

# **A Geometria Escondida**

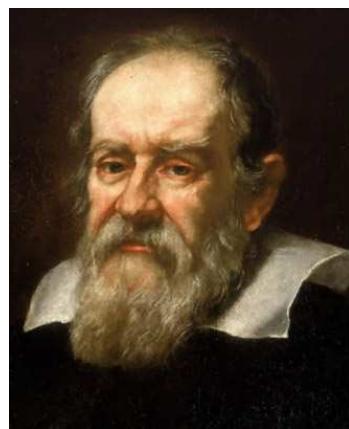
**José Natário**

(Instituto Superior Técnico)

**Lisboa, Fevereiro de 2018**

## **Galileu Galilei (1564–1642)**

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”



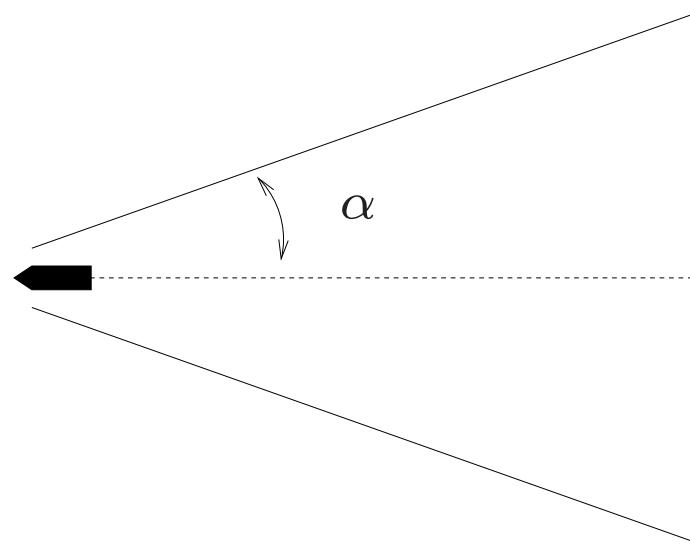


Manneken Pis (Bruxelas).





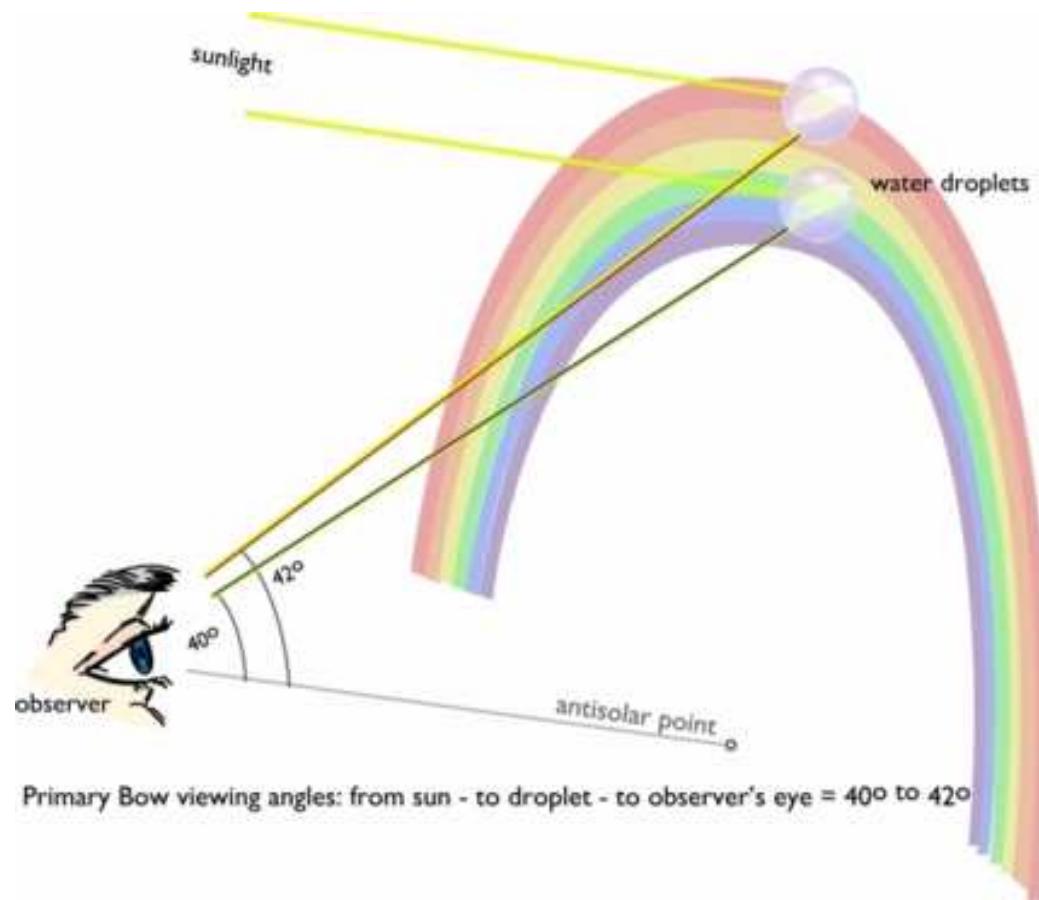
## Teorema de Kelvin (1824–1907)



$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ (portanto } \alpha \simeq 19,5^\circ\text{)}.$$

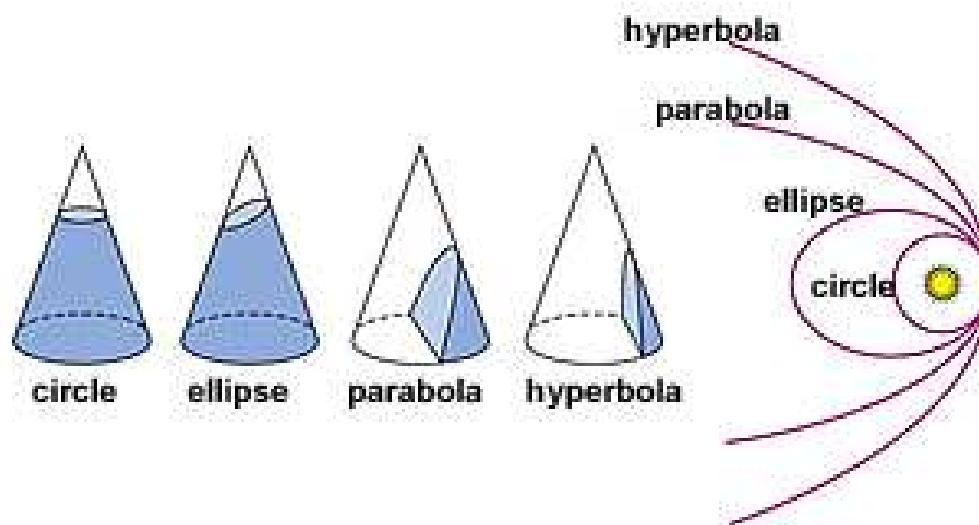
## Arco-íris



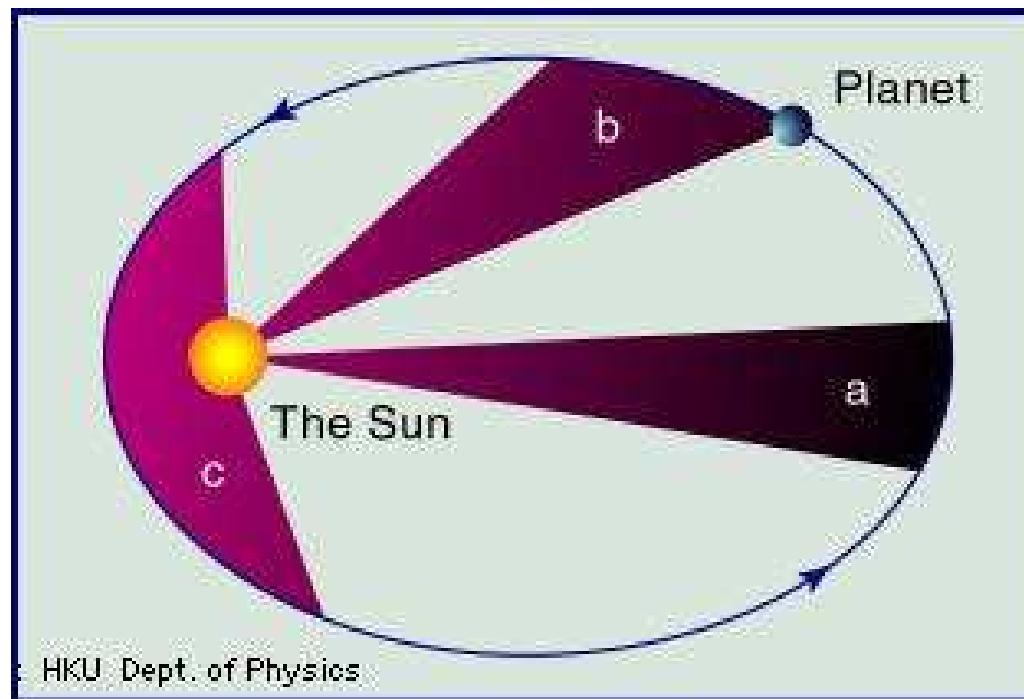


## Leis de Kepler (1571–1630)

1. As órbitas dos corpos celestes são secções cónicas com o Sol num dos focos.

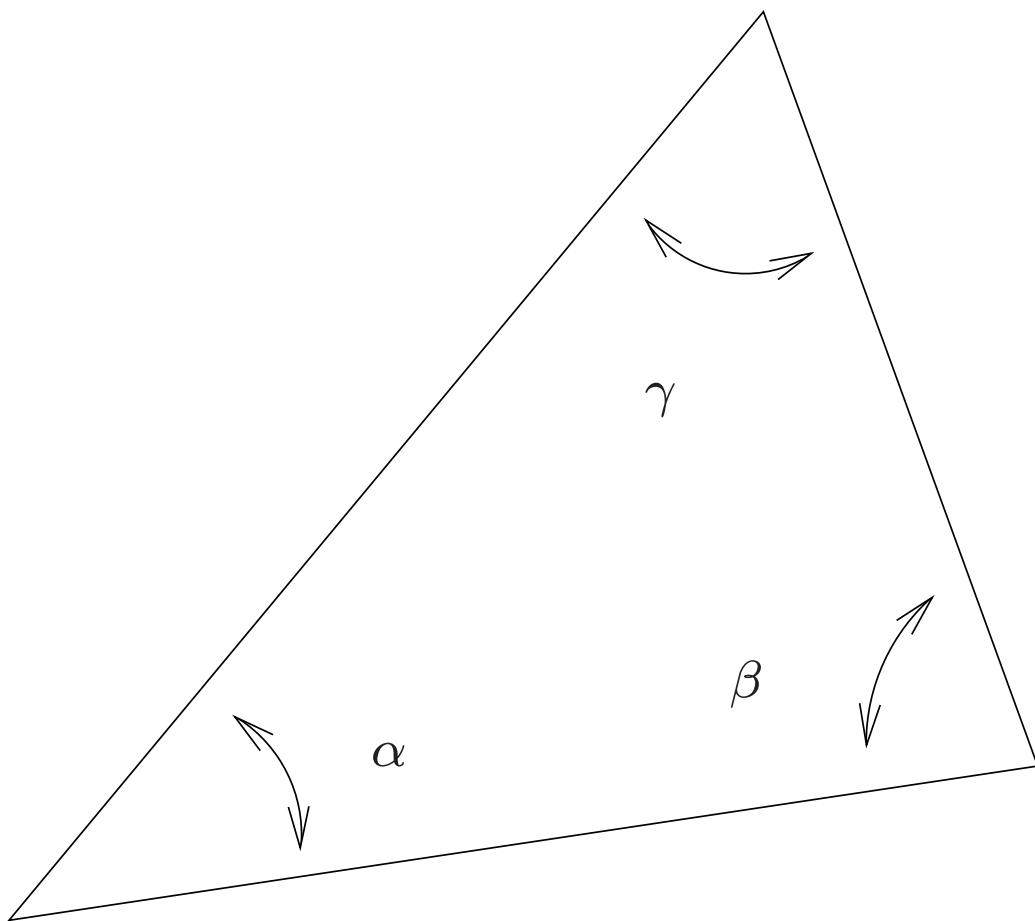


2. O segmento de recta que une o corpo ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



## **Geometria de Euclides (séc IV–III a.C.)**

- Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez.
- Existem rectas que não se intersectam (paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam  $180^\circ$ .

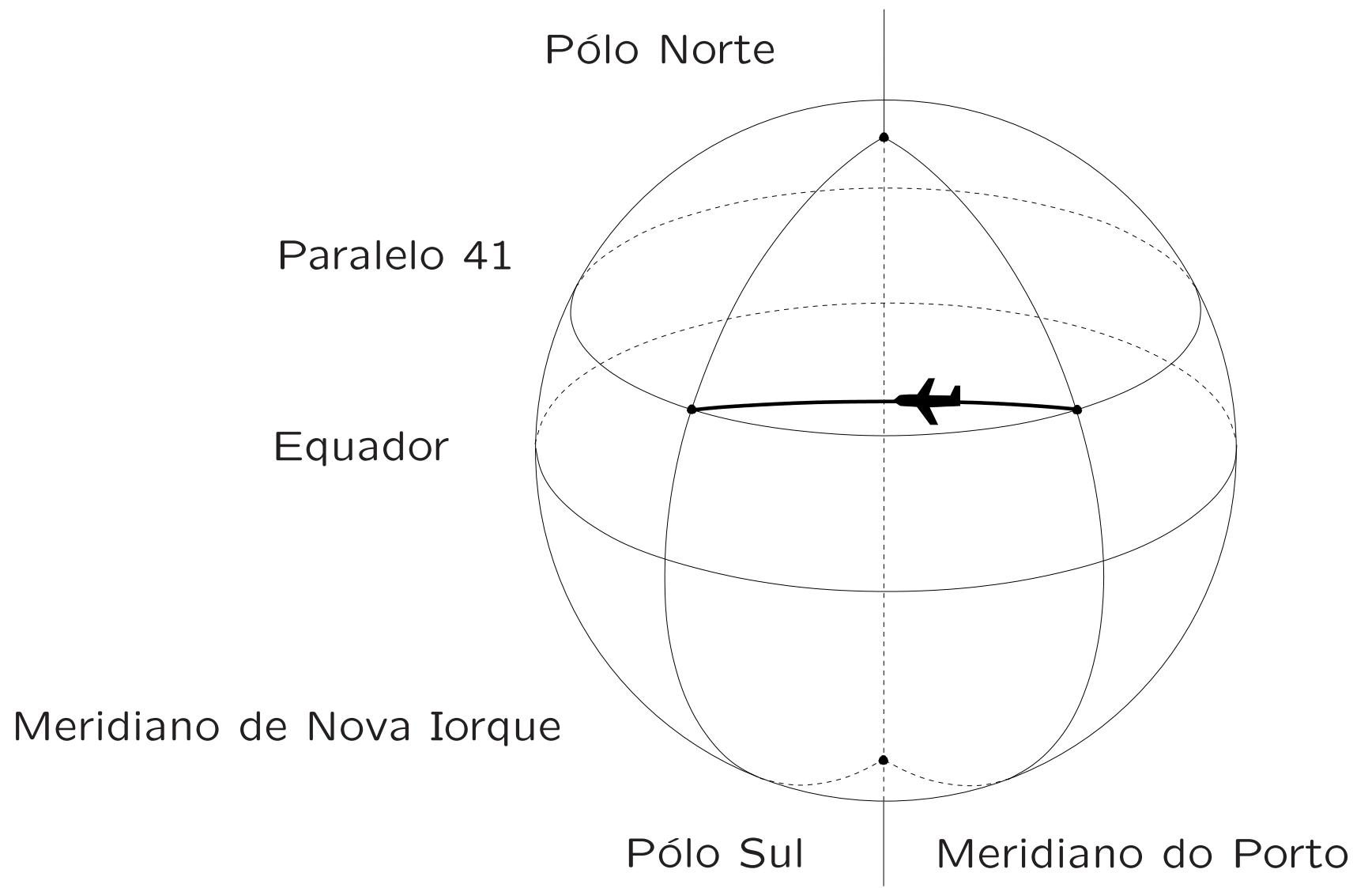


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

## Geometria de Riemann (1826–1866)

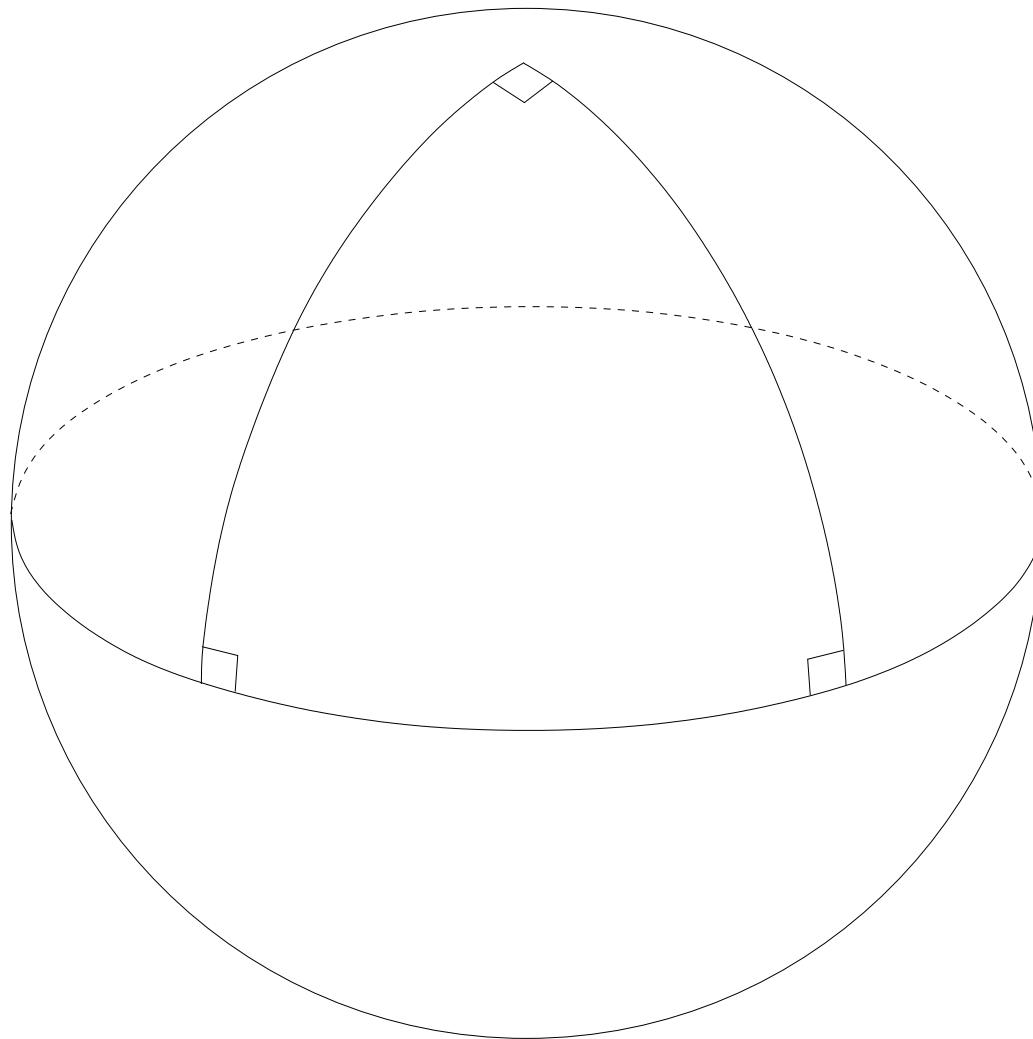
É a geometria das superfícies (espaços) curvos. Em vez de rectas temos geodésicas (curvas de comprimento mínimo).

Na esfera, por exemplo, as geodésicas são os círculos máximos, como o equador ou os meridianos. É por isso que para ir do Porto para Nova Iorque, o avião não voa para oeste.



## **Geometria da esfera**

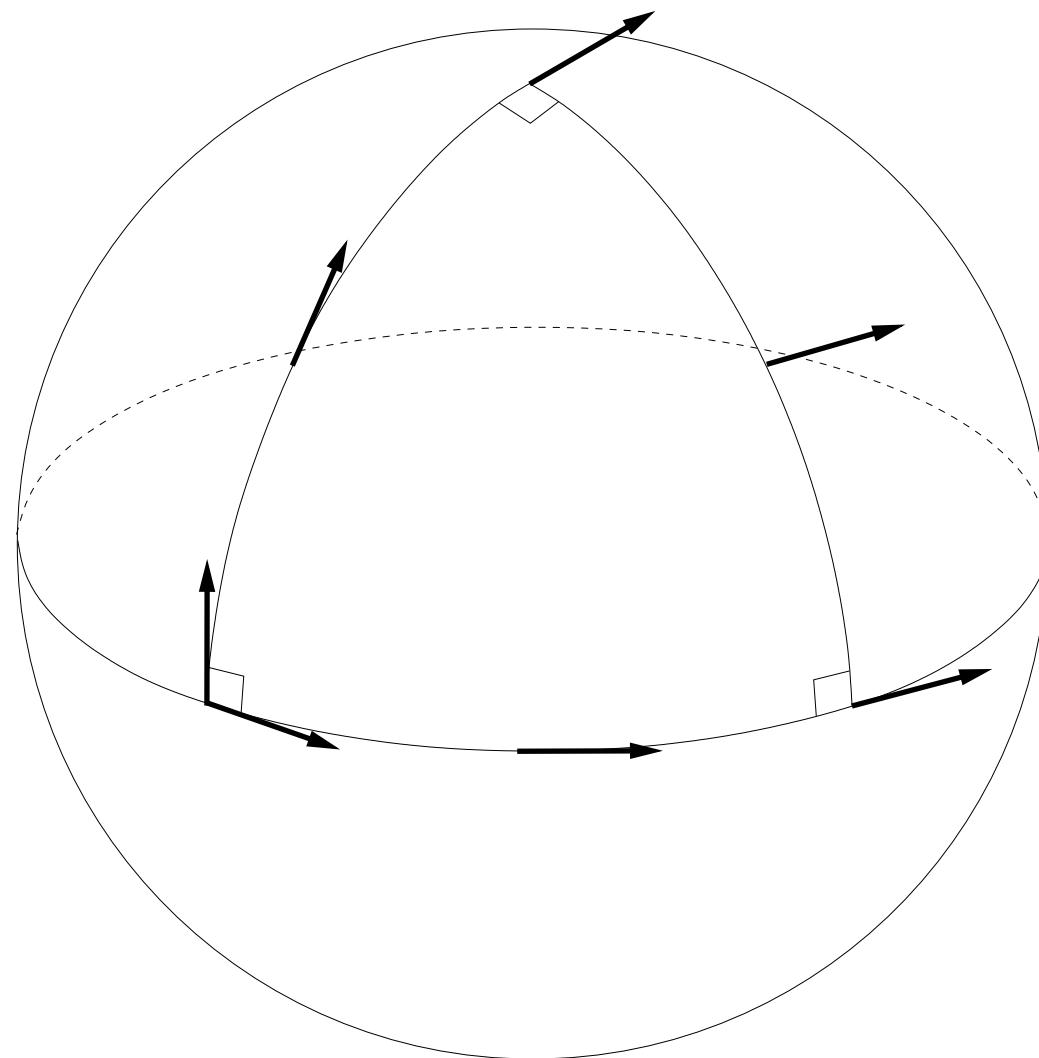
- Duas geodésicas distintas intersectam-se sempre em dois pontos (não existem paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam mais de  $180^\circ$ .



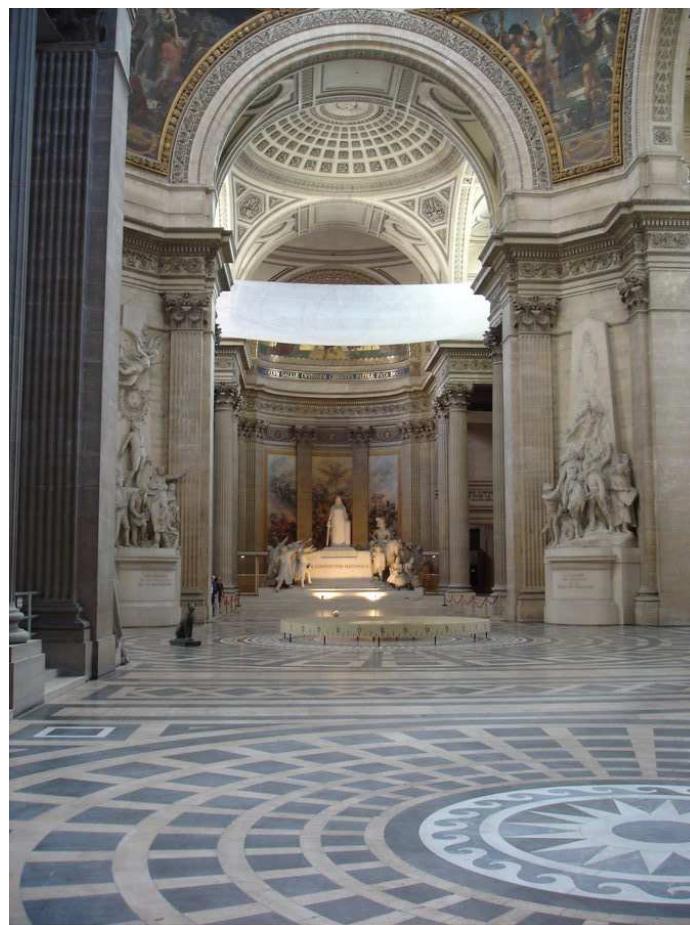
- Curvatura média =  $\frac{\text{Ângulo em excesso}}{\text{Área do triângulo}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi R^2}{8}} = \frac{1}{R^2}$ .
- Na esfera, todos os triângulos possuem mesma curvatura média (superfície de curvatura constante). Em geral, a curvatura de uma superfície num ponto é o limite da curvatura média de triângulos cada vez mais pequenos.

## **Transporte paralelo**

Um vector tangente que é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada regressa ao ponto inicial rodado de um ângulo igual ao excesso.

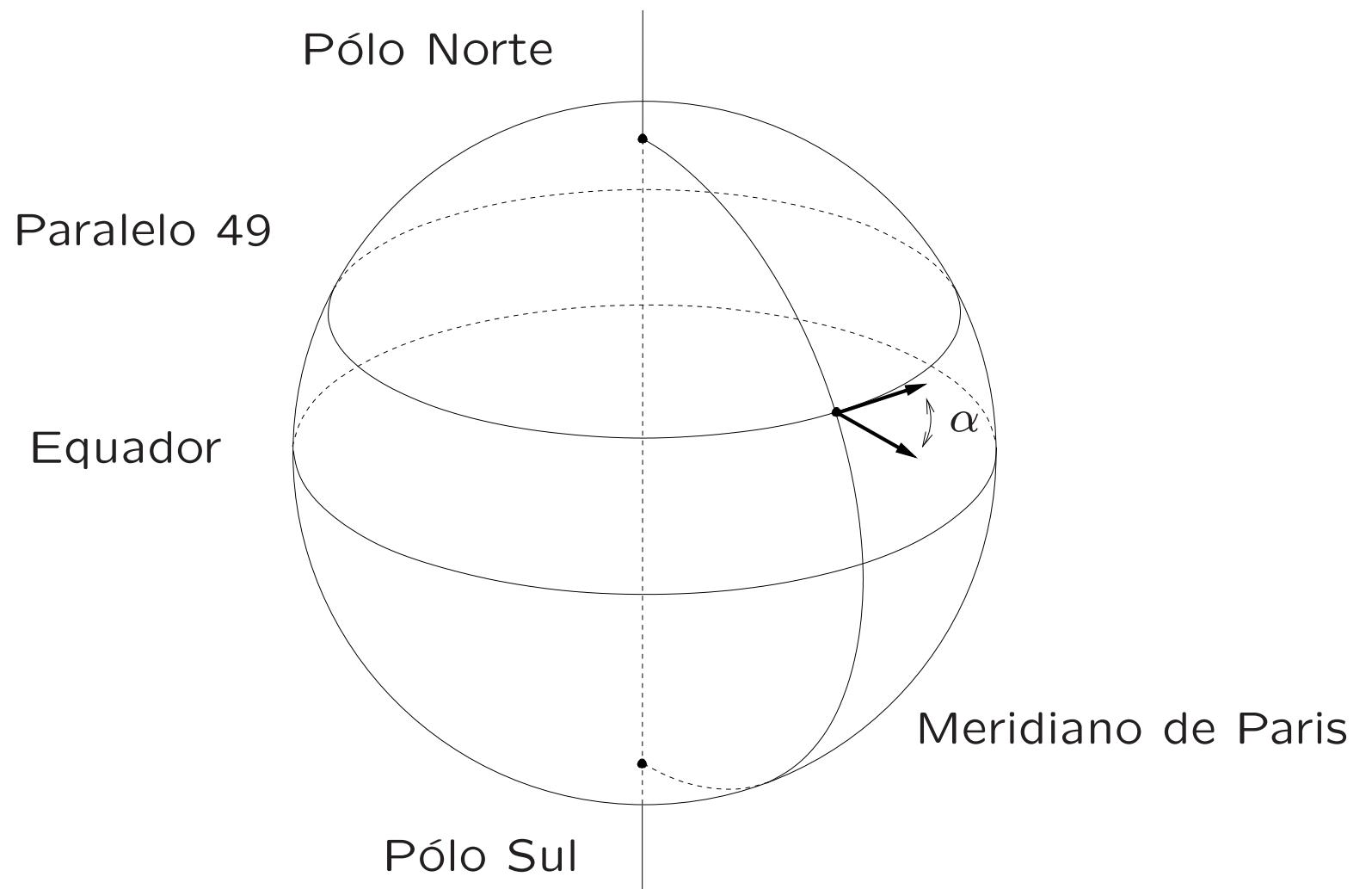


É o que acontece com o pêndulo de Foucault:





Pêndulo de Foucault do Panteão de Paris.

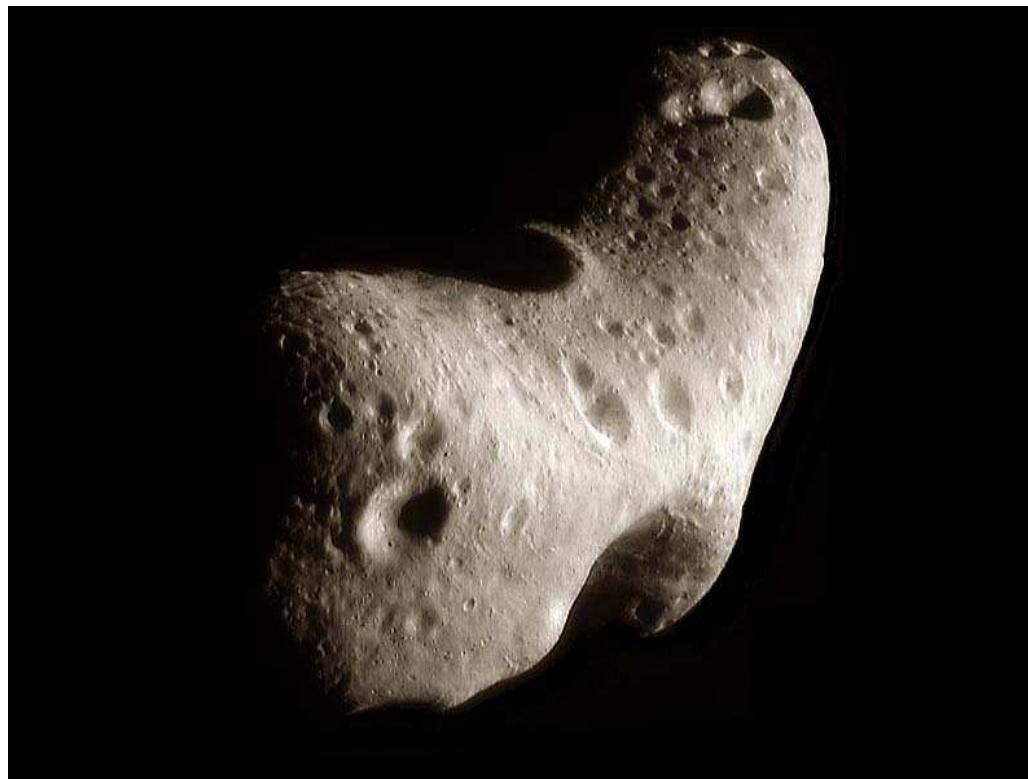


À latitude  $\lambda$ , o pêndulo de Foucault roda

$$\alpha = 2\pi - \underbrace{2\pi R(R - R \sin \lambda)}_{\text{área}} \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{curvatura}} = 2\pi \sin \lambda$$

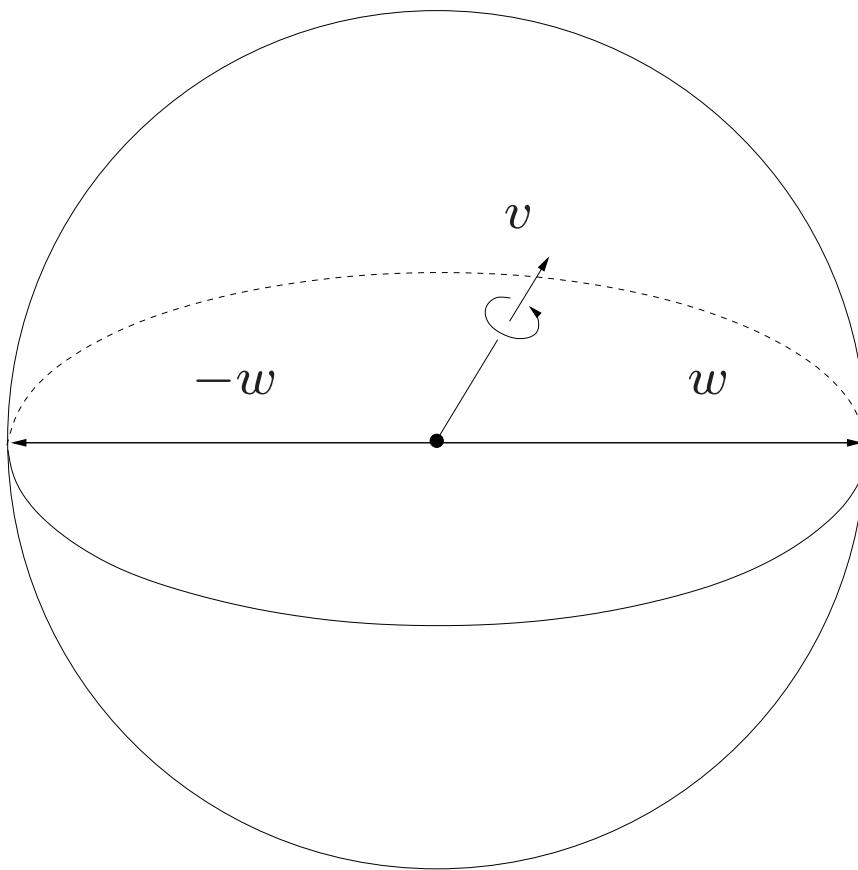
radianos por dia.

## **Corpo rígido**



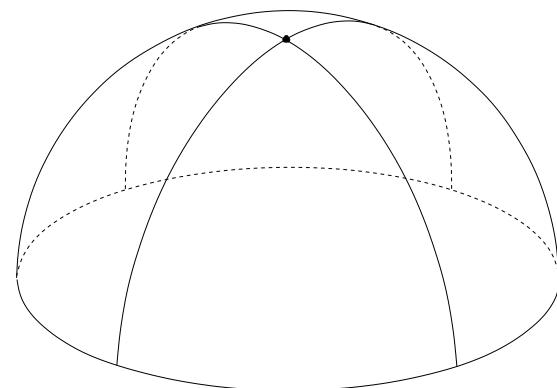
Asteróide Eros.

Qualquer posição do corpo é dada por um elemento do grupo das rotações  $SO(3)$  aplicado a uma posição de referência. Portanto o movimento do corpo rígido corresponde a uma curva em  $SO(3)$ , que é uma geodésica para uma certa geometria (determinada pela energia cinética).

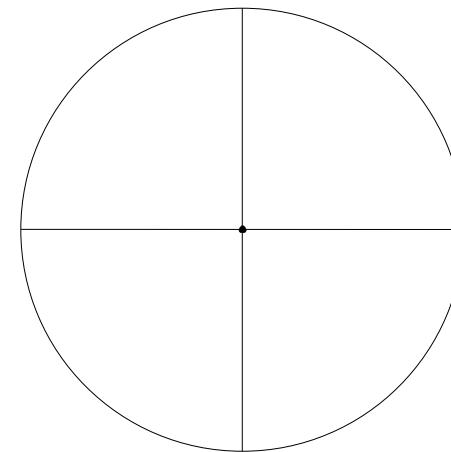


$\text{SO}(3)$

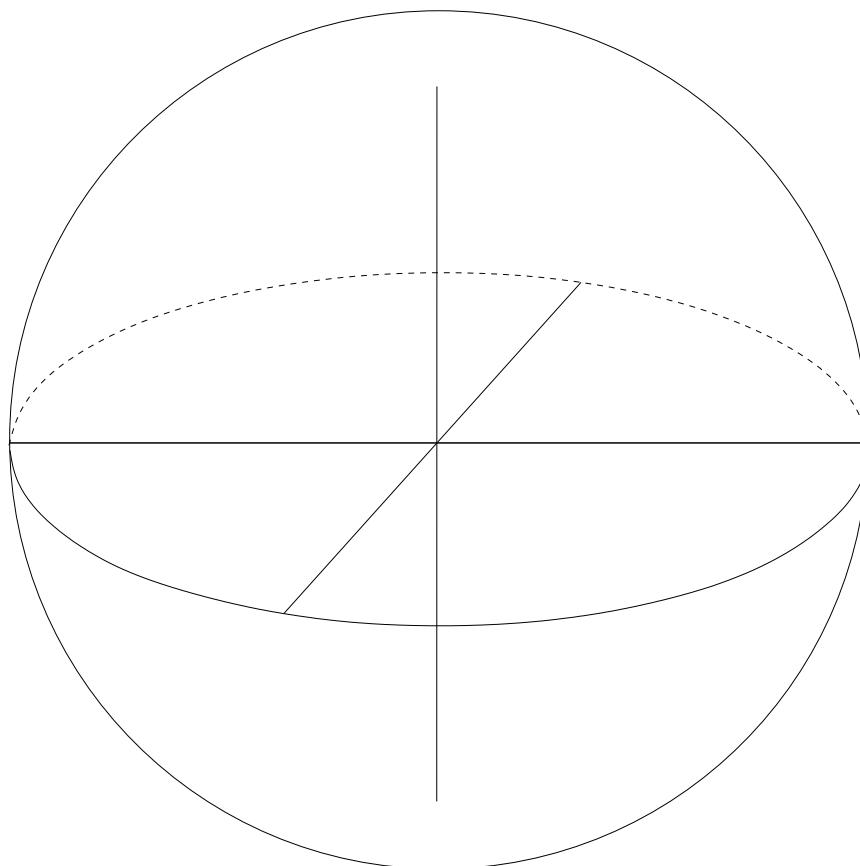
- $v$  representa a rotação de um ângulo  $\|v\|$  no sentido directo em torno de  $v$ .
- Se  $\|w\| = \pi$  então  $w$  e  $-w$  representam a mesma rotação.
- Portanto  $SO(3) \cong \frac{S^3}{\{\pm 1\}} \cong \mathbb{R}P^3$ .



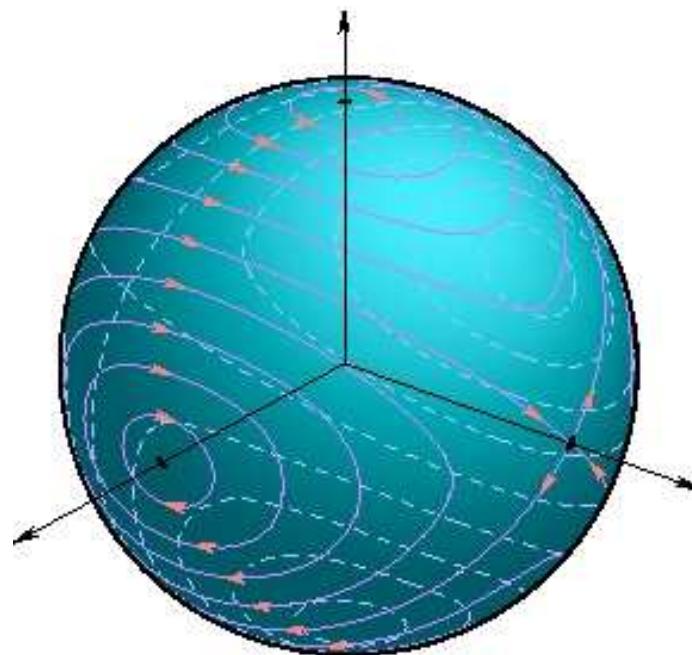
$\cong$



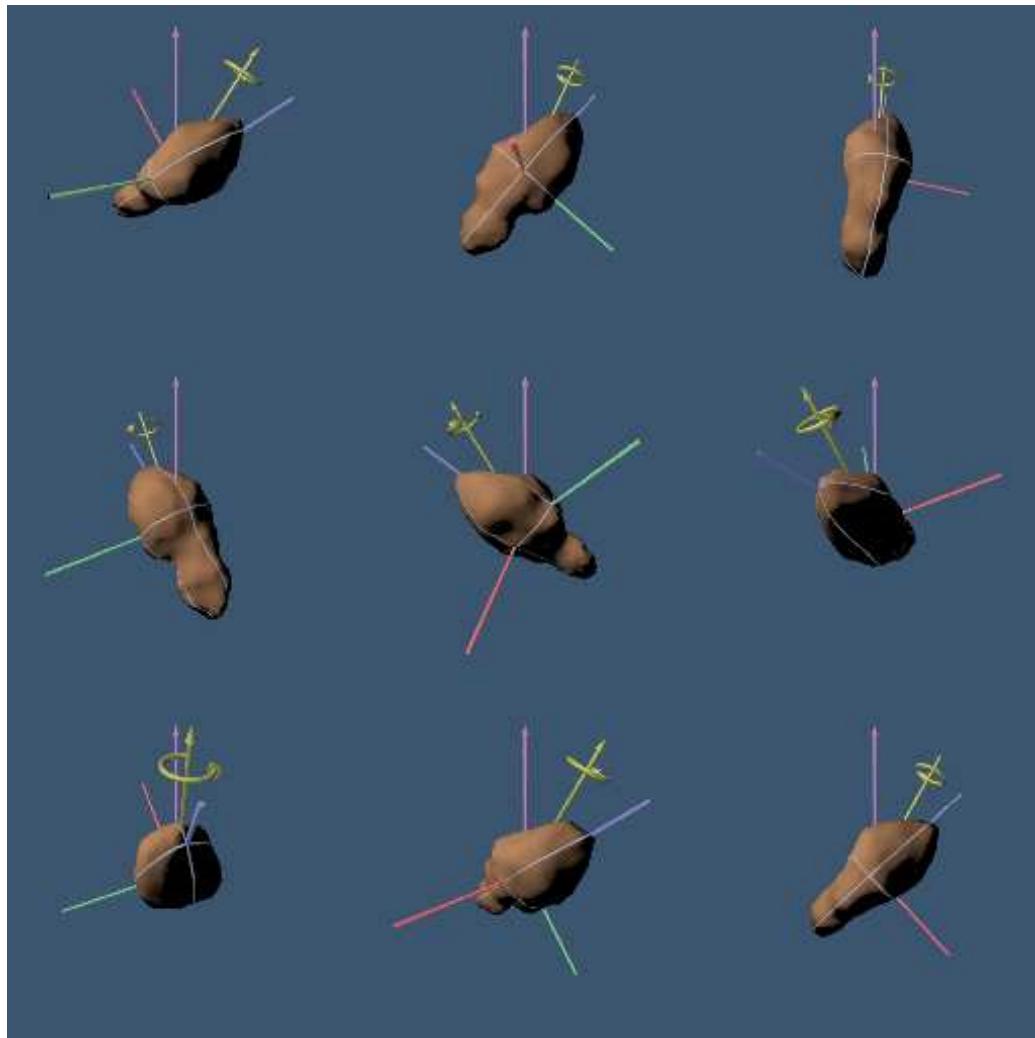
Se o corpo rígido é suficientemente simétrico, as geodésicas são exactamente as da esfera  $S^3$ :



O caso geral é mais complicado:



Trajectórias do vector momento angular no corpo rígido.

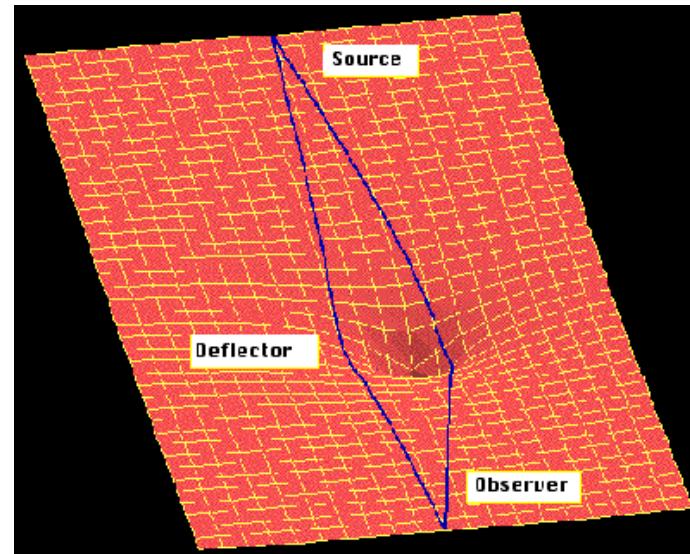
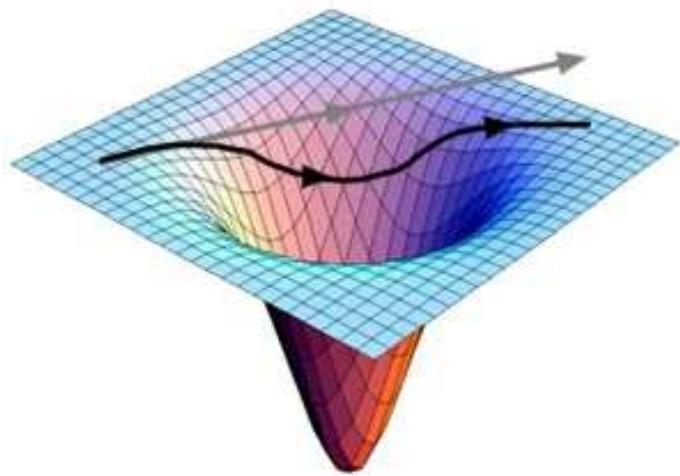


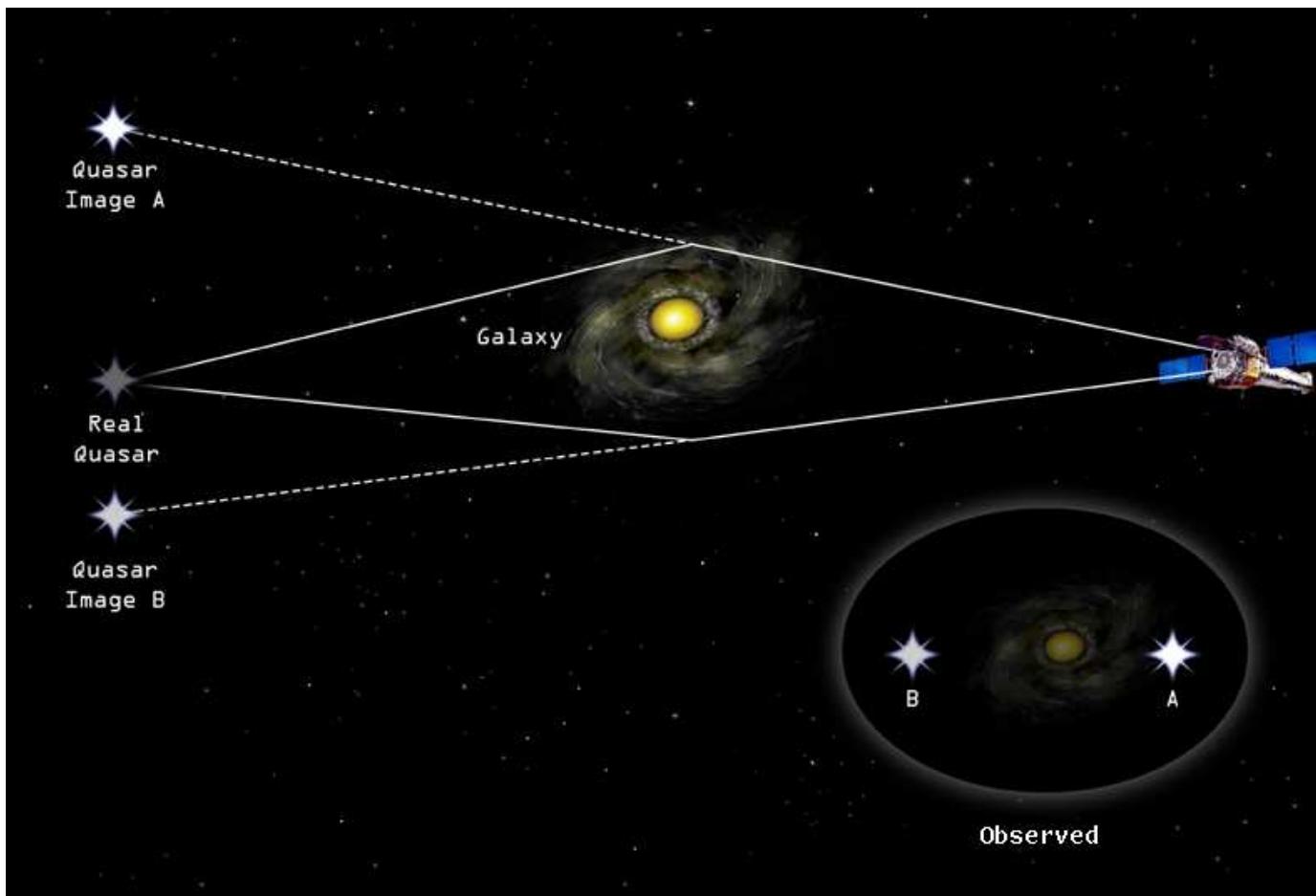
Asteróide Toutatis.

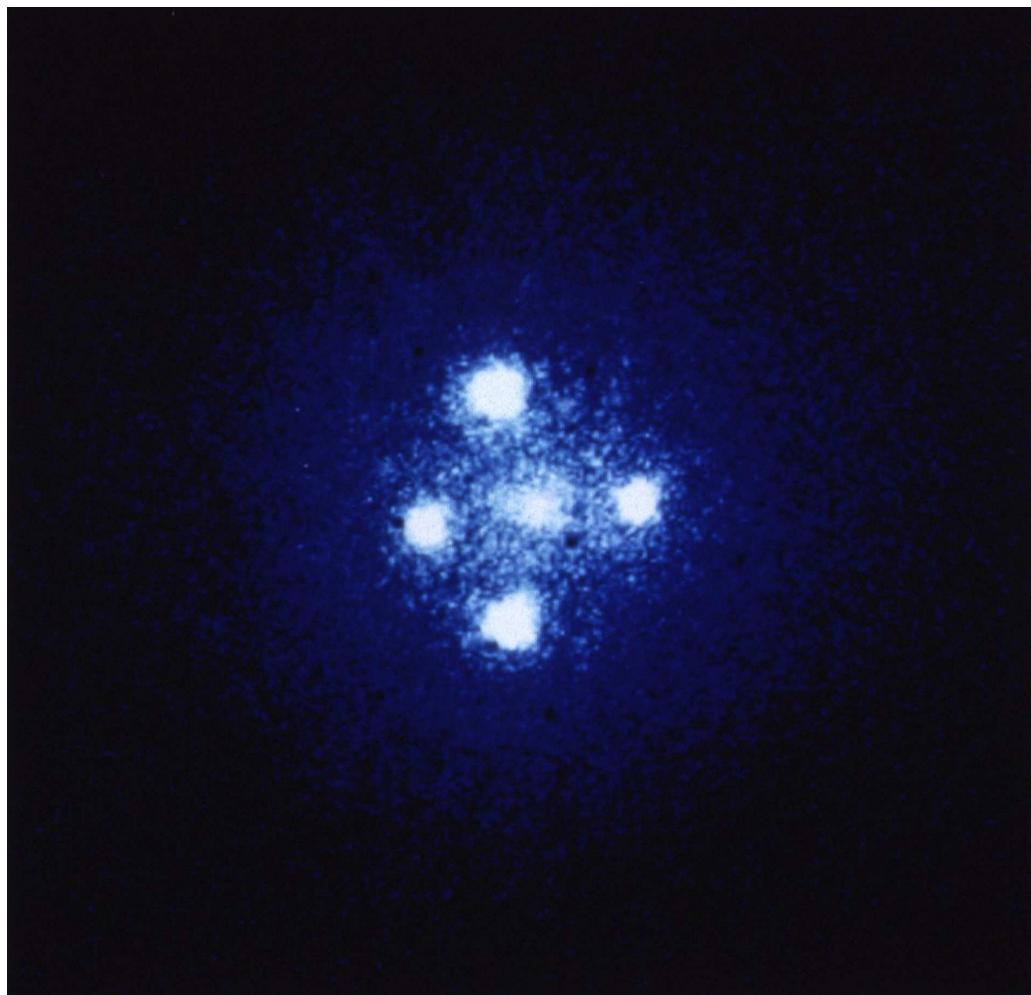
## Einstein (1879–1955)

A matéria curva o espaço(-tempo), e os raios luminosos seguem geodésicas.

Uma consequência é o efeito de lente gravitacional, que origina imagens múltiplas de objectos astronómicos.





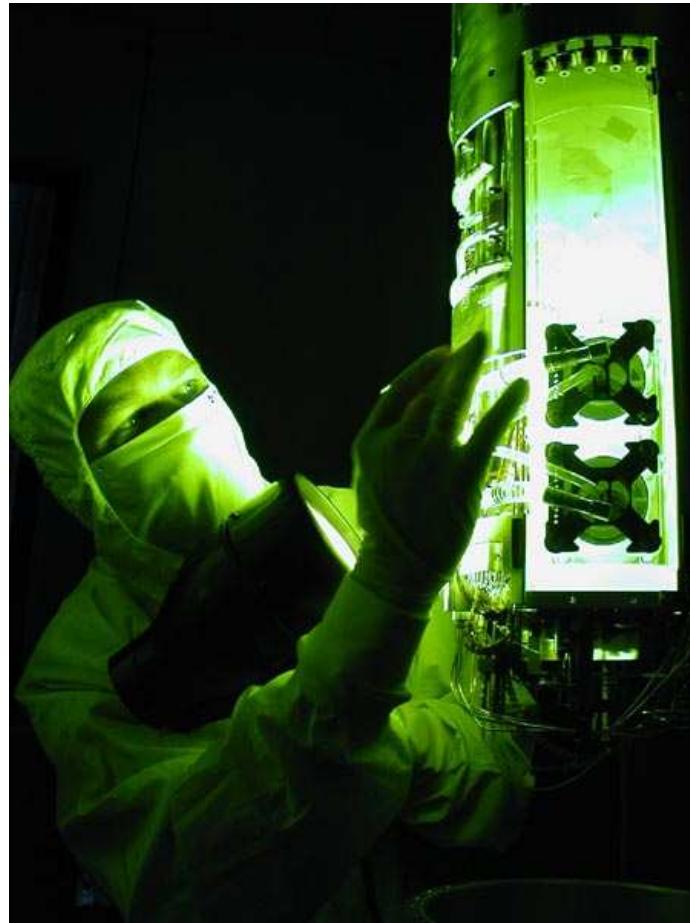


Cruz de Einstein.

## **Gravity Probe B (lançada em 2004)**



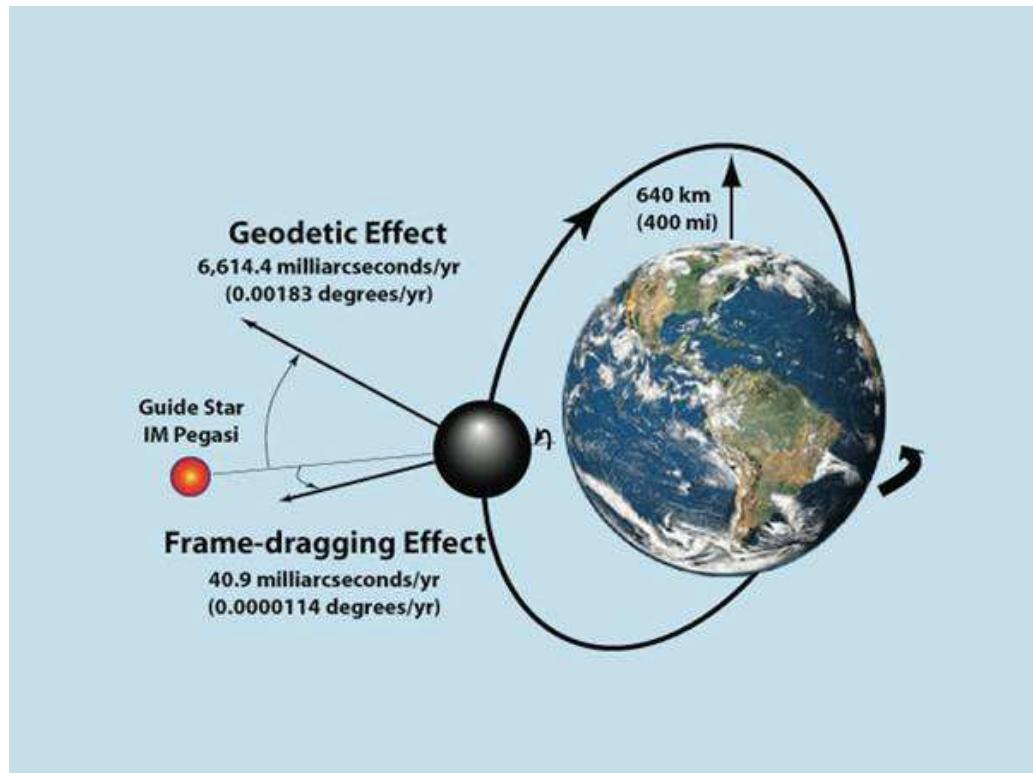
As esferas mais esféricas do mundo...



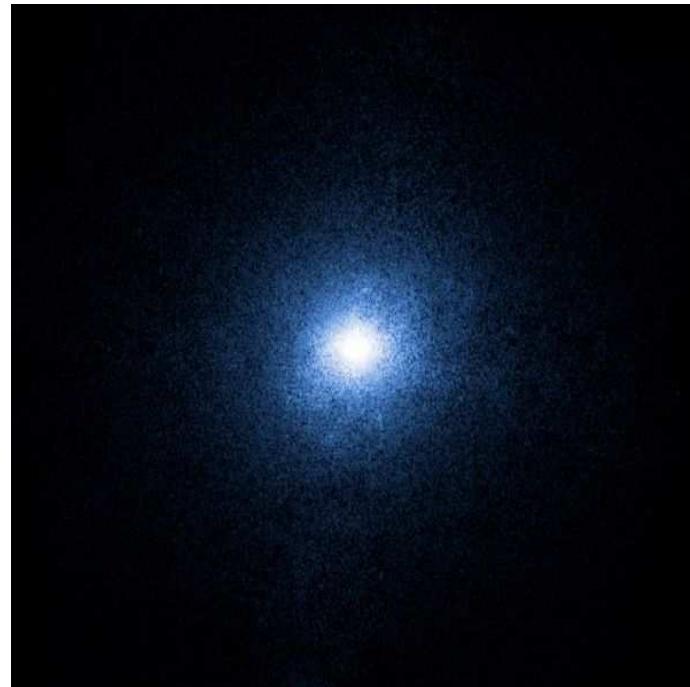
...arrefecidas abaixo de  $-271^{\circ}\text{C}$ ...



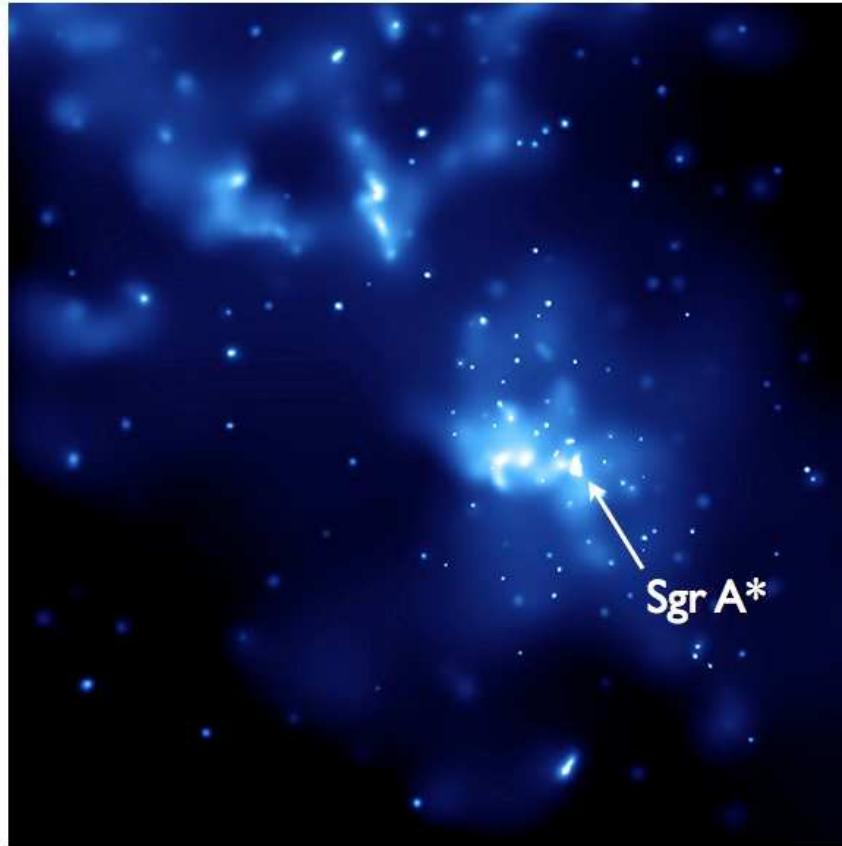
...foram colocadas a rodar em órbita.



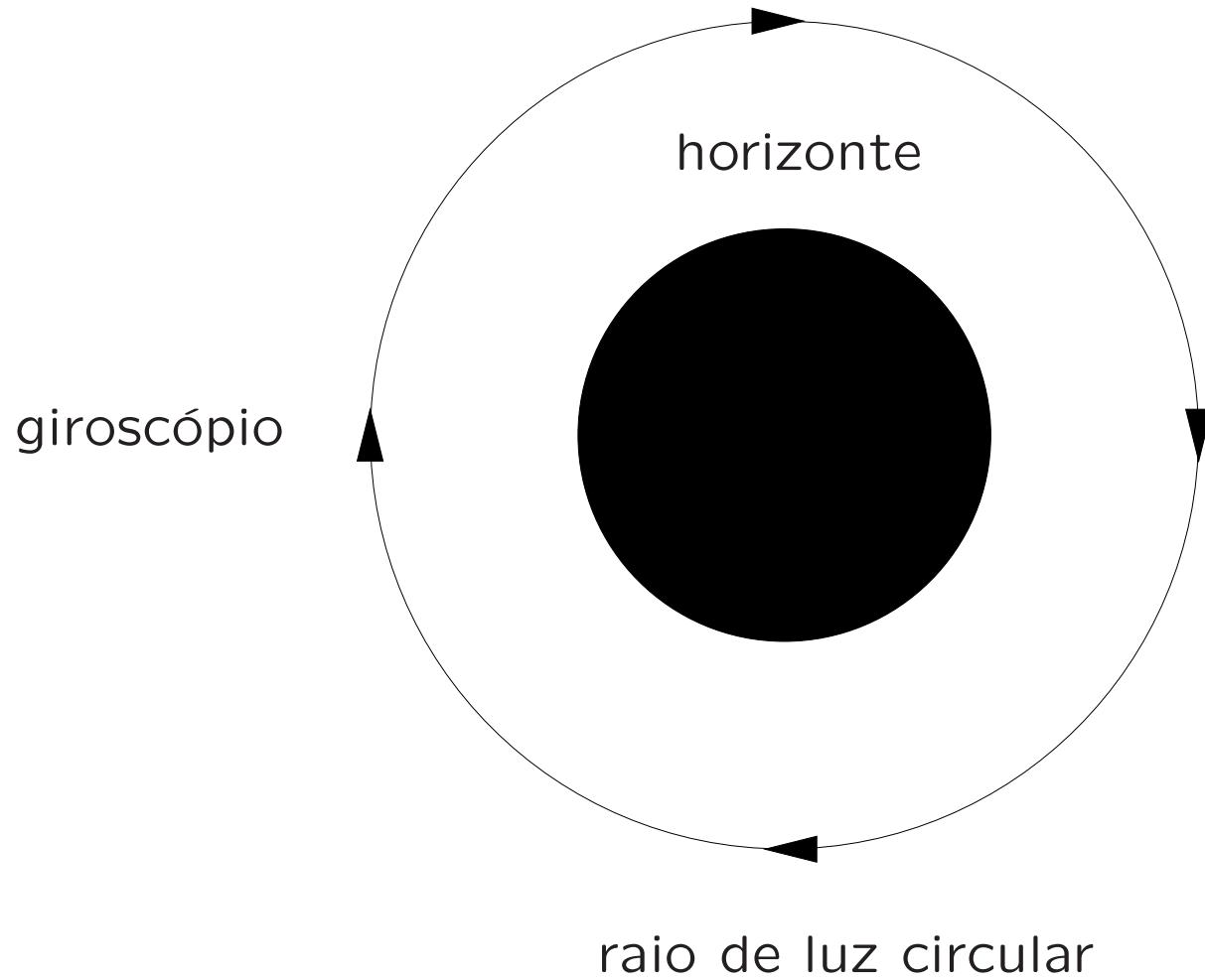
## Buracos negros

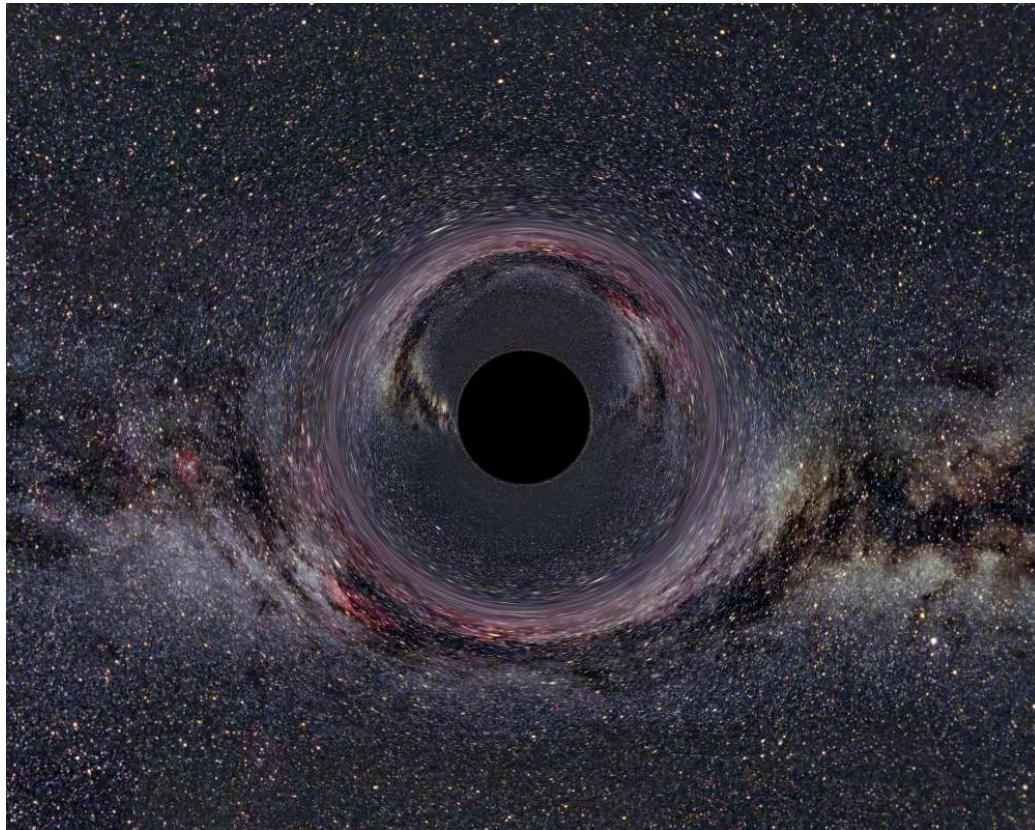


Cygnus X-1 (imagem de raios-X do telescópio Chandra).

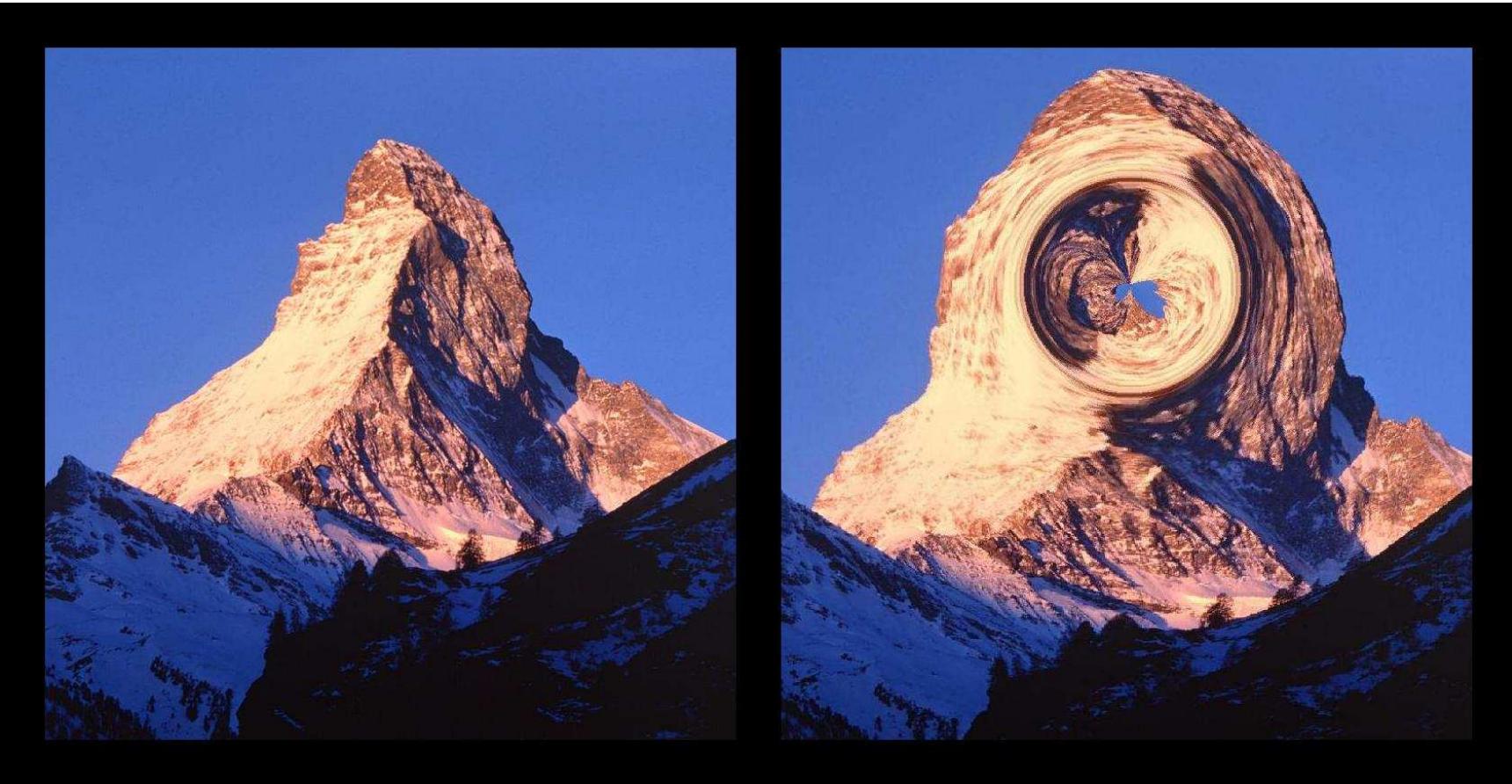


Sagittarius A\* (imagem de raios-X do telescópio Chandra).





Buraco negro a 600 quilómetros...



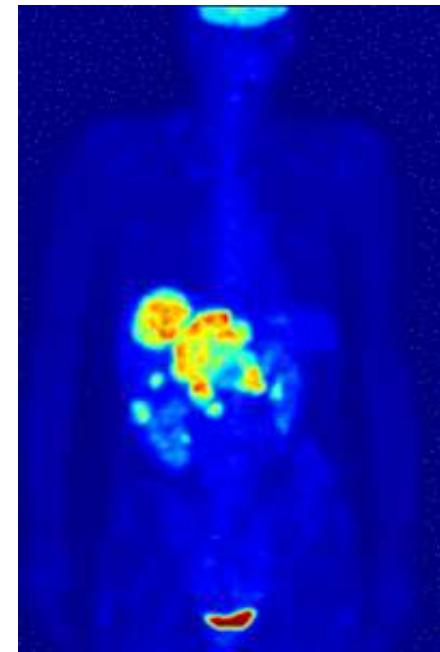
...e a 600 metros.

## Teorias de Gauge

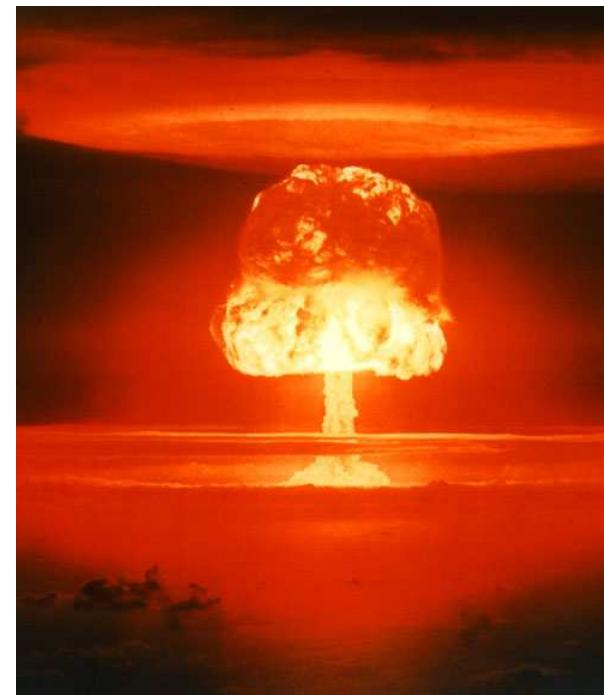
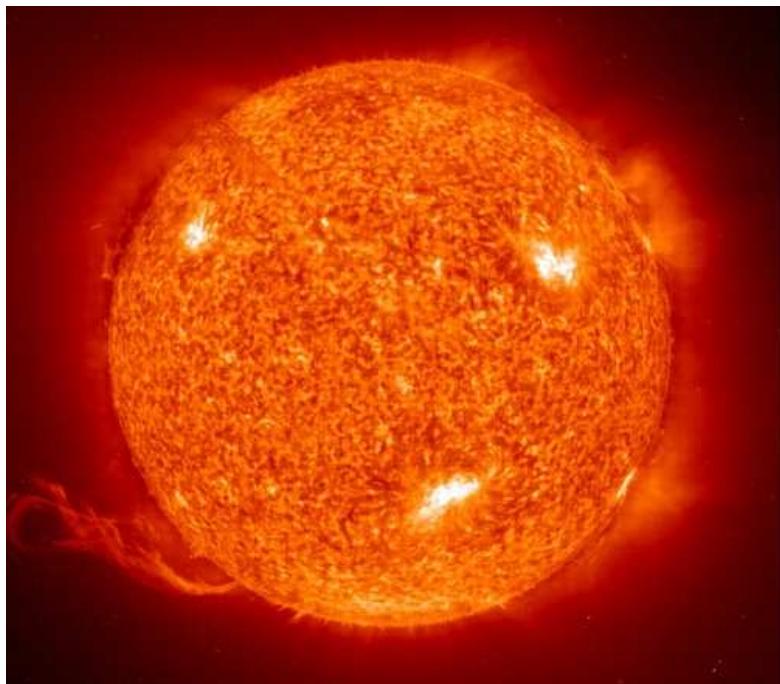
- Em cada ponto do espaço(-tempo) existe um espaço interno, i.e. um espaço vectorial complexo equipado com um produto interno hermitiano.
- As **forças fundamentais** são dadas pela curvatura do transporte paralelo de vectores internos.



Força electromagnética – espaço interno de dimensão 1.



Força nuclear fraca – espaço interno de dimensão 2.



Força nuclear forte – espaço interno de dimensão 3.

## **Galileu Galilei (1564–1642)**

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”

