TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2013/2014

2º Teste — Versão A

(CURSO: LEIC-A, LEMAT, MEAMBI, MEBIOL, MEQ)

21 de Dezembro de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 6y^2 x \qquad , \qquad y(1) = -\frac{1}{2}$$

Determine a sua solução e o seu intervalo máximo de existência.

Resolução:

Escrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2(6x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 6x - 1$$

verifica-se facilmente que a equação é separável. Uma primitiva em ordem a y de $\frac{1}{y^2}$ é $-\frac{1}{y}$, donde o lado esquerdo da equação pode, pela derivada da função composta, ser escrito como

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{y(x)}\right] = 6x - 1.$$

Integrando agora ambos os lados da equação desde $x_0 = 1$ até x, obtém-se

$$\int_{x_0=1}^{x} \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{y(s)}\right] ds = \int_{x_0=1}^{x} 6s - 1\, ds \Leftrightarrow -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y(1)} = 3x^2 - x - 2,$$

donde, usando a condição inicial, $y(1) = -\frac{1}{2}$, tem-se então que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \frac{1}{x - 3x^2}.$$

O domínio de diferenciabilidade desta função é

$$D = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \infty\right[.$$

O intervalo máximo de existência de solução será o maior intervalo contido em D ao qual $x_0 = 1$ pertence. Conclui-se que

$$I_{\text{Max}} = \left]\frac{1}{3}, \infty\right[.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}.

[1,0 val.] (b) Para $t \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) \qquad , \qquad \mathbf{X}(0) = (0,0,0)$$

em que $\mathbf{B}(t) = (0, e^{2t}, \operatorname{sen} t)$

Resolução:

(a) <u>Método 1</u>:

Observamos que a matriz A é triangular superior e que por isso o sistema pode ser resolvido linha por linha, em sequência de equações escalares. Começemos, por isso, por calcular uma matriz solução fundamental associada à equação $\mathbf{X}' = A\mathbf{X}$. Fazendo $\mathbf{X} = (x, y)$, tem-se que

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = c_1 e^{2t} \\ y' = 3c_1 e^{2t} + 2y \end{cases}$$

A equação $y' - 2y = 3c_1 e^{2t}$ é uma equação linear de 1ª ordem com factor integrante $\mu(x) = e^{\int -2dt} = e^{-2t}$. Então

$$y' - 2y = 3c_1 e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = 3c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-2t}y\right)' = 3c_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{2t}(3c_1 t + c_2)$$

Conclui-se que

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ e^{2t}(3c_1 t + c_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 3te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dado que em $t = 0$ a matriz fundamental obtida é a matriz identidade, ela é necessariamente a matrix principal em $t = 0$, ou seja a exponencial. Conclui-se imediatamente assim que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 3te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

<u>Método 2</u>:

A matriz A pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2Id + 3N$$

As matrizes $2Id$ e $3N$ comutam, e para qualquer $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tem-se que $N^p = 0$. Então

$$e^{At} = e^{(2Id+3N)t} = e^{2Idt} e^{3Nt} = e^{2Idt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3N)^n}{n!} = e^{2Idt}\Big(Id + 3N\Big) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Método 3</u>:

A matriz A tem valor próprio $\lambda = 2$ de multiplicidade algébrica 2, associado ao vector próprio $(0,1)$. Conclui-se que a matriz não é diagonalizável. Assim A é semelhante a um bloco de Jordan, $A = SJS^{-1}$ em que

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

o que implicará que

$$e^{Jt} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar a matriz S é necessário determinar um vector próprio generalizado. Isto é uma solução da equação

$$(A - 2Id)v_g = (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que (por exemplo $v_g = (\frac{1}{3}, 0)$. Então

$$A = SJS^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Esta nova matriz do sistema não tem coeficientes constantes pelo que não faz qualquer sentido calcular-se uma matriz exponencial associada a ela, a qual só está definida para matrizes constantes. Quando muito, poder-se-ia tentar obter uma matriz solução fundamental. Mas, fazendo $\mathbf{X} = (x, y, z)$, verifica-se (pela forma em blocos da matriz em questão) que podemos resolver dois problemas de valor inicial totalmente desacoplados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \\ \Big(x(0), y(0)\Big) = (0,0) \end{cases} , \quad \begin{cases} z' = (-\operatorname{sen} t)z + \operatorname{sen} t \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

onde A é a matriz 2×2 da alínea anterior. Para determinar $(x(t), y(t))$, e usando a matriz encontrada na alínea (a), basta aplicar a fórmula da variação das constantes. Assim

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-2s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \\ &= e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para determinar $z(t)$ (solução de uma equação de primeira ordem escalar) vamos resolver a equação. Trata-se de uma equação linear (tambem é separável) de factor integrante $\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t dt} = e^{-\cos t}$. Então

$$z' + (\operatorname{sen} t)z = \operatorname{sen} t \quad \Leftrightarrow \quad \Big(e^{-\cos t} z\Big)' = \operatorname{sen} t e^{-\cos t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\cos t} z = -e^{-\cos t} + c$$

donde se conclui que $z(t) = -1 + ce^{\cos t}$. Para que $z(0) = 0$, conclui-se que $c = e^{-1}$, peço que

$$\mathbf{X}(t) = \Big(x(t), y(t), z(t)\Big) = (0, te^{2t}, -1 + e^{-1+\cos t})$$

3. Considere a seguinte equação diferencial

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 2e^{2t}$$

[1,5 val.] (a) Determine a solução geral da equação.

[0,5 val.] (b) Indique a matriz Wronskiana associada à equação.

Resolução:

(a) A solução geral da equação é da forma $y_G(t) + y_P(t)$ em que $y_G(t)$ representa a solução geral da equação homogénea associada e $y_P(t)$ uma solução particular da equação.

Cálculo de $y_G(t)$:

A equação homogénea associada é

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

Fazendo $Dy = y'$, $D^2y = y''$ e $D^3y = y'''$, tem-se que

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(D^3 - D^2 + 4D - 4\Big)y = 0$$

É fácil de concluir que o polinómio característico associado à equação, $P(R) = R^3 - R^2 + 4R - 4$, tem raíz 1 e efectuando a divisão por $R-1$ pode ser escrito na forma $P(R) = (R-1)(R^2+4)$. Assim a equação diferencial é equivalente a

$$(D-1)(D^2+4)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)y = 0 \ \vee \ (D^2+4)y = 0$$

Uma base do espaço de soluções de $(D-1)y = 0$ é (e^t) e uma base do espaço de soluções de $(D^2+4)y = 0$ é $(\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$. Assim

$$y_G(t) = ae^t + b\cos(2t) + c\operatorname{sen}(2t)\,.$$

Cálculo de $y_P(t)$:

Dado que $b(t) = 2e^{2t}$ iremos determinar $y_P(t)$ pelo método dos coeficientes indeterminados. O polinómio aniquilador de $b(t)$ é $D-2$. Assim

$$\begin{aligned}(D-1)(D^2+4)y = 2e^{2t} \quad &\Leftrightarrow \quad (D-2)(D-1)(D^2+4)y = (D-2)\Big(2e^{2t}\Big)\\ &\Leftrightarrow \quad (D-2)(D-1)(D^2+4)y = 0\end{aligned}$$

A solução geral desta equação é

$$ae^t + b\cos(2t) + c\operatorname{sen}(2t) + de^{2t}$$

Comparando com y_G, conclui-se que a forma da solução particular da equação é de^{2t}. Substituindo na equação, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$(de^{2t})''' - (de^{2t})'' + 4(de^{2t})' - 4(de^{2t}) = 2e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(8 - 4 + 8 - 4\Big)de^{2t} = 2e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{1}{4}$$

Então, $y_P(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$ e finalmente, a solução geral da equação é

$$y(t) = ae^t + b\cos(2t) + c\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}$$

(b) Para todo $t \in \mathbb{R}$, po exemplo

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^t & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ e^t & -2\operatorname{sen}(2t) & 2\cos(2t) \\ e^t & -4\cos(2t) & -4\operatorname{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] 4. Considere a função f definida no intervalo $[-4,4]$ por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\in[-4,0] \\ -2 & \text{se} \quad x\in]0,2[\\ 0 & \text{se} \quad x\in[2,4] \end{cases}$$

Determine a série de Fourier associada a f e indique a sua soma para cada $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Considera-se $L=4$ para o desenvolvimento em série de Fourier duma função periódica, de período $2L=8$. A função f dada não é par, nem ímpar, pelo que são de esperar coeficientes não nulos de senos e cosenos na série de Fourier correspondente.

Assim, a série será dada por

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)+b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right),$$

com

$$a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

e

$$b_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \qquad n=1,2,\dots$$

Resta, portanto, calcular estes coeficientes.

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0} 1\,dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{2} -2\,dx=1-1=0.$$

E os restates a_n, para $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}-2\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_{-4}^{0}-\frac{2}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_{0}^{2}=\frac{1}{n\pi}[0-0]-\frac{2}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)-0\right] \\ &= -\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Analogamente, para os b_n, com $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{2}-2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_{-4}^{0}+\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_{0}^{2}=\frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi)-1]+\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n\pi}-\frac{3}{n\pi}+\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, a função f é obviamente seccionalmente C^1, tendo descontinuidades "de salto" em $x=0$ assim como em $x=2$. O seu prolongamento periódico, de período $2L=8$, terá também uma descontinuidade do mesmo tipo, nos pontos $x=-4,4$. Assim, pelo Teorema de convergência pontual de séries de Fourier para funções seccionalmente C^1 conclui-se que, no intervalo $[-4,4]$ a série de Fourier converge pontualmente para a função que, em cada ponto x, corresponde à média dos limites laterais de f em x, ou seja,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = \pm 4 \\ 1 & \text{se} \quad -4 < x < 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{se} \quad x = 0 \\ -2 & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ -1 & \text{se} \quad x = 2 \\ 0 & \text{se} \quad 2 < x < 4. \end{cases}$$

Em $\mathbb{R}$ a série de Fourier converge pontualmente para o prolongamento periódico, de período $2L = 8$, desta função no intervalo fundamental $[-4,4]$.

[1,5 val.] 5. Resolva o problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\ ,\ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = 0\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3\,\text{sen}(2x) - 4\,\text{sen}(4x) & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\end{cases}$$

Resolução:

Usando o método de separação de variáveis, procuramos soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, as quais, substituindo na equação diferencial parcial, levam a

$$X(x)T''(t) - 4X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se ambos os seus lados, de variáveis diferentes x e t, forem iguais a uma constante, digamos $-\lambda$. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real

$$\begin{cases} T''(t) + 4\lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Por sua vez, as condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, em $x = 0,\pi$, implicam que as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$ tenham que satisfazer

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos agora a equação diferencial para $X(x)$, cujas soluções dependem do sinal de λ. Temos então

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{-\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{se } \lambda < 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{\lambda}x + C\,\text{sen}\,\sqrt{\lambda}x & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

Impondo as condições de fronteira anteriores às soluções $X(x)$ assim determinadas, temos

(i) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow B + C = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow B\pi = 0 \Leftrightarrow B = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow B \cdot 1 + C \cdot 0 = 0 \\ X(\pi) = 0 \Leftrightarrow B\cos\sqrt{\lambda}\pi + C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as únicas soluções não triviais (funções próprias) $X(x) = C\,\mathrm{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \ldots$, para (valores próprios) $\lambda = n^2$.

Usamos agora este conjunto discreto de valores de λ para resolver a correspondente equação para $T(t)$,

$$T''(t) + 4\lambda T(t) = 0 \Leftrightarrow T''(t) + 4n^2 T(t) = 0,$$

cujas soluções são

$$T(t) = C\,\mathrm{sen}(2nt) + \tilde{C}\cos(2nt).$$

Conclui-se assim que, para cada $n = 1, 2, \ldots$ as soluções não nulas da equação diferencial parcial dada, obtidas por separação de variáveis na forma $T(t)X(x)$, e satisfazendo as condições de fronteira, são

$$u_n(t, x) = C\,\mathrm{sen}(2nt)\,\mathrm{sen}(nx) + \tilde{C}\cos(2nt)\,\mathrm{sen}(nx).$$

Finalmente, procuramos uma solução formal da equação diferencial parcial satisfazendo também as condições iniciais, por "combinação linear infinita" destas soluções $T(t)X(x)$

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\mathrm{sen}(2nt)\,\mathrm{sen}(nx) + \tilde{C}_n\cos(2nt)\,\mathrm{sen}(nx),$$

a qual tem que agora também satisfazer

$$u(0, x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n\,\mathrm{sen}(nx) = 0 \Leftrightarrow \tilde{C}_n = 0 \quad \text{para todo o} \quad n \geq 1,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 3\,\mathrm{sen}(2x) - 4\,\mathrm{sen}(4x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2nC_n\,\mathrm{sen}(nx) = 3\,\mathrm{sen}(2x) - 4\,\mathrm{sen}(4x),$$

donde $4C_2 = 3$ e $8C_4 = -4$, sendo os restantes coeficientes todos nulos.

Assim se determina a forma final da solução do problema

$$u(t, x) = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(4t)\,\mathrm{sen}(2x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(8t)\,\mathrm{sen}(4x).$$

[1,0 val.] 6. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = y(2-y)e^y + g(t,y) \quad , \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 no seu domínio e tal que $g(t,y) = 0$ no conjunto $\{(t,y) \ : \ 0 \leq y \leq 2\}$. Mostre que o (PVI) tem solução única definida em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Seja $f(t,y) = y(2-y)e^y + g(t,y)$; esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, o que implica que é contínua e localmente lipshitziana em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema de Picard, o problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \ , \qquad y(t_0) = y_0 \ , \tag{2}$$

para *qualquer* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tem solução *única*, de classe C^1, definida numa vizinhança de t_0.

Como $f(t,0) = g(t,0) = 0$ e $f(t,2) = g(t,2) = 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, então as funções constantes $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$ são soluções da equação diferencial. Além disso, o ponto inicial verifica $y(0) = 1 \in \,]0,2[$. Desta forma, o gráfico da solução da equação diferencial que satisfaz $y(0) = 1$ não pode intersectar (os gráficos de) $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 2$; caso contrário, se tomássemos um tal ponto de intersecção como condição inicial do PVI (2) teríamos duas soluções distintas do mesmo problema, o que iria contradizer o teorema de Picard.

Assim, a solução única de (1) satisfaz

$$0 < y(t) < 2 \qquad \forall t \in I_{max} \ ; \tag{3}$$

isto mostra que $y(t)$ não explode em tempo finito. Dado que o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, então, pelo teorema de extensão de solução, $y(t)$ esté definida em $I_{max} = \mathbb{R}$.