TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 3

Derivada complexa e equações de Cauchy-Riemann. Funções holomorfas. Funções harmónicas.

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada. Calcule a derivada nos pontos onde esta existe. Indique o domínio de analiticidade das funções.

   a) $f(x+iy) = x^2 - iy^2$ b) $f(z) = z^2 - 3z$ c) $f(z) = z - \bar{z}$

   d) $f(z) = \mathrm{Im}(z^2)$ e) $f(z) = \overline{e^z}$ f) $f(x+iy) = x^3 - i(1-y)^3$

   Resolução:

Em todas as alíneas denominaremos por D_f o domínio de diferenciabilidade e porD_A o domínio de analiticidade.

(a) Denominando $u(x,y) = x^2$ e $v(x,y) = -y^2$, vamos começar por determinar os pontos onde a derivada da função existe (isto é onde as derivadas parciais de u e v existem e são contínuas, e em que pontos se verificam as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

e é óbvio que estas funções estão definidas e são contínuas em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **(A)**. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad x = -y$$

e consequentemente a primeira condição de Cauchy-Riemann verifica-se no conjunto $\{z : \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

e consequentemente a segunda condição de Cauchy-Riemann verifica-se em $\mathbb{C}$. Conclui-se que u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann no conjunto

$$D_f = \{z\,:\, \mathrm{Re}\, z = -\,\mathrm{Im}\, z\} \quad (\mathbf{B})$$

Tem-se então que

- Se $z \notin D_f$, $f'(z)$ não existe por **(B)**.
- Se $z \in D_f$, **(A)**+**(B)** implicam que existe $f'(z)$.

O domínio de diferenciabilidade é D_f. Para $z = a - \mathrm{i}a \in D$

$$f(a - a\mathrm{i}) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, -a) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a, -a) = 2x\Big|_{(a,-a)} = 2a$$

Finalmente o domínio de analiticidade é o conjunto vazio. Note-se que os únicos pontos admissíveis são os de D_f, e para qualquer um destes complexos qualquer sua vizinhança contém complexos que não pertencem a D_f.

(b) Sendo $f(z) = z^2 - 3z = (x + \mathrm{i}y)^2 - 3(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 - 3x + \mathrm{i}(2xy - 3y)$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x, y) = 2xy - 3y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$$

É claro que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas, f é diferenciável em $\mathbb{C}$ e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x - 3 + i2y = 2z - 3$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. O domínio de analiticidade é $\mathbb{C}$, ou seja f é uma função inteira.

(c) Sendo $f(z) = z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x, y) = 0 \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x, y) = 2y$$

como tal, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Dado que a condição $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ não se verfica para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

(d) Sendo $f(z) = \mathrm{Im} z^2 = \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2xy$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x, y) = 2xy \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x, y) = 0$$

como tal, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

É imediato verificar que as derivadas parciais de u e v são contínuas em $\mathbb{R}^2$, e que as equações de Cauchy Riemann se verificam apenas no ponto $(0,0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z = 0$, e

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$$

(e) Sendo $f(z) = \overline{e^z} = \overline{e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y} = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = e^x \cos y \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$

Para que se verifiquem as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases}$$

Atendendo a que as funções seno e coseno nunca se anulam simultaneamente, tem-se que o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

(f) Denominando $u(x,y) = x^3$ e $v(x,y) = (y-1)^4$, vamos começar por determinar os pontos onde a derivada da função existe (isto é onde as derivadas parciais de$u$ e v existem e são contínuas e em que pontos se verificam as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3(y-1)^2$$

e é óbvio que estas finçcoes estão definidas e são contínuas em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **(A)**. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = (1-y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm(1-y)$$

e, consequentemente, a primeira equação de Cauchy-Riemann verifica-se no conjumto $\{z : \mathrm{Re}\, z = 1 - \mathrm{Im}\, z\} \cup \{z : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z - 1\}$. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0;$$

consequentemente, a segunda equação de Cauchy-Riemann verifica-se no conjunto $\mathbb{C}$. Conclui-se que u e v verificam as equações de Cauchy-Riemann no conjunto

$$D = \{z : \mathrm{Re}\, z = 1 - \mathrm{Im}\, z\} \cup \{z : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z - 1\} \quad (\mathbf{B})$$

Tem-se então que

- Se $z \notin D$, $f'(z)$ não existe por **(B)**.
- Se $z \in D$, **(A)**+**(B)** implicam que existe $f'(z)$.

Assim o domínio de diferenciabilidade é D e

$$\left(x^3 - \mathrm{i}(1-y)^3)\right)'\Big|_{(1-a)+a\mathrm{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}(1-a,a) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(1-a,a) = 3x^2 + 0\mathrm{i}\Big|_{(1-a,a)} = 3(1-a)^2$$

etambém

$$\left(x^3 - \mathrm{i}(1-y)^3)\right)'\Big|_{a-1+a\mathrm{i}} = \frac{\partial u}{\partial x}(a-1,a) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a-1,a) = 2x - 3 + 2y\mathrm{i}\Big|_{(a,a-1)} = 3(a-1)^2$$

Finalmente, o domínio de analiticidade de f é o conjunto vazio.

2. Determine os valores reais de a e b de modo a que a função f seja inteira e determine a sua derivada

$$f(x + \mathrm{i}y) = 3x - y + 5 + (ax + by - 3)\mathrm{i}$$

Resolução:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = a \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b$$

é óbvio que todas são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = b \\ -1 = -a \end{cases}$$

Conclui-se que f será inteira sse $a = 1$ e $b = 3$ (e $D_f = \emptyset$ para quaisquer outros valores de a e b). Para $a = 1$ e $b = 3$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 3 + \mathrm{i}$$

Note-se que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = f(x + y\mathrm{i}) = 3x - y + 5 + (x + 3y - 3)\mathrm{i} = (3 + \mathrm{i})z + (5 - 3\mathrm{i})$$

e coimo tal

$$f'(z) = 3 + \mathrm{i} + + + +$$

3. Prove que as funções $f(z) = |z|^2$ e $g(z) = \overline{z}$ não são analíticas em qualquer ponto do seu domínio.

Resolução:

Sendo $f(z) = f(x+iy)x^2 + y^2$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = 0$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

ou seja, as condições de Cauchy-Riemann verificam-se apenas em $z = 0$. Assim, o domínio de diferenciabilidade é $\{0\}$ e, como tal, o domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

Sendo $g(z) = g(x+iy) = x - y\mathrm{i}$, verifica-se que

$$\mathrm{Re} f \equiv u(x,y) = x \quad , \quad \mathrm{Im} f \equiv v(x,y) = -y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = .1$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ou seja, as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em todos os pontos de $\mathbb{C}$. Assim sendo, o domínio de analiticidade de g é o conjunto vazio.

4. Mostre que se f admite derivada num ponto z_0 então f é contínua em z_0. Dê um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{C}$ que não admite derivada em ponto algum.

Resolução:

Se f admite derivada num ponto z_0, por definição existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_o}$$

o que implica (pela definição de limite) que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_o} \right| < \epsilon$$

ou seja

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| < \epsilon |z - z_0| < \epsilon \delta$$

o que demonstra a continuidade de f em z_0. Como exemplo de uma função contínua em $\mathbb{C}$ e sem derivada em ponto algum, usa-se a função $g(z) = \overline{z}$ que é contínua em $\mathbb{C}$ (dado que as suas partes real e imaginária são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, e como vimos no exercício 4 não tem derivada em ponto algum.

5. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em $(x,y) = (0,0)$.

(b) Verifique, utilizando a definição, que $f'(0)$ não existe.

(c) Justifique que as alíneas (a) e (b) não contradizem o teorema de Cauchy-Riemann.

Resolução:

(a) Atendendo à definição de f, podemos escrever

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tem-se então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = -1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(h,0)-v(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h)-v(0,0)}{h} = 1,$$

Como se vê as condições de Cauchy-Riemann são válidas em $(x,y) = (0,0)$.

(b) Se existir $f'(0)$, é dada pelo limite

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x+iy}$$

Fazendo z convergir para 0 ao longo do eixo real (o que significa $x \to 0$ e $y = 0$), obtém-se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x+ix}{x} = 1+i$$

enquanto que, fazendo z convergir para 0 na recta $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}z = \mathrm{Im}x\}$ (o que significa $x \to 0$ e $y = x$), obtem-se

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{ix}{x+ix} = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{2}$$

Como $1+i \neq \frac{1+i}{2}$ conclui-se que o limite não existe e, consequentemente, f não admite derivada em $z = 0$.

(c) As funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$, embora tenham derivadas parciais em $(0, 0)$, não são diferenciáveis em $(0, 0)$. Assim, a função f, vista como uma função de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, não é diferenciável em $(0, 0)$.

6. Determine a derivada da função $f(z) = \log(e^z + 1)$, onde se considera o valor principal do logaritmo. Indique a região em que é analítica.

   Resolução:

A função $e^z + 1$ é analítica em $\mathbb{C}$. Logo, $\log(e^z + 1)$ é analítica em todos os pontos tais que e^z+1 pertence ao domínio de analiticidade da função logaritmo, ou seja, é analítica no conjunto dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $e^z + 1$ não pertence ao corte do valor principal da função logaritmo. Ou seja

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(e^z + 1) = 0\,,\, \mathrm{Re}(e^z + 1) \le 0\}$$

Escrevendo $z = x + y\mathrm{i}$,

$$\mathrm{Im}(e^z + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \operatorname{sen} y = 0 \quad \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \quad \Leftrightarrow y = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Por outro lado,

$$\mathrm{Re}(e^z + 1) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y + 1 \le 0 \qquad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y \le -1$$

Como $y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, temos $\cos y = 1$, se n é par, e $\cos y = -1$, se n é ímpar. No primeiro caso isso implica que $e^x \le -1$ o que é impossível. No segundo caso teremos $e^x \ge 1$, ou seja, $x \ge 0$. Concluímos que f é analítica no conjunto

$$D_f = \mathbb{C} \setminus \{z = x + y\mathrm{i} \ : \ x \ge 0 \text{ e } y = 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Utilizando o teorema da derivada da função composta,

$$f'(z) = \frac{e^z}{e^z + 1} \quad \text{para} \quad z \in D_f,$$

para $z \notin D_f$ a função é descontínual logo $f'(z)$ não existe.

7. Calcule as derivadas das seguintes funções inducando o conjunto onde são

válidas:

a) $f(z) = 2z^4 - z^3 + 10\mathrm{i}z$ b) $g(z) = (2z + \mathrm{i})^4$

c) $h(z) = \dfrac{1 + (2 - \mathrm{i})z}{2z + 9}$ d) $j(z) = z + \dfrac{1}{z}$

Resolução:

(a) A função f é inteira (é um polinómio) pelo que, usando as regras de derivação,

$$f'(z) = 8z^3 - 3z^2 + 10\mathrm{i} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(b) A função g é inteira (é um polinómio) pelo que, usando as regras de derivação,

$$g'(z) = 8(2z + \mathrm{i})^3 \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(c) A função h é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{9}{2}\}$ (é uma função racional) pelo que, usando as regras de derivação

$$h'(z) = \frac{(2 - \mathrm{i})(2z + 9) - (1 + (2 - \mathrm{i})z)2}{(2z + 9)^2} = \frac{16 - 18\mathrm{i}}{(2z + 9)^2} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{9}{2}\}$$

(d) A função j é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (é uma função racional) pelo que, usando as regras de derivação

$$j'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

8. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras, então f é constante.

Resolução:

Recordemos que se f é analítica num conjunto aberto e conexo $A \subset \mathbb{C}$ e $f'(z) = 0$, então f é constante. No nosso caso $A = \mathbb{C}$, logo basta verificar que $f'(z) = 0$.

Escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, como f é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, escrevendo $\overline{f}(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$, como $\overline{f}$ é analítica em $\mathbb{C}$, concluímos que as funções u e $-v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Deste conjunto de equações concluímos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Mas então:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

como pretendíamos.

9. Sendo n um número inteiro determine, usando a definição, $f'(z)$ para $f(z) = z^n$.

Resolução:

Comecemos por estudar o caso $n = 0$. Neste caso $f(z) = C =$ constante e assim

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Conclui-se que para $n = 0$ existe a derivada de f e é dada po $f'(z) = 0$.

Para $n > 0$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} h^k z^{n-k} - z^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(z^n + nhz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2 z^{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}h^{n-2}z^2 + nh^{n-1}z + h^n\right) - z^n}{h} \\ &= nz^{n-1} \end{aligned}$$

Finalmente, para $n < 0$, para $z \neq 0$, considere-se $p > 0$ tal que $p = -n$. Então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(z+h)^p} - \frac{1}{z^p}}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^p - z^p}{h} \lim_{h\to 0} \frac{1}{z^p(z+h)^p} \end{aligned}$$

TUsando o limite calculado anteriormente

$$f'(z) = -\frac{pz^{p-1}}{z^{2p}} = -pz^{-p-1} = nz^{n-1}$$

10. Seja $f(z)$ uma função inteira verificando:

- $\operatorname{Re} f(z) = xy + e^x \cos y$;
- $f(0) = 1 + \mathrm{i}$.

Determine a função f e expresse-a em termos de z.

Resolução:

Sdndo $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = xy + e^x \cos y + \mathrm{i}v(x, y)$ uma função inteira, as funções u e v terão que satisfazer as condições de Cauchy-Riemann para todo o par ordenado (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Este facto permite calcular a função $v = \operatorname{Im} f$ a menos de uma constante da forma que se segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad y + e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\Leftrightarrow \quad v(x, y) = \int \Big(y + e^x \cos y \Big) dy + c(x) \\
&\Leftrightarrow \quad v(x, y) = \frac{y^2}{2} + e^x \operatorname{sen} y + c(x)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad &\Leftrightarrow \quad x - e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y^2}{2} + e^x \operatorname{sen} y + c(x) \Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x - e^x \operatorname{sen} y = -e^x \operatorname{sen} y - c'(x) \\
&\Leftrightarrow \quad c'(x) = -x \\
&\Leftrightarrow \quad c(x) = -\frac{x^2}{2} + c
\end{aligned}$$

para $c \in \mathbb{R}$. Assim

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^x \operatorname{sen} y + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

É dado que $f(0) = 1 + \mathrm{i}$ pelo que $u(0, 0) = 1$ (o que se verifica), e $v(0, 0) = 1$ o que implica $c = 1$. Assim sendo

$$\begin{aligned}
f(z) = f(x + \mathrm{i}y) \quad &= \quad xy + e^x \cos y + \mathrm{i}\Big(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + e^x \operatorname{sen} y + 1 \Big) \\
&= \quad e^x \cos y + \mathrm{i}e^x \operatorname{sen} y - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} \Big) + \mathrm{i} \\
&= \quad e^z - \frac{\mathrm{i}}{2} z^2 + \mathrm{i}
\end{aligned}$$

11. Considere f analítica para $z \neq 0$ e que verifica $\operatorname{Re} f(z) = x - \frac{x}{x^2+y^2}$ e $f(1) = 0$. Determine a função f expressa em termos de z.

Resolução:

Sendo $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = x - \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}v(x, y)$ uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, as funções u e v terão que satisfazer as condições de Cauchy-Riemann para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2xy}{\times(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial x} \\
&\Leftrightarrow \quad v(x, y) = \int \frac{2xy}{\times(x^2+y^2)^2} dx + c(y) \\
&\Leftrightarrow \quad v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} + c(y)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2} + c(y)\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{1^2+y^2} + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(y) \\
&\Leftrightarrow \quad c'(y) = 1 - \frac{2}{1^2+y^2} + 2\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad c(y) = y + c
\end{aligned}$$

para $c \in \mathbb{R}$. Assim

$$v(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} + y + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

É dado que $f(1) = 0$, pelo que $u(1, 0) = 0$ (o que se verifica), e $v(1, 0) = 0$ o que se verifica se $c = 0$. Então

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x - \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\Big(\frac{y}{x^2+y^2} + y\Big) = x + \mathrm{i}y - \frac{x - \mathrm{i}y}{(x - \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y(}$$

concluindo-se que

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

12. Determine a função analítica $f(z)$ que verifica

- $\operatorname{Im} f(z) = x(x^2 - 3y^2 - 6y - 4)$;
- $f(0) = 0$.

Resolução:

Sendo $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}\Big(x^3 - 3xy^2 - 6xy - 4x\Big)$ uma função inteira, as funções u e v terão que satisfazer as condilções de Cauchy-Riemann para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$. Com isto podemos calcular a função $\operatorname{Re} f$ a menos de uma constante. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy - 6x \\
&\Leftrightarrow \quad u(x, y) = \int (-6xy - 6x)dx + c(y) \\
&\Leftrightarrow \quad u(x, y) = -3x^2y - 3x^2 + c(y)
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(- 3x^2y - 3x^2 + c(y)\Big) = -3x^2 + 3y^2 + 6y + 4 \\
&\Leftrightarrow \quad c'(y) = 3y^2 + 6y + 4 \\
&\Leftrightarrow \quad c(y) = y^3 + 3y^2 + 4y + c
\end{aligned}$$

para $c \in \mathbb{R}$. Assim

$$u(x, y) = -3x^2y - 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 4y + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

É dado que $f(0) = 0$ pelo que $v(0, 0) = 0$ (o que se verifica) e $u(0, 0) = 0$, o que se verifica se $c = 0$. Então

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = -3x^2y - 3x^2 + y^3 + 3y^2 + 4 + \mathrm{i}\Big(x(x^2 - 3y^2 - 6y - 4)\Big)$$

13. Considere uma função complexa de domínio $\mathbb{C}$ e tal que $\operatorname{Re} f(z) = x^2y^2$ para todo $z = x + \mathrm{i}y$. Será que esta função pode ser analítica? Se sim, dê um exemplo de tal função, se não justifique porquê.

Resolução:

Uma condição necessária para que uma função escalar de domínio em $\mathbb{R}^2$ seja a parte real (ou imaginária) de uma função analítica é que seja harmónica. Por isso, vamos testar se a função $u(x, y) = x^2y^2$ é, ou não, harmónica.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^2$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2$$

Então

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 + 2y^2$$

Obviamente que o laplaciano de u apenas se anula no ponto $(0,0)$, pelo que u não é harmónica em qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Como tal **não** pode ser a parte real (nem imaginária) de qualquer função analítica.

14. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto aberto $V \subset \mathbb{C}$. Mostre que

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)|f(x+\mathrm{i}y)|^2 = 4|f'(x+\mathrm{i}y)|^2$$

Resolução:

Sendo $f = u + \mathrm{i}v$, teremos que $|f(x+\mathrm{i}y)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$. Então

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big) = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big) = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}$$

Calculando as segundas derivadas, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big) \\
= \;& 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
= \;& 2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2u\Delta u + 2v\Delta v\Big]
\end{aligned}$$

Atendendo a que f é analítica em V, as funções u e v verificam as condições de Cauchy-Riemann e são harmónicas em V ($\Delta u = 0$ e $\Delta v = 0$). Então

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(|f(x+\mathrm{i}y)|^2\Big) \\
= \;& 2\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(-\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 \\
= \;& 4\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big] \\
= \;& 4\Big|\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|^2 = 4|f'(x+\mathrm{i}y)|^2
\end{aligned}$$

15. Considere f uma função complexa contínua, definida num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Assuma-se que f não se anula em Ω e que f^2 é analítica em Ω, mostre que f é analítica em Ω.

Resolução:

Escolha-se $z_0 \in \Omega$. Então

$$\frac{f^2(z) - f^2(z_0)}{z - z_0} = (f(z) + f(z_0))\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Por hipótese existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f^2(z) - f^2(z_0)}{z - z_0}$$

e pela continuidade de f,

$$\lim_{z \to z_0}(f(z) + f(z_0)) = 2f(z_0)$$

Atendendo a que $f(z_0) \neq 0$, podemos escrever que para todo $z_0 \in \Omega$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^2(z) - f^2(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) + f(z_0)} = \frac{\Big(f^2(z_0)\Big)'}{2f(z_0)}$$

o que mostra o resultado.

16. Seja u numa função harmónica em $\mathbb{R}^2$ tal que u^2 é tambem harmónica em $\mathbb{R}^2$. Mostre que u é constante.

Resolução:

Calculando o laplaciano de u^2

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(u^2\Big) = 2u\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(u^2\Big) = 2u\frac{\partial u}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(u^2\Big) = 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(u^2\Big) = 2\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Então

$$\Delta\Big(u^2)\Big) = 2u\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big) + 2u\Delta u$$

Dado que tanto u como u^2 são harmónicas, tem-se que

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 = 0$$

ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Conclui-se que u é constante em $\mathbb{R}^2$.

17. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

   (a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

   (b) Mostre que u é uma função harmónica.

   (c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

Resolução:

(a) Fazendo $z = x + iy$

$$\begin{aligned} g(z) &= z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2) \quad = \quad (x+iy)((x+iy)^2 + (x-iy)^2 - (x^2+y^2)) \\ &= x^3 - 3xy^2 + i(x^2y - 3y^3) \end{aligned}$$

pelo que

$$\mathrm{Re}\, f \equiv u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\, f \equiv v(x,y) = x^2y - 3y^3$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 - 9y^2$$

É óbvio que todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$, visto serem funções polinomiais. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 6y^2 = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0$$

Conclui-se que as condições de Cauchy-Riemann se verificam sse $(x, y) = (0, 0)$, pelo que a função admite derivada apenas em $z = 0$ e consequentemente o seu domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

(b) Como já se referiu, $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ visto ser polinomial. Por outro lado

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

pelo que $\Delta u = 0$ para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Denotaremos a harmónica conjugada de u por $\tilde{v}$. Por definição, u e $\tilde{v}$ têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann. Então

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2 y - y^3 + C_1(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2 y - y^3 + C_1(x))\Big) = 6xy$$

pelo que

$$C_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = C \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}(x, y) = 3x^2 y - y^3 + C$$

Note que, como seria de esperar atendendo ao resultado da alínea (a), a conjugada harmónica de u, $\tilde{v}$, é distinta de v.

2 Exercícios Propostos

1. Determine o domínio de diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule a derivada nesse domínio.

(a) $f(z) = z^2 \bar{z}$ (b) $f(x + iy) = xy - ix$ (c) $f(z) = \cos(3z) - i$

(d) $f(z) = |z|\bar{z}$ (e) $f(x + iy) = x^2 - y + i(x - y^2)$

(f) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ (g) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$ (h) $f(z) = e^{\bar{z}}$

2. Indique o domínio de analiticidade das funções do exercício anterior.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$.

(a) Estude a analiticidade de $f(z)$.

(b) Calcule $f'(z)$ nos pontos onde f é analítica.

4. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

Mostre que f verifica as condições de Cauchy-Riemann no ponto $z = 0$, mas não admite derivada nesse ponto.

5. Mostre que as seguintes funções admitem derivada em 0 mas não são analíticas nesse ponto.

$$\text{(a)} \quad f(z) = z\overline{z} \qquad \text{(b)} \quad f(z) = \cos|z|$$

6. O Jacobiano, $J(x, y)$ de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \Big(u(x, y), v(x, y)\Big)$ é definido como o determinante da matriz jacobiana de f, ou seja:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

(a) Se $f = u + \mathrm{i}v$ é analítica num ponto (x_0, y_0), mostre que $J(x_0, y_0) = \big|f'(x_0 + \mathrm{i}y_0)\big|^2$.

(b) Sendo $f(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, determine de duas formas $J(0, 0)$.

7. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $\operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}$ (b) $\cos(z) + (2z + 1)^z$ (c) $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$

(d) $\log(z^2 + iz)$ (valor principal)

8. Determine as regiões onde as seguintes funções são analíticas e calcule a sua deivada:

$$f(z) = e^{\pi z^3} - 1 \qquad g(z) = \cos\frac{1}{z} + e^{\frac{1}{z^2+1}}$$
$$h(z) = \operatorname{sen}(\log z^2) \quad j(z) = \sqrt{z^2 - 2}$$

9. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x; y) = e^y x + e^x y$?

10. Determine uma harmónica conjugada de cada uma das funções:

(a) $u(x, y) = xy^3 - x^3y + 2x + 1$ (b) $u(x, y) = e^{2x}\cos(2y)$

(c) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ (d) $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + 2y$

11. Decida se existem, ou não, funções analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições; em caso afirmativo, determine-as:

(a) Re$f(x+iy)$+ Im$f(x+iy) = x^2 - y^2$

(b) Im$f(x+iy) = 3x^3y + x + \alpha xy^3$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e satisfazendo $f(i) = 2$.

(c) $\operatorname{Re} f = u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $f(0) = 2\mathrm{i}$

12. Seja a um número real, e $f(z)$ uma função inteira verificando

- $\operatorname{Re} f(z) = e^{ax}\cos(2\pi y)$;
- $\operatorname{Re} f(1) < 1$ e $\operatorname{Im} f(1) = 2\pi$

(a) Determibe o valor de a.

(b) Para o valor encontrado na alínea anterior, determine a função f expressa em z.

13. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

(a) $\operatorname{Re} f(z) \equiv \text{(constante)}$,

(b) $f'(z) \equiv 0$,

(c) $|f(z)| \equiv \text{(constante)}$.

Mostre que $f(z) \equiv \text{(constante)}$.

3 Soluções de 3.2

Nas questões seguintes denota-se o domínio de diferenciabilidade por D_{dif} e o domínio de analiticidade por D_{an}.

1 e 2. (a) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$ (b) $D_{\text{dif}} = \{1\}$; $f'(1) = -\mathrm{i}$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(c) $D_{\text{dif}} = \mathbb{C}$; $f'(z) = -3\operatorname{sen}(3z)$; $D_{\text{an}} = \mathbb{C}$ (d) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(e) $D_{\text{dif}} = \{x - ix \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\}$; $f'(x - ix) = 2x + \mathrm{i}$, para $x \in \mathbb{R}$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(f) $D_{\text{dif}} = \emptyset$; $D_{\text{an}} = \emptyset$ (g) $D_{\text{dif}} = \{0\}$; $f'(0) = 0$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

(h) $D_{\text{dif}} = \emptyset$; $D_{\text{an}} = \emptyset$

3. $D_{\text{an}} = \{x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}$; para $z \in D_{\text{an}}$, $f'(z) = 2z$.

4. Calculando as derivadas parciais pela definição, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$$

Por outro lado, utilizando a representação em coordenadas polares $h = |h|e^{i\theta}$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0 \\ \theta=\alpha}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = e^{4i\alpha}$$

7. (a) $\cos(z) + 6z - (1 + 3z^3)e^{z^3}$

(b) $-\operatorname{sen}(z) + \left(\log(2z+1) + \frac{2z}{2z+1}\right)(2z+1)^z$ em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i \; : \; x \leq -\frac{1}{2}\}$

(c) $\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ (d) $f(z) = \frac{2z+i}{z^2+iz}$ em $\mathbb{C} \setminus \{iy \; : \; y \geq 0 \text{ ou } y \leq -1\}$

8. $D_f = \mathbb{C}$, $D_g = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}\}$, $D_h = \mathbb{C} \setminus \{z = \mathrm{i}y\}$, $D_j = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \sqrt{2}\}$,

9. Não

10. (a) $v(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{4} - \dfrac{3x^2y^2}{2} + 2y + c$, $c \in \mathbb{R}$ (b) $v(x,y) = e^{2x}\operatorname{sen}(2y) + c$, $c \in \mathbb{R}$

(c) $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + c$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $c \in \mathbb{R}$

(d) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - 2x + c$ para $x > 0$, $c \in \mathbb{R}$

11. (a) $f(x+iy) = \frac{x^2-y^2}{2} - xy + c + i(\frac{x^2-y^2}{2} + xy - c)$
(b) Existe para $\alpha = -3$; nesse caso:
$f(x+iy) = \frac{3}{4}(x^4+y^4) - \frac{9}{2}x^2y^2 - y + \frac{9}{4} + i(3x^3y + x - 3xy^3)$.
(c) $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + 2)$

12. **(a)** $a = -2\pi$ **(b)** $f(z) = e^{-2\pi z} + 2\pi\mathrm{i}$