TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 11

Séries de Fourier

1 Exercícios Resolvidos

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ da função constante $f(x) = 1$.

Resolução:

A série de Fourier associada a f será

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x) \Big).$$

Dado que f é uma função par,

$$b_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

e

$$a_n = \int_{-1}^{1} \cos(n\pi x) f(x)\,dx = 2\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a série de Fourier de f reduz-se ao seu termo constante

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} = 1$$

Note que $SFf(x) = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. O teorema da convergência pontual mostra isto mesmo, pois a extensão periódica de f a $\mathbb{R}$ é a função (de classe C^1) $\bar{f}(x) \equiv 1$.

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = |x|$, no intervalo $[-\pi, \pi]$. Utilize o resultado para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Resolução:

A função $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \ x \in [-\pi, 0[\\ -x & \text{se } \ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Como $L = \pi$, a série de Fourier associada a f é da forma

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big)$$

Dado que f é uma função par, então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \bigg|_0^{\pi} = \pi$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx &&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, dx \right) &&= \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \big(\cos n\pi - 1\big) \qquad \text{e} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

Assim sendo, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} \cos nx$$

Mas, tendo em conta que

$$\cos n\pi - 1 = (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para } \ n \ \text{par} \\ -2 & \text{para } \ n \ \text{ímpar} \end{cases}$$

a série de Fourier reduz-se aos seus termos com índice par, ou seja:

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\big((2k-1)x\big)$$

Com a extensão periódica de f a $\mathbb{R}$ é contínua e seccionalmente C^1, então pelo teorema da convergência pontual

$$SFf(x) = f(x) \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]. \tag{1}$$

Para calcular a soma da série numérica pretendida, usamos simplesmente a equação (1) no ponto $x = 0$:

$$0 = f(0) = SFf(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Resulta pois que:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^3 - \pi^2 x$, no intervalo $x \in [-\pi, \pi]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

Resolução:

A série de Fourier associada a h será

$$SFh(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\big).$$

Como h é uma função ímpar, a_0 e a_n, para $n \in \mathbb{N}$ são nulos. Tem-se também, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big(x^3 - \pi^2 x\big) \operatorname{sen} nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\big(x^3 - \pi^2 x\big) \frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_0^{\pi} \big(3x^2 - \pi^2\big) \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \big(3x^2 - \pi^2\big) \frac{\cos nx}{n} \, dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes, de novo:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\big(3x^2 - \pi^2\big) \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \Big|_0^{\pi}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \int_0^{\pi} 6x \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \, dx \right) \\
&= \int_0^{\pi} 6x \frac{-\operatorname{sen} nx}{n^2} \, dx
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo mais uma integração por partes:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\left(6x\,\frac{\cos nx}{n^3}\bigg|_0^\pi - \int_0^\pi 6\,\frac{\cos nx}{n}\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{6\pi\cos n\pi}{n^3} - \underbrace{\frac{6\,\mathrm{sen}\, nx}{n^3}\bigg|_0^\pi}_{\overset{\shortparallel}{0}}\right) \\
&= \frac{12(-1)^n}{n^3}
\end{aligned}$$

Assim

$$SFh(x) = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\,\mathrm{sen}\, nx$$

Note que $h(x) = x(x^2-\pi^2) = x(x-\pi)(x+\pi)$ é de classe C^1 e verifica $h(-\pi) = h(\pi)$. Assim, pelo teorema da convergência pontual:

$$SFh(x) = h(x) \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Para calcular a soma da série numérica dada, usamos a equação (2) no ponto $x = \frac{\pi}{2}$:

$$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;=\; h\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\pi^2\right) \;=\; -\frac{3\pi^2}{8}. \tag{3}$$

Tendo em conta que, para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

então, eliminando os termos nulos (n par) da série (3) obtém-se

$$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^3}(-1)^k \;=\; -12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \;=\; -\frac{3\pi^3}{8},$$

o que é equivalente a:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \;=\; \frac{\pi^3}{32}.$$

4. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, x & \text{se} \quad \mathrm{sen}\, x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \mathrm{sen}\, x \leqslant 0 \end{cases}$$

Resolução:

A função f pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ 0 & \text{se} \quad x \in \,]-3\pi, -2\pi[\\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in \,]-\pi, 0[\\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{se} \quad x \in \,]\pi, 2\pi[\\ \vdots & \end{cases} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x|$$

pelo que a função f é periódica de período 2π. Assim, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{n\pi x}{\pi} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\pi}\Big) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx\Big)$$

Note que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ já está na forma de uma série de Fourier com $L = \pi$. Assim, podemos simplesmente determinar a série de Fourier da função par $g(x) = \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x|$, pois

$$SFf(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + SFg(x).$$

A série de Fourier da função g é

$$SFg(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx\Big)$$

em que (tendo em conta que g é par e $g(x) = \frac{1}{2}|\operatorname{sen} x| = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ para $x \in \,]0, \pi[$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}.$$

e

$$b_n = 0, \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Para $n > 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(\operatorname{sen}(x+nx) + \operatorname{sen}(x-nx)\big)\, dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Para $n = 1$,

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\cos x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} 2x\, dx = 0.$$

Assim

$$SFf(x) = SFg(x) + \frac{1}{2}\text{sen}\, x = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)} \cos(nx) + \frac{1}{2}\text{sen}\, x$$

Visto que

$$(-1)^{n+1} - 1 = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad n \ \text{ímpar} \\ -2 & \text{para} \quad n \ \text{par} \end{cases}$$

e que a função é contínua em $\mathbb{R}$ e seccionalmente C^1 em $[\pi, \pi]$, podemos concluir que

$$SFf(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx) + \frac{1}{2}\text{sen}\, x = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.
Resolução:

A série de senos associada a f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\text{sen}\,(n\pi x)\, dx = 2\int_0^1 \text{sen}\,(n\pi x)\, dx = \frac{2}{n\pi}\Big(1 - (-1)^n\Big)$$

A série de senos de f em $[0, 1]$ é, de facto, a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1, 1]$; trata-se, pois, da série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{se} \quad x \in [0, 1] \end{cases}$$

pelo que, usando o teorema da convergência pontual,

$$\begin{aligned} SFf(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\big(1 - (-1)^n\big)}{n\pi} \text{sen}\,(n\pi x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \text{sen}\,(2k\pi x) \quad = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in]0, 1[\\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quanto à convergência em $\mathbb{R}$, a série converge para a extensão periódica de g em todos os pontos onde g é contínua, ou seja, para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dado que os limites laterais de g nos seus pontos de descontinuidade são ± 1, então $SFf(x) = 0$ para $x \in \mathbb{Z}$.

6. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

   (a) a série de Fourier associada a f;

   (b) a série de senos associada a f;

   (c) a série de cosenos associada a f.

   Resolução:

(a) Considere-se a função $f(x)$ extendida periodicamente a $\mathbb{R}$. Então o seu período é 1 e $L = \frac{1}{2}$, pois um intervalo simétrico em torno da origem correspondente a um período da função é, precisamente, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Desta forma, a esta função (como vimos, periódica com $L = \frac{1}{2}$) está associada a série de Fourier

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(2n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(2n\pi x) \Big)$$

Devido à periodicidade de f, os integrais abaixo têm o mesmo valor ao longo de qualquer intervalo de comprimento 1:

$$a_0 = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 1$$

Identicamente, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \cos(2n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{1/2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) \operatorname{sen}(2n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(2n\pi x)\,dx$$

Calculando estes coeficientes, tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x\cos(2n\pi x)\,dx \\ &= 2\Big(\frac{x}{2n\pi}\operatorname{sen}(2\pi n x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi n x)\,dx\Big) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 x\operatorname{sen}(2n\pi x)\,dx \\ &= 2\Big(-\frac{x}{2n\pi}\cos(2\pi n x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos(2\pi n x)\,dx\Big) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos(2\pi n) = -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Temos então que, para $x \in [0,1]$

$$SFf(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \text{sen}\,(2n\pi x).$$

Dado que $f(x)$ é contínua em $[0,1]$, podemos concluir que

$$SFf(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de senos de f é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1,1]$. Diferentemente da alínea (a), trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L = 1$).

A série de senos associada a f é, pois

$$S_{\text{sen}} f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi x)$$

em que

$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \text{sen}\,(n\pi x)\, dx = 2\int_0^1 x \text{sen}\,(n\pi x)\, dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

(c) A série de cosenos de f é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-1,1]$. Tal como na alínea (b) (e, também, diferentemente da alínea (a)) trata-se da série de Fourier de uma função com período 2 (ou seja, com $L = 1$).

A série de cosenos associada a f é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\,(n\pi x)$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\, dx = 2\int_0^1 x\, dx = 1$$

e para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos\,(n\pi x)\, dx = 2\int_0^1 x \cos\,(n\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1)$$

7. Determinar a série de Fourier da função f no intervalo especificado

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \le x \le 0 \\ e^x & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

indicando a sua soma.

Resolução:

A série de Fourier da função é

$$SF_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) + b_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

em que

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

Para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_0^1 e^x \cos(n\pi x)dx$$

Usando a definição de coseno complexo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(e^{(1+n\pi \mathrm{i})x} + e^{(1-n\pi \mathrm{i})x}\Big)dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{(1+n\pi \mathrm{i})x}}{1+n\pi \mathrm{i}} + \frac{e^{(1-n\pi \mathrm{i})x}}{1-n\pi \mathrm{i}}\Big)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2(1+n^2\pi^2)}\Big((1-n\pi \mathrm{i})e^{1+n\pi \mathrm{i}} + (1+n\pi \mathrm{i})e^{1-n\pi \mathrm{i}} - (1-n\pi \mathrm{i}) - (1+n\pi \mathrm{i})\Big) \\
&= \frac{1}{1+n^2\pi^2}(e(-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

onde se usou o facto de que

$$e^{n\pi \mathrm{i}} = e^{-n\pi \mathrm{i}} = (-1)^n$$

Para $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx = \int_0^1 e^x \operatorname{sen}(n\pi x)dx$$

Usando a definição de seno complexo

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^1 \Big(e^{(1+n\pi \mathrm{i})x} - e^{(1-n\pi \mathrm{i})x}\Big)dx \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{e^{(1+n\pi \mathrm{i})x}}{1+n\pi \mathrm{i}} - \frac{e^{(1-n\pi \mathrm{i})x}}{1-n\pi \mathrm{i}}\Big)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}(1+n^2\pi^2)}\Big((1-n\pi \mathrm{i})e^{1+n\pi \mathrm{i}} - (1+n\pi \mathrm{i})e^{1-n\pi \mathrm{i}} - (1-n\pi \mathrm{i}) + (1+n\pi \mathrm{i})\Big) \\
&= \frac{1}{(1+n^2\pi^2)\mathrm{i}}\Big(-n\pi \mathrm{i} e(-1)^n + n\pi \mathrm{i}\Big) \quad = \quad \frac{n\pi}{1+n^2\pi^2}(1 - e(-1)^n)
\end{aligned}$$

Então

$$SF_f(x) = \frac{e-1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e(-1)^n - 1}{1+n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{n\pi(1-e(-1)^n)}{1+n^2\pi^2}\text{sen}(n\pi x)\right)$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de $f(x)$, tem-se que

$$SF_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ e^x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{e}{2} & \text{se} \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

8. Considere a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$.

   (a) Calcule, utilizando o teorema dos resíduos, o valor dos integrais

   $$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx \quad , \quad n = 0,\, 1,\, 2, \cdots$$

   (b) Deduza, da alínea anterior, o valor dos integrais

   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\, dx$$

   para $n \in \mathbb{N}_0$.

   (c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série

   $$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\text{sen}(nx)\Big)$$

   para $x \in [-\pi, \pi]$.

Nota: Este problema ilustra a aplicação do teorema dos resíduos ao cálculo da série de Fourier de uma fracção racional de senos e cosenos. Sem recurso à análise complexa, esse cálculo torna-se bastante mais complicado.

Resolução:

(a) Para $n \in \mathbb{N}_0$ e tomando a parametrização de $|z| = 1$ dada por $z(x) = e^{\mathrm{i}x}$, para $x \in [-\pi, \pi]$, tem-se que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{\mathrm{i}x})^n}{5 + 2(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})} dx \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{5 + 2z + 2z^{-1}} \frac{dz}{\mathrm{i}z} \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{2z^2 + 5z + 2} dz \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)} dz \\ &= \pi \operatorname{Res}\Big(F, -\frac{1}{2}\Big) \end{aligned}$$

sendo para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$F(z) = \frac{z^n}{(z + \frac{1}{2})(z + 2)}$$

É fácil de verificar que ambas as singularidades de F são pólos simples, e como tal

$$\operatorname{Res}\Big(F, -\frac{1}{2}\Big) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \Big(z + \frac{1}{2}\Big) F(z) = \frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

Tem-se então que

$$I_n = \frac{\pi(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

(b) Atendendo à fórmula de Euler

$$e^{\mathrm{i}nx} = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(nx)$$

pelo que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} I_n = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} I_n = 0$$

(c) Trata-se da série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$. Por ser uma função contínua e par, tem-se que

$$SF_f(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

9. Determinar a série de senos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique a sua soma no conjunto indicado.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq a \\ a & \text{se} \quad a \leq x \leq 2a \end{cases}$ para $x \in [0, 2a]$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 - x & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

(a) A série de senos de f em $[0, 2a]$ é dada por

$$S_{\text{sen}} f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n \,\mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n \;&=\; \frac{1}{a}\int_0^{2a} f(x)\,\mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) dx \;=\; 2\int_a^{2a} \mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) dx \\ &=\; -\frac{4a}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)\Bigg|_a^{2a} \;=\; \frac{4a}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\text{sen}} f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4a}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)\mathsf{sen}\left(\frac{n\pi x}{2a}\right)$$

A série de senos de f no intervalo $[0, 2a]$ é a restrição, a esse intervalo, da série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2a, 2a]$, ou seja, da função:

$$f_e(x) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad -2a \leq x < -a \\ 0 & \text{se} \quad -a \leq x \leq a \\ a & \text{se} \quad a < x \leq 2a \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de f_e

$$SF_{f_e}(x) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad -2a < x < -a \\ 0 & \text{se} \quad -a < x < a \\ a & \text{se} \quad a < x < 2a \\ 0 & \text{se} \quad x = \pm 2a \\ -\frac{a}{2} & \text{se} \quad x = -a \\ \frac{a}{2} & \text{se} \quad x = a \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0, 2a]$,

$$S_{\text{sen}} f(x) \;=\; SF_{f_e}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < a \\ a & \text{se} \quad a < x < 2a \\ \frac{a}{2} & \text{se} \quad x = a \end{cases}$$

(b) A série de senos de g em $[0,1]$ é dada por

$$S_{\text{sen}}g(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi x)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \;=\; 2\int_0^1 g(x)\text{sen}\,(n\pi x)dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\text{sen}\,(n\pi x)dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\text{sen}\,(n\pi x)dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} x\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx &= -\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(n\pi x)dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\,\text{sen}\,(n\pi x)\,dx &= -\frac{1-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^1\cos(n\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\end{aligned}$$

Então

$$b_n \;=\; \frac{2}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}$$

e a série pedida é

$$S_{\text{sen}}g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\,\text{sen}\,(n\pi x)$$

A série de senos de g no intervalo $[0,1]$ é a série de Fourier da extensão ímpar de g ao intervalo $[-1,1]$, isto é, a série de Fourier de

$$g_e(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se} \quad -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ x & \text{se} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{se} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que o seu valor nos extremos do intervalo $[-1,1]$ coincide, tem-se em particular que

$$S_{\text{sen}}g(x) = g(x), \qquad \forall x \in [0,1]$$

Condiderando a extensão periódica, $\bar{g}$, de g_e a $\mathbb{R}$, esta função é contínua em $\mathbb{R}$ pois, como vimos, g_e é contínua e $g_e(-1) = g_e(1)$. Isto implica que:

$$S_{\text{sen}}g(x) = \bar{g}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10. Determinar a série de cossenos de cada uma das seguintes funções no intervalo especificado. Indique as respectivas somas nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 2$

(b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ em $0 \leq x \leq 1$.

Resolução:

(a) A série de cossenos de f em $[0, 2]$ é dada por

$$S_{\cos}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

em que

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_1^2 dx = 1$$

e, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx = \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2 = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$S_{\cos}f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

A série de cossenos de f no intervalo $[0, 2]$ é a série de Fourier da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$, isto é, a série de Fourier de

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Atendendo aos pontos de continuidade (e descontinuidade) de f_p, e tendo em conta que $f_p(-2) = f_p(2)$ (isto acontece sempre com qualquer extensão par) então:

$$SF_{f_p}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

Finalmente, para $x \in [0,2]$,

$$S_{\text{sen}} f(x) \;=\; SF_{f_p}(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

(b) A série de cosenos de g em $[0,1]$ é dada por

$$S_{\cos} g(x) \;=\; \frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

em que

$$a_0 \;=\; 2\int_0^1 g(x)\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \;=\; 2\int_0^1 g(x)\cos(n\pi x)\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(n\pi x)dx \;+\; 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx$$

Primitivando por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(n\pi x)dx &= \frac{x}{n\pi}\text{sen}(n\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \;-\; \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \text{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{1}{2n\pi}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;+\; \frac{1}{n^2\pi^2}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\Big) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos(n\pi x)dx &= \frac{1-x}{n\pi}\text{sen}(n\pi x)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \;+\; \frac{1}{n\pi}\int_{1/2}^1 \text{sen}(n\pi x)dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2} \;-\; \frac{1}{n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\Big) \end{aligned}$$

Tem-se então que

$$a_n \;=\; \frac{2}{n^2\pi^2}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\Big)$$

e a série de cossenos de g é

$$S_{\cos} g(x) \;=\; \frac{1}{4} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\Big)\cos(n\pi x)$$

A série de cosenos de g no intervalo $[0,2]$ é a série de Fourier da extensão par de g ao intervalo $[-2,2]$, isto é, a série de Fourier de

$$g_p(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad |x| \le \frac{1}{2} \\ 1 - |x| & \text{se} \quad \frac{1}{2} < |x| \le 1 \end{cases}$$

Atendendo a que esta função é contínua e que $g_p(-2) = g_p(2)$, tem-se que

$$S_{\cos} f(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in [0,1]$$

2 Exercícios Propostos

1. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ +1 & \text{se} \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida em pontos adequados, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-\pi, \pi]$ por

$$j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-\pi, \pi]$.

5. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para $x \in [-2, 2]$.

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

7. Determine a série de cosenos da função $r(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$, indicando a soma da série em $\mathbb{R}$.

8. Considere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Esboçe o gráfico da extensão par de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de cosenos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série.

(b) Esboçe o gráfico da extensão ímpar de f ao intervalo $[-2, 2]$ e obtenha o desenvolvimento em série de senos de f nesse intervalo, indicando a respectiva soma da série.

3 Soluções

1. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\text{sen}\,((2n+1)\pi x)}{2n+1}$

2. $\frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=0$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

3. $\frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Fazendo $x=L$ obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$;
fazendo $x=0$, obtém-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

4. $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos(nx)+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sen}\,(nx)\right]=\begin{cases} j(x) & \text{se} \quad -\pi<x<\pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x=\pm\pi \end{cases}$

5. $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right]=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\le x<0 \\ 1 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ 0 & \text{se} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=1 \end{cases}$

6. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left((2n-1)\pi x\right)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=1 \end{cases}$

7. $SF_{\cos}r(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos\left((2n-1)x\right)=$
$=\begin{cases} x-2k\pi & \text{se} \quad 2k\pi\le x\le(2k+1)\pi \\ 2k\pi-x & \text{se} \quad (2k-1)\pi<x<2k\pi \end{cases}$ para $k\in\mathbb{Z}$.

8. (a) $SF_{\cos}f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\left((1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\cos\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x\le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \end{cases}.$

(b) $SF_{\text{sen}}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi}\left((1-(-1)^n+\cos\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}=$
$=\begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 1 & \text{se} \quad 1<x<2 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x=1 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \text{ ou } x=2 \end{cases}.$