Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 1

Operações com números complexos

1 Exercícios Resolvidos

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$:

a) $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ b) $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ d) $\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^3}$ e) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$

f) $(4-7\mathrm{i})(\overline{-2+3\mathrm{i}})$ g) $(2-3\mathrm{i})^2$ h) $\overline{(1-2\mathrm{i})^3}$ i) i^{234} j) $\dfrac{\overline{5+2\mathrm{i}}}{1+\mathrm{i}}$

Resolução:

(a) Usando a propriedade distributiva do produto relativamente à adição

$$(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 3 - \mathrm{i}$$

(b) Multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denoninador

$$\frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

(c) Multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denoninador e usando as alíneas anteriores

$$\frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$$

(d) Efectuando as operações indicadas

$$\frac{-1+2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^3} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}+3(\mathrm{i})^2+(\mathrm{i})^3} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{-2+2\mathrm{i}} = \frac{(-1+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})}{(-2+3\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})} = \frac{3-\mathrm{i}}{4}$$

(e) Multiplicando ambos os termos da fração pelo conjugado do denoninador

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}$$

(f) Efectuando as operações indicadas

$$(4-7\mathrm{i})(\overline{-2+3\mathrm{i}}) = (4-7\mathrm{i})(-2-3\mathrm{i}) = -29+2\mathrm{i}$$

(g) Desenvolvendo o quadrado

$$(2-3\mathrm{i})^2 = 4-12\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2 = -5-12\mathrm{i}$$

(h) Calculando firectamente

$$\overline{(1-2\mathrm{i})^3} = \overline{1-6\mathrm{i}+12\mathrm{i}^2-8\mathrm{i}^3} = \overline{-11+2\mathrm{i}} = -11-2\mathrm{i}$$

ou, atendendo a que o conjugado do produto é o produto dos conjugados

$$\overline{(1-2\mathrm{i})^3} = (1+2\mathrm{i})^3 = 1+6\mathrm{i}+12(\mathrm{i})^2+8(\mathrm{i})^3 = -11-2\mathrm{i}$$

(i) Atendendo a que $234 = 4q+r$ para q o resultado da divisão inteira de 234 por 4 e r o resto da mesma

$$\mathrm{i}^{234} = \mathrm{i}^{4q+r} = \mathrm{i}^{4q}\mathrm{i}^r = (\mathrm{i}^4)^q\mathrm{i}^r = \mathrm{i}^r$$

Visto o resto da divisão de 234 por 4 ser 2 temos então que

$$\mathrm{i}^{234} = \mathrm{i}^2 = -1$$

(j) Efectuando as operações indicadas

$$\frac{\overline{5+2\mathrm{i}}}{1+\mathrm{i}} = \frac{5-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(5-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{3-7\mathrm{i}}{2}$$

2. Determine a parte real e imaginária dos seguintes complexos

$$\text{a)} \quad \frac{1}{\mathrm{i}} \quad \text{b)} \quad \frac{\mathrm{i}-4}{2\mathrm{i}-3} \quad \text{c)} \quad (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$$

Solução:

(a) Pelo exercício anteror $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ pelo que $\operatorname{Re}\frac{1}{\mathrm{i}} = 0$ e $\operatorname{Im}\frac{1}{\mathrm{i}} = -1$

(b) Efectuando o quociente $\frac{\mathrm{i}-4}{2\mathrm{i}-3} = \frac{14+5\mathrm{i}}{13}$ pelo que $\operatorname{Re}\frac{\mathrm{i}-4}{2\mathrm{i}-3} = \frac{14}{13}$ e $\operatorname{Im}\frac{\mathrm{i}-4}{2\mathrm{i}-3} = \frac{5}{113}$

(c) Efectuando o produto $(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2$ temos que que $\operatorname{Re}(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 2$ e $\operatorname{Im}(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 0$.

3. Demonstre a lei do anulamento do produto complexo, isto é

$$z \cdot w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \ \text{ ou } \ w = 0$$

Solução:

Se, ou z ou w forem 0, então $zw = 0$ (elemento absorvente do produto). Reciprocamente vamos mostrar que se $zw = 0$ se tem $z = 0$ ou $w = 0$. Se $w = 0$ o resultado está demonstrado. Se $w \neq 0$ existe w^{-1} e então podemos multiplicar ambos os memboros da igualdade $zw = 0$ por w^{-1}. Assim

$$zw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad zww^{-1} = 0w^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$

e a propriedade é verificada.

4. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e escreva-os na forma trigonométrica:

$$\text{a)}\quad 3 \qquad \text{b)}\quad -2 \qquad \text{c)}\quad 1+\mathrm{i} \qquad \text{d)}\quad \mathrm{i} \qquad \text{e)}\quad -1-\mathrm{i}$$

$$\text{f)}\quad 3-4\mathrm{i} \quad \text{g)}\quad 1-\sqrt{3}\mathrm{i} \quad \text{h)}\quad (-2+2\mathrm{i})^2 \quad \text{i)}\quad -\pi\mathrm{i} \quad \text{j)}\quad \sqrt{3}+3\mathrm{i}$$

Solução:

(a) Por ser um número real positivo, isto é um complexo com parte imaginária nula e parte real positiva, tem-se que $|3| = 3$ e, por exemplo, $\arg 3 = 0$.

(b) Por ser um número real negativo, isto é um complexo com parte imaginária nula e parte real negativa, tem-se que $|-2| = 2$ e, por exemplo, $\arg(-2) = \pi$

(c) Tendo em conta que

$$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,(\arg(1+\mathrm{i})) = \frac{1}{1} = 1$$

visto o complexo pertencer ao primeiro quadrante, tem-se que (por exemplo) $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$.

(d) Por ser um número imaginário com parte imaginária positiva, tem-se que $|\mathrm{i}| = |\operatorname{Im} \mathrm{i}| = 1$ e, por exemplo, $\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$.

(e) Tendo em conte que

$$|-1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,(\arg(-1-\mathrm{i})) = \frac{-1}{-1} = 1$$

visto o complexo pertencer ao terceiro quadrante (parte real e imaginária negativas) tem-se que, por exemplo, $\arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{5\pi}{4}$.

(f) Usasndo as definições

$$|3-4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\,(\arg(3-4\mathrm{i})) = \frac{-4}{3}$$

sendo assim $\theta = \arg(3-\mathrm{i}) = \text{arctg}\,\frac{-4}{3}$ com $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

(g) Usasndo as definições

$$|1-\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{e} \quad \text{tg}\left(\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

visto o complexo pertencer ao quarto quadrante, parte real positiva e parte imaginária negativa, tem-se que, por exemplo, $\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{3}$.

(h) Desenvolvendo o quadrado $(-2+2\mathrm{i})^2 = -8\mathrm{i}$ pelo que (e atendendo a que o complexo é um imaginário puro com coeficiente positivo), $|(-2+2\mathrm{i})^2| = 8$ e, por exemplo, $\arg(-2+2\mathrm{i})^2 = -\frac{\pi}{2}$. Doutro modo, $|-2+2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ e, por exemplo, $\arg(-2+2\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}$. Tem-se então que $|-2+2\mathrm{i}| = (2\sqrt{2})^2 = 8$ e, por exemplo, $\arg(-2+2\mathrm{i})^2 = 2\arg(-2+2\mathrm{i}) = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

(i) Por ser um número imaginário com coeficientel negativo, isto é um complexo com $\mathrm{Re} = 0$ e parte imaginária negativa, tem-se que $|-\pi\mathrm{i}| = |\,\mathrm{Im}(-\pi\mathrm{i})| = \pi$ e, por exemplo, $\arg(-\pi\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}$.

(j) Tendo em conta

$$|\sqrt{3}+3\mathrm{i}| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3} \quad \text{e} \quad \text{tg}\left(\arg(\sqrt{3}+3\mathrm{i})\right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

visto o complexo pertencer ao primeiro quadrante (partes real e imaginária positivas) tem-se, por exemplo, $\arg(\sqrt{3}+3\mathrm{i}) = \frac{\pi}{6}$.

5. Escreva os seguintes complexos na forma $x + \mathrm{i}y$:

$$\text{a)}\quad 2e^{3\pi\mathrm{i}} \quad \text{b)}\quad e^{10\pi\mathrm{i}} \quad \text{c)}\quad 10e^{\mathrm{i}\pi/6} \quad \text{d)}\quad \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}}$$

Soluções:

(a) Usando a fórmula de Euler

$$2e^{3\pi\mathrm{i}} = 2\Big(\cos(3\pi) + \mathrm{i}\,\text{sen}(3\pi)\Big) = -2$$

Pode também ser observado que sendo o argumento do complexo 3π, pertence ao semi-eixo real negativo donde se conclui directamente o resultado.

(b) Usando a fórmula de Euler

$$e^{10\pi\mathrm{i}} = \cos(10\pi) + \mathrm{i}\,\text{sen}(10\pi) = 1$$

Da mesma forma que na alínea anterior, por argumento do complexo ser 10π, pertence ao semi-eixo real positivo donde se conclui directamente o resultado.

(c) Usando a fórmula de Euler

$$10e^{-\mathrm{i}\pi/6} = 10\Big(\cos\,(-\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(-\frac{\pi}{6})\Big) = 10\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\Big) = 5\sqrt{3} - 5\mathrm{i}$$

(d) Usando a fórmula de Euler

$$\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5}{4}\pi} = \sqrt{2}\Big(\cos\,(\frac{5\pi}{4}) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(\frac{5\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\Big) = -1 - \mathrm{i}$$

6. Considere o número complexo

$$(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$$

   (a) Escreva-o na forma polar.

   (b) Aproveite a alínea anterior para determinar os valores de $\cos\frac{7\pi}{12}$ e $\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}$

   Soluções:

(a) Escrevendo os dois complexos na forma polar tem-se que

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4} \qquad \text{e} \qquad 1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\pi/3}$$

Usando a fórmula de De Moivre para o produto

$$(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$$

(b) Usando a alínea anterior e a fórmula de Euler, temos po um lado

$$(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12}\Big)$$

e por outro lado, efectuando o produto temos

$$(1+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3}+1)$$

Comparabdo as duas igualdades obtem-se que

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

7. Escreva na forma $x + \mathrm{i}y$ o complexo

$$(-1+\mathrm{i})^{100}$$

Soluções:

Escrevendo $-1+\mathrm{i}$ na forma poolar e usando a fórmula de De Moivre para a potência

$$(-1+\mathrm{i})^{100} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^{100} = 2^{50}e^{75\pi\mathrm{i}} = 2^{50}e^{\pi\mathrm{i}} = -2^{50}$$

8. Mostre as seguintes desigualdades:

   a) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

   b) $|z+w| \leq |z| + |w|$

   Soluções:

(a) Dado que todas as quantidades envolvidas são positivas, vanos demonstrar usando os quadrados. Assim

$$|\operatorname{Im}(z)|^2 \leq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 = |z|^2$$

e a primeira desigualdade está demonstrada. Por outro lado

$$|z|^2 = |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 \leq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)|\,|\operatorname{Im}(z)| = \Big(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|\Big)^2$$

e a segunda desigualdade está demonstrada.

(b) Esta desigualdade é comhecida como a **desigualdade triangular**. Geometricamente a desigualdade triangular é consequência do facto de que num triângulo o comprimento de qualquer dos lados é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Analiticamente, podemos demonstrá-la assim:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2
\end{aligned}$$

9. Calcule e represente geometricamente os númeoros complexos

   a) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt{1-\mathrm{i}}$

   d) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^6}$ e) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^6$

Soluções:

(a) Dado que, por exemplo, $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\pi/2}$, pela fórmula de De Moivre para as raízes

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}} = \sqrt[3]{e^{\mathrm{i}\pi/2}} = \sqrt[3]{1}e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\mathrm{i}} \quad , \quad k = 0,\ 1,\ 2$$

Assim

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}} = \{e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}},\ e^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}},\ e^{\frac{9\pi}{6}\mathrm{i}}\} = \left\{\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\mathrm{i}\right\}$$

(b) Dado que, por exemplo, $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$, pela fórmula de De Moivre para as raízes

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\mathrm{i}\pi}} = \sqrt[4]{1}e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}\mathrm{i}} \quad , \quad k = 0,\ 1\ 2\ ,3$$

Assim

$$\sqrt[4]{-1} = \{e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\ e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}},\ e^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}},\ e^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

(c) Dado que, por exemplo, $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, pela fórmula de De Moivre para as raízes

$$\sqrt{1-\mathrm{i}} = \sqrt{\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{\mathrm{i}\frac{-\frac{k\pi}{4}\mathrm{i}+2k\pi}{2}} \quad , \quad k = 0,\ 1$$

Assim

$$\sqrt{1-i} = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{-\pi}{8}\mathrm{i}}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{8}\mathrm{i}}\ \}$$

(d) Dado que, $(\sqrt{3} - \mathrm{i})^6 = \left(2e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^6 = 2^6e^{-\pi\mathrm{i}}$, pela fórmula de De Moivre para as raízes

$$\sqrt[4]{(3 - i\sqrt{3})^6} = \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{-\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}{4}} \quad , \quad k = 0,\ 1\ 2\ ,3$$

Assim

$$\sqrt[4]{(3 - i\sqrt{3})^6} = \left\{\sqrt[4]{2^6}e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{5\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right\}$$

ou seja

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^6} = \left\{2(1-\mathrm{i}),\ 2(1+\mathrm{i}),\ 2(-1+\mathrm{i}),\ 2(-1-\mathrm{i})\right\}$$

(e) Dado que $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$, pela fórmula de De Moivre para as raízes

$$\sqrt[4]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}{4}} \quad , \quad k = 0,\ 1,\ 2\ ,3$$

ou seja

$$\sqrt[4]{3 - i\sqrt{3}} = \left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{-\pi}{24}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{24}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{23\pi}{24}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{35\pi}{24}\mathrm{i}}\right\}$$

Então

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{3 - i\sqrt{3}}\right)^6 &= \left\{\sqrt[4]{2^6}e^{\frac{-\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{11\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{23\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{35\pi}{4}\mathrm{i}}\right\} \\ &= \left\{\sqrt[4]{2^6}e^{\frac{-\pi}{4}\mathrm{i}},\ \sqrt[4]{2^6}e^{\frac{3\pi}{4}}\right\} \\ &= \left\{2(1-\mathrm{i}),\ 2(-1+\mathrm{i})\right\} \end{aligned}$$

Chama-se à atenção que como conhuntos se tem

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^6 \subset \sqrt[4]{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^6}$$

10. Determine a área do triângulo cujos vértices são as três raízes cúbicas de 1.

Resolução:

As raízes cúbicas de 1 são

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{0\mathrm{i}}} = e^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{3}} \quad , \quad k = 0, 1, 2$$

ou seja 1, $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Dado que as raízes cúbicas dividem a circunferência de centro em 0 e raio 1 em 3 arcos de igual amplitude, o triângulo referido é equilátero. Assim, podemos escolher para base o segmento que une $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ e a altura como o segmento que une 1 a $\frac{1}{2}$ (o ponto médio do segmento que considerámos para base). Então

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

11. Considereando dois números complexos, $z = \frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ e $w = 3(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ onde $0 < \theta < 2\pi$, assinale as afirmações correctas:

(a) $|zw\overline{z}| = |w|^3$.

(b) Se $\theta = \pi/3$ então $\overline{w} = z$.

(c) $z^4 = 27z$.

(d) Se $\theta = \pi/2$ então $\left(\frac{z\overline{w}}{w}\right)^{10} = z^{10}$.

Resolução:

Note-se em primeiro lugar que

$$z = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} \quad , \quad w = 3e^{\mathrm{i}\theta}$$

(a) Dado que $|zw\overline{z}| = |z|^2|w| = 3^2 = |w|^2$ a afirmação é **falsa**.

(b) Se $\theta = \pi/3$ então $\overline{w} = 3e^{-\mathrm{i}\pi/3}$ e assim a afirmação é **falsa**.

(c) $z^4 = \left(\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^4 = 9e^{\frac{4\pi}{6}\mathrm{i}}$ e assim a afirmação é **falsa**.

(d) Se $\theta = \pi/2$ então $\frac{\overline{w}}{w} = \frac{\overline{w}^2}{|w|^2} = e^{-\mathrm{i}\pi}$ pelo que a afirmação é **verdadeira**.

12. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

(a) $z^4 + 16i = 0$

(b) $z\overline{z} - z - \overline{z} = 0$

(c) $z^2 - 5\mathrm{i}z - 6 = 0$

(d) $z^4 + 2z^2 = -1 - i$

(e) $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$

(f) $z^6 = (i+2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$

Resolução:

(a) Resolvendo a equação

$$z^4 + 16i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-16\mathrm{i}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{16e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{16}e^{\frac{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}{4}}$$

com $k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$. Ou seja

$$z^4 + 16i = 0; \;\Leftrightarrow\; z = 2e^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}} \;\vee\; z = 2e^{\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}} \;\vee\; z = 2e^{\frac{7\pi}{8}\mathrm{i}} \vee ; z = 2e^{\frac{11\pi}{8}\mathrm{i}}$$

(b) Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ tem-se que

$$\begin{aligned} z\overline{z} - z - \overline{z} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Isto é, a solução da equação são todos os complexos pertencentes à circunferência $|z-1| = 1$.

(c) Trata-.se de uma equação polinomial do segundo grau. Aplicando a Fórmula resolvente tem-se que

$$\begin{aligned} z^2 - 5\mathrm{i}z - 6 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \frac{5\mathrm{i} \pm \sqrt{(5\mathrm{i})^2 + 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{5\mathrm{i} + \mathrm{i}}{2} = 3\mathrm{i} \quad \vee \quad z = \frac{5\mathrm{i} - \mathrm{i}}{2} = 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

(d) Trata-.se de uma equação biquadrada, pelo que fazendo $w = z^2$ e aplicando a Fórmula resolvente tem-se que

$$\begin{aligned} z^4 + 2z^2 = -1 - i &\Leftrightarrow w^2 + 2w + 1 + \mathrm{i} = 0 \\ &\Leftrightarrow w = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} \\ &\Leftrightarrow w = -1 \pm \sqrt{-\mathrm{i}} = -1 \pm e^{-\mathrm{i}\pi/4} \\ &\Leftrightarrow w = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \ \vee \ w = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Assim, as quatro soluções da equação são

$$z = \pm\sqrt{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}} \ \vee \ z = \pm\sqrt{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}}$$

ou seja

$$z = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\theta} \quad \vee \quad \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}}e^{\mathrm{i}tau}$$

em que, por exemplo, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ com $\operatorname{tg}\theta = 1 - \sqrt{2}$, eem que, por exemplo, $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ com $\operatorname{tg}\tau = 1 + \sqrt{2}$.

(e) Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ tem-se que

$$\begin{aligned} z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2x + 1 + \mathrm{i}(2xy - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \ \vee \ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Se $y = 0$, substituindo na primeira equação obtemos $x^2 + 2x + 1 = 0$ ou seja $(x+1)^2 = 0$ e assim $x = -1$. Se $x = 1$, substituindo na primeira equação obtemos $-y^2 + 4 = 0$ ou seja $y = \pm 2$. Tem-se então que

$$z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1 \ \vee \ z = 1 + 2\mathrm{i} \ \vee \ z = 1 - 2\mathrm{i}$$

(f) A equação é equivalente a

$$z = \sqrt[6]{(i+2)^3 + \frac{1 - 28i}{2 - i}}$$

13. Esboçe no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

(a) $\operatorname{Re} z > c$ com $c \in \mathbb{R}$

(b) $|z-2|=3$

(c) $|z-2|+|z+2|=5$

(d) $|z-1|-|z+1|>2$

(e) $|z|^2=\mathrm{Re}(z)+2$

(f) $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z)<1$

(g) Im $\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=0$

(h) Re $\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$

Resolução:

(a) Dado que, para qualquer $c\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\,z=c$ é uma recta vertical que intersecta o eixo real em c, o conhunto $\mathrm{Re}\,z>c$ consiste em todos os pontos do plano que se encontram à direita dessa recta.

(b) Trata-se de encontrar todos os complexos z cuja distância a 2 é constante igual a 3. Assim $|z-2|=3$ consiste na circinferência de centro em 2 e raio 3.

(c) A condição indicada representa todos os complexos cujas soma das distâncias a 2 e a -2 é constante igual a 5, ou seja o conjunto representado por $|z-2|+|z+2|=5$ é a elipse de focos 2 e -2 e de eixo maior $\frac{5}{2}$ De outra forma, fazendo $z=x+\mathrm{i}y$ e substituindo

$$
\begin{aligned}
|z-2|+|z+2|=5 \quad &\Leftrightarrow \quad |(x-2)+\mathrm{i}y|+|(x+2)+\mathrm{i}y|=5\\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5\\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+y^2=\left(5-\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2\\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+y^2=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2\\
&\Leftrightarrow \quad 8x+25=10\sqrt{(x+2)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x+\frac{5}{2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{4}{5}x+\frac{5}{2}\right)^2=(x+2)^2+y^2\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{9}{25}x^2+y^2=\frac{25}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{25}{6}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=1
\end{aligned}
$$

ou seja o conjunto consiste em todos os complexos que pertencem à elipse de cento em $(0,0)$, eixo maior $\frac{5}{2}$ e eixo menor $\frac{25}{6}$. Cálculos simples permitem calcular os focos e concluir que são 2 e -2.

(d) Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ e substituindo

$$\begin{aligned}
|z-1| - |z+1| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |(x-1) + \mathrm{i}y| - |(x+1) + \mathrm{i}y| = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = \left(2 + \sqrt{+x-1)^2 + y^2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 4 + 4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow \quad -4x - 4 = 4\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = 0
\end{aligned}$$

Assim

$$|z-1| - |z+1| > 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y > 0$$

ou seja o conjunto consiste em todos os complexos com parte imaginária positiva.

(e) Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ e substituindo

$$\begin{aligned}
|z|^2 = \mathrm{Re}(z) + 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + y^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

ou seja o conjunto consiste na circinferência de centro em 1 e raio 1.

(f) Fazendo $z = x + \mathrm{i}y$ e substituindo obtem-se

$$\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y < 1$$

ou seja o conjunto consiste em todos os complexos que se encontram na região abaixo da recta $y = 1 - x$.

(g) Começamos por escrever o complexo $\frac{z-i}{z-1}$ na forma $a + b\mathrm{i}$, fazendo $z = x + \mathrm{i}y$

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{x + \mathrm{i}(y-1)}{x - 1 + \mathrm{i}y} = \frac{x(x-1) + y(y-1) + \mathrm{i}(-xy + (x-1)(y-1))}{(x-1)^2 + y^2}$$

Então

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -xy + (x-1)(y-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x - y + 1 = 0$$

ou seja o conjunto consiste em todos os complexos que se encontram na recta $y = 1 - x$.

(h) Aproveitando a alínea anterior

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(x-1) + y(y-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0$$

ou seja

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

e assim o conjunto consiste na circinferência de centro em $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$ e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Exercícios Propostos

1. Calcule o valor dos números complexos apresentando o resultado na forma algébrica, ou seja, $a + \mathrm{i}b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $\mathrm{i}^5 + \mathrm{i} + 1$ (b) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}}$ (d) $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$ (e) $\overline{2\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)}$

(f) $\dfrac{20+10\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$ (g) $(1+2\mathrm{i})^2 + 4\mathrm{i}^3$ (h) $\dfrac{1-\alpha\mathrm{i}}{1+\alpha\mathrm{i}}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

(i) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} - (1+2\mathrm{i})(2+2\mathrm{i}) + \dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (j) $2\mathrm{i}(\mathrm{i}-1) + (\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 + (1+\mathrm{i})\overline{(1+\mathrm{i})}$

2. Determinar a parte real e imaginária dos seguintes complexos

$$\text{(a)}\quad \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \quad \text{(b)}\quad \left(\frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)^2 \quad \text{(c)}\quad \frac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} + \frac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$$

3. Resolva as seguintes equações

(a) $\overline{z} = \mathrm{i}(z-1)$ (b) $\mathrm{Re}(z(1+\mathrm{i})) + z\overline{z} = 0$ (c) $\mathrm{Re}(z^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\overline{z}(1+2\mathrm{i})) = -3$

4. Determine o conjunto de números complexos $z \in \mathbb{C}$, de forma a que $z^2 \in \mathbb{R}$.

5. Escreva uma expressão da forma $re^{i\theta}$, para cada um dos números complexos

(a) i^3 (b) $\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$ (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ (d) $2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (e) $(1-\mathrm{i})^{-1}$

(f) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ (g) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^3$ (h) $\dfrac{i\sqrt{2}}{4+4i}$ (i) $\dfrac{3\sqrt{2}+2i}{-\sqrt{2}-2i/3}$

6. Escreva uma expressão da forma $x + \mathrm{i}y$, $(x,\ y \in \mathbb{R})$, para cada um dos números complexos

(a) $e^{\pi\,\mathrm{i}/4}$ (b) $5e^{-\pi\,\mathrm{i}}$ (c) $2e^{3\,\pi\,\mathrm{i}/2}$ (d) $e^{4\,\pi\,\mathrm{i}/3}$ (e) $e^{7\,\pi\,\mathrm{i}/6}$

7. Se $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ determine os valores de $z_1\bar{z}_1$, $(\bar{z}_1)^4$ e de $\sqrt[5]{z_1}$.

8. Calcule, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(a) i^n (b) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$ (c) $(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n$

9. Mostre que para $x \in \mathbb{R}$ se tem

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}} = i$$

10. Determine os valores de $z \in \mathbb{C}$ para os quais

$$\text{(a)}\ \left|\frac{z+1}{z}\right| = 1 \ \text{(b)}\ \left(\frac{z+1}{z}\right)^2 = 1 \ \text{(c)}\ z^2 = |z|^2$$

11. Mostre que, para todos os números complexos z_1 e z_2:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

12. (solucao)Para z, $w \in \mathbb{C}$, mostre as seguintes igualdades

(a) $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\ \mathrm{Re}(z\overline{w})$

(b) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\Big(|z|^2 + |w|^2\Big)$

Interprete geometricamente a igualdade dada em b).

13. Se Arg$(z) = \frac{\pi}{4}$, qual o valor de Arg$(-2\mathrm{i}z)$?

14. Considere os complexos $z = \frac{3}{2}\Big(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}\Big)$ e $w = 3(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$ com $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Indique justificando quais das afirmações seguintes são correctas:

(a) Se $\theta = \frac{\pi}{3}$ então $\overline{w} = z$

(b) $z^4 = 27z$

(c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ então $\left(\frac{z\overline{w}}{w}\right)^{10} = z^{10}$

(d) $|w^3(\overline{z})^3(\overline{w})^3 z^3| = |w|^9|z|^9$

15. Sendo $z = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ determine o valor de $\sum_{n=1}^{89} z^n$.

16. Encontre todos os valores da raiz

(a) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$ (b) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}}$ (c) $\sqrt[4]{-1}$ (d) $\sqrt[3]{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

17. Mostre que os pontos do plano de Argand representados pelos números complexos $z_1 = 2+i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = 2 + 5i$ e $z_4 = 3i$ representam os vértices de um quadrado.

18. Considere o número complexo $z_0 = \frac{1}{1+\mathrm{i}} - \frac{1}{2\mathrm{i}} + \mathrm{i}$.

(a) Determine as partes real e imaginária de z_0.

(b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

(c) Determine os números complexos w tais que $z_0 w$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $z_0 w$ sejam iguais.

19. Determine as soluções das seguintes equações:

(a) $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$

(b) $z^2 + 2z + 5 = 0$

(c) $z^4 - 3(1 + 2i)z^2 - 7 + 9i = 0$

(d) $\quad 1-z^2+z^4-z^6=0$

(e) $\quad 1+z+z^2+...+z^7=0$

(f) $\quad z^2+\bar{z}-2=0$

(g) $\quad z^4+2z^2+4=0$

(h) $z^6-\mathrm{i}z^4+\mathrm{i}z^2+1=0$

(i) $(z+2-\mathrm{i})^6=27$

20. Esboce os subconjuntos de $\mathbb{C}$ dados por:

(a) $\quad |z+2|=6$ $\qquad$ (b) $\quad |z-3\mathrm{i}|=|z+\mathrm{i}|$ $\qquad$ (c) $\quad \mathrm{Im}(z+\mathrm{i})<2$

(d) $\quad |z+2\mathrm{i}|\geq 2$ $\qquad$ (e) $\quad |z-1|\geq|z-1-\mathrm{i}|$ $\qquad$ (f) $\quad \mathrm{Im}[(z+\mathrm{i})/2\mathrm{i}]<0$

(g) $\quad \mathrm{Re}\,z\neq 0$ $\qquad$ (h) $\quad 1<|z-1|<2$ $\qquad$ (i) $\quad |z|^2>z+\overline{z}$

21. Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$:

$$A=\{z\ :\ \arg\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)=\frac{\pi}{2}\}\quad B=\{z\ :\ \mathrm{Im}\left(\frac{z-3}{z+2\mathrm{i}}\right)=0\}$$

3 Soluções de 1.2

1. (a) $1+2\mathrm{i}$ (b) $-\mathrm{i}$ (c) $\frac{1}{5}(1+3\mathrm{i})$ (d) -8 (e) $2-\mathrm{i}$ (f) $7+\mathrm{i}$ (g) -3 (h) $\frac{1-\alpha^2-2\alpha\mathrm{i}}{1+\alpha^2}$ (i) $3-7\mathrm{i}$ (j) $6\mathrm{i}$

2. (a) $\mathrm{Re}\,z=0,\ \mathrm{Im}\,z=-1$ (b) $\mathrm{Re}\,z=0,\ \mathrm{Im}\,z=\frac{1}{2}$ (c) $\mathrm{Re}\,z=2\ ,\ \mathrm{Im}\,z=0$

3. (a) sem solução (b) $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$ então $(a+\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$
(c) $z=1+2\mathrm{i}$ ou $z=-1-2\mathrm{i}$.

4. Re $z=0$ ou Im $z=0$.

5. (a) $e^{3\pi\mathrm{i}/2}$ (b) $2e^{\mathrm{i}\pi/4}$ (c) $2e^{-\mathrm{i}\pi/6}$ (d) $4e^{-\mathrm{i}\pi/3}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\pi/4}$ (f) $2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/12}$ (g) $8e^{\mathrm{i}\pi}$ (h) $\frac{1}{4}e^{i\pi/4}$ (i) $3\,e^{i\pi}$

6. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ (b) -5 (c) $-2\mathrm{i}$ (d) $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)$ (e) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$.

7. $z_1\bar{z}_1=1$, $(\bar{z_1})^4=e^{4\pi i/3}$ e $\sqrt[5]{z_1}=e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{5}}$ com $k=0,\,1,\,2,\,3,\,4$.

8. (a) $\quad \cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}1 & \text{se } n=4k\\ \mathrm{i} & \text{se } n=4k+1\\ -1 & \text{se } n=4k+2\\ -\mathrm{i} & \text{se } n=4k+3\end{cases}$ $\quad$ para $k\in\mathbb{N}_0$

(b) $(-\mathrm{i})^n$ (c) $2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}$

10. (a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}\}$ (b) $z = -\frac{1}{2}$ (c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z = 0\}$

13. $\frac{7\pi}{4}$

14. (a) Falsa (b) verdadeira (c) verdadeira (d) Falsa

15. -1

16. (a) $\{e^{\mathrm{i}\pi/6},\, e^{5\pi\mathrm{i}/6},\, -\mathrm{i}\}$ (b) $\{\pm\, 2e^{-\pi\mathrm{i}/6}\}$ (c) $\{e^{-\mathrm{i}\pi/4},\, e^{\mathrm{i}\pi/4},\, e^{3\pi\mathrm{i}/4},\, e^{5\pi\mathrm{i}/4}\}$
(d) $\{\sqrt[3]{2}\, e^{i\pi/12},\ \sqrt[3]{2}\, e^{3i\pi/4}, \sqrt[3]{2}\, e^{17\mathrm{i}\pi/12}\}$

17. Verifique que os comprimentos dos lados do polígono e das suas diagonais são iguais; em alternativa, considere os pontos $w_j = z_j - (2+3\mathrm{i})$, $j = 1,2,3,4$ e verifique que w_j^4 tem o mesmo valor para $j = 1,2,3,4$.

18. (a) $\operatorname{Re} z_0 = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_0 = 1$ (b) por exemplo $P(z) = 4z^2 - 4z + 5$ (c) $w = \pm(6 - 2\mathrm{i})$

19. (a) $z \in \{0.\,\mathrm{i}\sqrt{3}, -\mathrm{i}\sqrt{3},\, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}},\, -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\}$ (b) $z = -1 \pm 2\mathrm{i}$ (c) $\pm\sqrt{1+3i},\ \pm\sqrt{2+3i}$
(d) $z \in \{-1,\, 1,\, e^{-\mathrm{i}\pi/4},\, e^{\mathrm{i}\pi/4},\, e^{3\pi\mathrm{i}/4},\, e^{5\pi\mathrm{i}/4}\}$
(e) $z \in \{-1,\, \mathrm{i},\, -\mathrm{i},\, e^{-\mathrm{i}\pi/4},\, e^{\mathrm{i}\pi/4},\, e^{3\pi\mathrm{i}/4},\, e^{5\pi\mathrm{i}/4}\}$ (f) $z \in \{1, -2\}$
(g) $z \in \{\pm\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}},\, \pm\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\}$ (h) $z \in \{\pm e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\ \pm e^{\frac{3\pi}{8}\mathrm{i}},\ \pm e^{\frac{7\pi}{8}\mathrm{i}}\}$
(i)$z \in \{\pm\sqrt{3} - 2 + \mathrm{i},\ \pm\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} - 2 + \mathrm{i},\ \pm\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} - 2 + \mathrm{i}\}$

20. (a) $(x+2)^2 + y^2 = 6^2$ (b) $\operatorname{Im} z = 1$ (c) $\operatorname{Im} z < 1$ (d) $x^2 + (y+2)^2 \geq 4$
(e) $\operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}$ (f) $\operatorname{Re} z > 0$ (g) $\operatorname{Re} z \neq 0$
(h) A *coroa circular* compreendida entre as circunferências $(x-1)^2 + y^2 = 1$ e $(x-1)^2 + y^2 = 4$ (não inclui as circunf.). (i) $(x-1)^2 + y^2 > 1$

21. $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z = \frac{-2\alpha}{\alpha^2+1} + \mathrm{i}\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\}$ para α com α um número real não negativo.
$B = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z = \frac{3}{1-\alpha} + \mathrm{i}\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ com α um número real diferente de 1.