolução:

(a) A função u é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser uma função polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y - 6x$$

sendo então evidente que $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Como $f = u + v\mathrm{i}$ é uma função analítica, u e v têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int (3x^2 - 6xy - 3y^2)dy$$

ou seja

$$v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + C_1(x)\Big) = -3y^2 + 3x^2 + 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = x^3 + C \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3 + C$$

Dado que $v(0,0) = 0$ tem-se que $C = 0$. Conclui-se que $v(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3$.

(c) Pela alínea anterior, a função

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

é uma função inteira, pelo que $\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Como $1 \in \operatorname{int} C$, e C é uma curva simples e fechada, podemos utilizar a fórmula integral de Cauchy generalizada $(n = 1)$,

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz &= 2\pi i f'(1) = 2\pi i\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(1,0)} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(1,0)}\Big) \\
&= 2\pi i\Big(3x^2 - 6xy - 3y^2 + i(6xy - 3y^2 + 3x^2)\Big|_{(x,y)=(1,0)}\Big) \\
&= 6\pi i(1 + i)
\end{aligned}$$

O segundo integral pode ser calculado como o anterior utilizando, neste caso, a fórmula integral de Cauchy com $n = 2$. Alternativamente, e atendendo a que

$$\begin{aligned}
f(z) &= x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y + i(3x^2y - 3xy^2 - y^3 + x^3) \\
&= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + y^3 - 3(ix)y^2 + 3(ix)^2y - (ix)^3 \\
&= (x + iy)^3 + (y - ix)^3 \\
&= z^3 + iz^3 \;=\; (1 + i)z^3,
\end{aligned}$$

então, pelo teorema de Cauchy:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^3}dz = \oint_C (1 + i)dz = 0.$$

15. Seja $f(x+\mathrm{i}y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y + \mathrm{i}(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y)$. Calcule

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$

Resolução:

Sendo $\mathrm{Re}\, f = u(x,y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y$ e $\mathrm{Im}\, f = v(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y$ verifica-se facilmente que são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ pelo que a função $f(z)/z^3$ é contínua num aberto que contem a cueva e não contem 0. Sendo assim o integral pedido está bem definido. Note-se ainda que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3x^2 + 3y - 6xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 6xy - 3x^2$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 6xy \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2 - 6xy - 3x^2$$

Atendendo a que todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e que é fácil de verificar que as condições de Cauchy-Riemann se verificam para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, conclui-se que a função f é inteira. Então, e dado que 0 pertence à região interior à curva, pela fórmula integral de Cauchy

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\,dz = \frac{1}{2!} 2\pi\mathrm{i} f''(z)\Big|_0$$

Para terminar o cálculo do integral falta calcular $f''(z)$. Por exemplo

$$\begin{aligned}
f''(z) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)' \\
&= \Big(-3x^2 + 3y - 6xy + \mathrm{i}(3x^2 - 3y^2 - 6xy)\Big)' \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y - 6xy) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2 - 6xy) \\
&= -6x - 6y + \mathrm{i}(6x - 6y)
\end{aligned}$$

Tendo-se então que $f''(0) = 0$ e, finalmente,

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3}\,dz = 0\,.$$

16. Mostre que não existe nenhuma função inteira não constante f tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tenha

$$f(z+1) = f(z) \quad \mathrm{e} \quad f(z+\mathrm{i}) = f(z) \tag{1}$$

Resolução:

As condições (1) determinam que f é periódica de período 1 e tembém de período i. Em consequência, o comportamento da função no quadrado fechado de vértices 0, 1, $1+\mathrm{i}$ e i determina os valores de f para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Como este quadrado é um conjunto compacto (fechado e limitado) pelo teorema de Weirstrass f é limitada no quadrado. Logo, por (1), f é limitada em $\mathbb{C}$. Pelo teorema de Liouville f é constante.

17. Sela $P(z)$ um polinómio de grau N verificando

$$\oint_{|z|=2} \frac{P(z)}{(n+1)z-1} dz = 0$$

para todo $n = 0,\, 1, \cdots, N$. Determine P.

Resolução:

Atendendo a que um polinómio é uma função inteira, podemos apicar a fórmula integral de Cauchy aos integrais dados.

$$\frac{1}{n+1} \oint_{|z|=2} \frac{P(z)}{z - \frac{1}{n+1}} dz = 2\pi\mathrm{i} \frac{P(n+1)}{n+1} = 0\,.$$

Isto permite-nos concluir quer

$$P(1) = P(1/2) = P(1/3) = \cdots = P(1/(N+1)) = 0$$

ou seja $1,\, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{N+1}$ são $N+1$ raízes de $P(z)$. Mas, pelo teorema fundamental da Álgebra, um polinómio de grau $N > 0$ tem exactamente N raízes, pelo que a situação acima descrita apenas acontece sse $P(z) \equiv 0$ para todo o z.

18. Mostre que não existe uma função analítica f definida em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f'(z) = 1/z$. **Resolução:**

Se $f'(z) = \frac{1}{z}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, então f seria uma primitiva de $g(z) = \frac{1}{z}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\oint_{|z|=1} g(z) dz = 0\,;$$

porém, calculando o integral pela definição, o seu valor é $2\pi\mathrm{i}$.

19. Seja γ a parametrização de uma curva contida no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ que una o ponto $z = -\mathrm{i}$ ao ponto $z = \mathrm{i}$. Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$.

Resolução:

Como qualquer ramo do logaritmo complexo é primitiva de $\frac{1}{z}$, para podermos aplicar o teorema fundamental do cálculo há que escolher um ramo de $\log z$ que seja analítico num aberto simplesmente conexo que contenha a curva. Para o efeito podemos escolher, por exemplo, o valor principal do logaritmo. Assim

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \log z\Big|_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} = \log(\mathrm{i}) - \log(-\mathrm{i}) = \pi\mathrm{i}$$

20. Calcule

$$\int_\gamma 2z\,dz$$

onde $\gamma(t) = 2t^3 + (t^4 - 4t^3 + 2)\mathrm{i}$ para $-1 \leq t \leq 1$.

Resolução:

Dado que a função $2z$ é inteira podemos aplicar o teorema fundamental do Cálculo para calcular o integral. Assim

$$\int_\gamma 2z\,dz = z^2\Big|_{\gamma(-1)}^{\gamma(1)} = z^2\Big|_{-2+7\mathrm{i}}^{2-\mathrm{i}} = 48 + 24\mathrm{i}$$

21. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais:

$$(\mathbf{a})\ \int_{\pi\mathrm{i}}^{2\pi\mathrm{i}} \cosh z\,dz \quad (\mathbf{b})\ \int_{-4\mathrm{i}}^{4\mathrm{i}} \frac{1}{z^2}\,dz \quad (\mathbf{c})\ \int_0^{\mathrm{i}/2} e^{\pi z}\,dz$$

Resolução:

(a) Dado que a função $\cosh z$ é inteira podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular o integral. Assim

$$\int_{\pi\mathrm{i}}^{2\pi\mathrm{i}} \cosh z\,dz = \operatorname{senh} z\Big|_{\pi\mathrm{i}}^{2\pi\mathrm{i}} = \operatorname{senh}(2\pi\mathrm{i}) - \operatorname{senh}(\pi\mathrm{i}) = \mathrm{i}(\operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(\pi)) = 0$$

(b) Considere-se a semi-circunferência $|z| = 4$ com $\operatorname{Re} z > 0$. Dado que $f(z) = \frac{1}{z^2}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ exite um aberto simplesmente conexo não contendo 0 e onde tanto f como a sua primitiva, $-\frac{1}{z}$, são analíticas. Podemos pois aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular o integral. Assim

$$\int_{-4\mathrm{i}}^{4\mathrm{i}} \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}\Big|_{-4\mathrm{i}}^{4\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

(c) Dado que a função $e^{\pi z}$ é inteira podemos aplicar o teorema fundamental do Cálculo para calcular o integral. Assim

$$\int_0^{\mathrm{i}/2} e^{\pi z}\, dz = \left.\frac{e^{\pi z}}{\pi}\right|_0^{\mathrm{i}/2} = \frac{\mathrm{i}-1}{\pi}$$

22. Mostre que a função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$ não é primitivável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Resolução:

Basta recordar que ser primitivável num conjunto é equivalente a que

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

para qualquer curva de Jordan contida no conjunto. No entanto, é fácil de verificar que

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} dz = 2\pi \mathrm{i} (\operatorname{sen} z)'\Big|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$$

23. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \log z\, dz$, onde γ é o arco da circunferência de centro na origem e de raio r situado no primeiro quadrante.

Resolução:

Para que o integral exista, vamos escolher um ramo do logaritmo complexo que seja contínuo (e também analítico) num aberto simplesmente conexo contendo a curva. Para tal, por exemplo, tomamos $\log z$ com $\arg z \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ que é analítico em $\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{-\mathrm{i}\pi/2}\,,\, x \geq 0\}$. Pela analiticidade do logaritmo escolhido, e primitivando por partes

$$\int_\gamma \log z\, dz = \int_1^{\mathrm{i}} \log z\, dz = z\log z\Big|_1^{\mathrm{i}} - \int_1^{\mathrm{i}} 1\, dz = \mathrm{i}\log \mathrm{i} - z\Big|_1^{\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{2} + 1 - \mathrm{i}$$

2 Exercícios Propostos

1. Determine uma função, $\gamma(t)$ que descreva

a) o segmento de recta unindo i a $2-\mathrm{i}$.

b) a circunferência de raio 2 centrada em $3-2\mathrm{i}$ percorrida uma vez em sentido directo.

2. Determinar

$$\int_\gamma \mathrm{Im}\,(z^2)\,dz$$

sendo γ a curva que une 0 a $2+4i$ ao longo

(a) do segmento de recta; (b) do eixo real até 2 e depois verticalmente até $2+4i$;
(c) da parabola $y=x^2$.

3. Calcule o integral $\int_\gamma f(z)\,dz$, onde

(a) $f(z)=e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z$, γ é o segmento que une os pontos 0 e $1+i$
(b) $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z^2$, $\gamma=\{z \mid |z|=1,\ -\pi\leq \arg z\leq 0\}$
(c) $f(z)=z\bar{z}$, $\gamma=\{z \mid |z|=1\}$ (d) $f(z)=1/z$, $\gamma(t)=e^{it}$ com $t\in[0,8\pi]$
(e) $f(z)=e^z$, γ os segmentos $[0,1]\cup[1,1+i]\cup[1+i,i]$

4. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t\mapsto t+it^2$.

Para cada valor de $k=1,2$, calcule, utilizando a defnição, os integrais

$$\int_{\gamma_k} e^z dz \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$$

Comente os resultados obtidos.

5. Calcule

$$\int_C f(z)dz$$

em que C é a curva $y=x^3$ unindo os pontos $-1-\mathrm{i}$ a $1+\mathrm{i}$ e

$$f(z)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mathrm{Re}\,z<0 \\ 4\,\mathrm{Re}\,z & \text{se} \quad \mathrm{Re}\,z\geq 0\end{cases}$$

6. Mostre que

(a) $\left|\oint_{|z-1|=2}\frac{1}{z}\,dz\right|\leq 4\pi$ (b) $\left|\oint_{|z|=R}\frac{z-1}{z+1}dz\right|\leq 2\pi\frac{R(R+1)}{R-1}$ para $R>1$

(c) $\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^4}dz\right|\leq \pi\,R^{-3}$ em que $\gamma(t)=Re^{it}$ e $t\in[0,\pi]$

7. Seja

$$f(z)=z^{-1+i}=\exp\left[(-1+i)\,\log z\right] \quad , \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

onde

$$\log z=\log|z|+\mathrm{i}\arg z \quad \text{para } \ 0\leq \arg z<2\pi \quad (\text{o ramo} - 0 \text{ do logaritmo}).$$

Calcule

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido positivo.

8. Calcule $\int_\gamma z^2 dz$ em que $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t} \operatorname{sen}^3 t$ com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Determine

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2} dz$ em que γ é qualquer caminho regular e simples unindo os pontos i a $\frac{1}{\pi}$ e não passando pela origem.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ em que $\gamma = \{z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \ : \ t \in [0, \frac{3\pi}{2}]\}$ percorrida em sentido anti-horário.

10. Verifique se a função $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+4}$ é primitivável em

(a) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i},\, 2\mathrm{i}\}$

(b) $\Omega = \mathbb{C} \setminus I$ sendo $I = \{z = y\mathrm{i}\,,\, y \leq 2\}$

11. Calcule $\int_\gamma e^z dz$ em que γ é triângulo de vértices $z = 0$, $z = 1$ e $z = \pi\mathrm{i}$.

12. Calcule o valor do integral

$$\int_\gamma \frac{e^z + z}{z - 2}\, dz$$

em que

(a) γ é a circunferência de centro na origem e de raio 1

(b) γ é a circunferência de centro na origem e de raio 3.

13. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designa-se por $\gamma(a, r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)} (z^2 + 1)^{-1} dz$ para:

(a) $\gamma(1, 1)$ (b) $\gamma(i, 1)$ (c) $\gamma(-i, 1)$ (d) $\gamma(0, 2)$ (e) $\gamma(3i, \pi)$

14. Calcule os integrais, considerando as curvas são percorridas uma vez em sentido directo.

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$ (b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z \operatorname{senh} z}{(z^2 - 1)^2} dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$ (d) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3} dz$

15. Determine todos os possíveis valores do integral

$$I = \oint_C \frac{z \cos z}{z^2 + 1} dz$$

onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

16. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e tal que $f(0) = i$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} f(4e^{it})dt$$

17. Considere a função $u(x,y) = x\alpha(y) + e^{-3y}\cos(3x)$, onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

(a) Determine todas as funções $\alpha(y)$ tais que u é a parte real de uma função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Considerando $\alpha(y) = 2y+1$, determine a função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que Re $(f) = u$ e $f(0) = 1 + i$.

(c) Sendo f a função determinada na alínea anterior, calcule $\int_\gamma f'(z)dz$ onde γ é o caminho parametrizado por $\gamma(t) = t + i\,\mathrm{sen}\,t$, com $0 \leq t \leq \pi$.

18. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x,y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

(a) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

(b) Seja $\lambda = 1$. Determine uma função analítica f tal que $f(1) = 1$ e a parte real de f é u.

(c) Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}\,dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

19. Considere a função complexa de variável complexa definida em $\mathbb{C}$ por $\psi(z) = z^2 - \bar{z}^2$.

(a) Calcule $\mathrm{Re}\,\psi$ e $\mathrm{Im}\,\psi$ e determine o domínio de analiticidade de ψ.

(b) Tomando $v(x,y) = \mathrm{Im}\,\psi(x + \mathrm{i}y)$, verifique que v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(c) Determine a função f analítica em $\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}\,f(x + \mathrm{i}y) = v(x,y)$ e $f(0) = 2$.

(d) Calcule o valor de

$$\oint_{|z|=2018} \frac{zf(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz\ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

20. (a) *Teorema de Liouville:* Mostre que se f é inteira e limitada então f é constante em $\mathbb{C}$. **Sugestão:** Utilize a fórmula integral de Cauchy para mostrar que $f'(z) = 0$.

(b) Mostre que, se f é inteira e existem $M \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tem $|f(z)| \leq M(1 + |z|^n)$, então f é um polinómio de grau menor ou igual que n.

3 Soluções de 4.2

1. a) $\gamma(t) = 2t + \mathrm{i}(1-2t)$, $t \in [0,1]$ b) $\gamma(t) = 3 - 2\mathrm{i} + 2e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$

2. **(a)** $\frac{16}{3}(2+4i)$ **(b)** $32i$

3. **(a)** $\frac{1+i}{4}(e^2-1)$ **(b)** $-\frac{\pi}{2}$ **(c)** 0 **(d)** $8i\pi$ **(e)** $\cos 1 - 1 + i \operatorname{sen} 1$

4. $\int_{\gamma_1} e^z = \int_{\gamma_2} e^z = e^{1+i} - 1$ e $\int_{\gamma_1} \bar{z}^2 = \frac{2}{3}(1-i)$, $\int_{\gamma_2} \bar{z}^2 = \frac{14}{15} - \frac{i}{3}$

5. $3 + 5\mathrm{i}$

7. $i(1-e^{-2\pi})$

8. $-\frac{\mathrm{i}}{3}$

9. **(a)** $-i \operatorname{sh} 1$ **(b)** $\frac{3\pi i}{2}$

10. **(a)** Não **(b)** Sim

11. 0

12. **(a)** 0 **(b)** $2\pi\mathrm{i}(e^2+2)$

13. **(a)** 0 **(b)** π **(c)** $-\pi$ **(d)** 0 **(e)** π

14. **(a)** $-\pi i$ **(b)** 0 **(c)** $\frac{\pi^2}{2} \operatorname{senh} 1$ **(d)** $\pi^3 i$

15. $$I = \begin{cases} 0 & \text{se } \ i, -i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm i\pi \cosh 1 & \text{se } \ i \in \operatorname{int}\gamma \ , \ -i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm i\pi \cosh 1 & \text{se } \ -i \in \operatorname{int}\gamma \ , \ i \notin \operatorname{int}\gamma \\ \pm 2i\pi \cosh 1 & \text{se } \ i, -i \in \operatorname{int}\gamma \end{cases}$$

16. $2\pi i$

17. **(a)** $\alpha(y) = ay + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
(b) $f(x+iy) = x(2y+1) + e^{-3y}\cos(3x) + i(y^2 + y - x^2 + e^{-3y}\operatorname{sen}(3x) + 1)$
(c) $\pi - 2 - i\pi^2$

18. **(a)** $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ **(b)** $f(z) = f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ **(c)** $2\pi i$

19. **(a)** $\operatorname{Re}\psi \equiv 0$ e $\operatorname{Im}\psi = 4xy$, domínio de analiticidade $= \emptyset$
(c) $f(x+\mathrm{i}y) = 2x^2 - 2y^2 + 2 + 4xy\mathrm{i}$ **(d)** $-8\pi\mathrm{i}$