



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

**TOPOLOGIA DOS NÍVEIS DE ENERGIA REGULARIZADOS PARA
O PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS**

José António Maciel Natário
(Licenciado)

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

elaborada sob a orientação do Prof. Waldyr Oliva e co-orientação do Prof. Carlos Rocha

Júri:

Prof. Carlos Rocha
Prof. Waldyr Oliva
Prof. José Manuel Ferreira
Prof. Ana Nunes

Setembro de 1996

RESUMO

O problema restrito dos três corpos é o protótipo dos problemas "insolúveis" da Mecânica. O seu estudo é portanto duplamente importante.

Dois factos fundamentais surgem do estudo deste problema: Primeiro, ele pode ser posto na forma de um sistema Hamiltoniano autónomo, possuindo portanto um primeiro integral (a função de Hamilton); Segundo, algumas das soluções deste problema terminam em colisões. Esta dificuldade pode ser evitada através de um método de regularização das equações diferenciais do movimento. O objectivo deste trabalho é precisamente o estudo da relação entre a regularização e a topologia dos conjuntos de nível (regularizados) da Hamiltoniana.

Isto é feito em primeiro lugar para o problema de Kepler, que pode ser olhado como um caso particular do problema restrito dos três corpos. Isto motiva não só a introdução do método de regularização (secção 3) como permite ilustrar, num caso mais simples, muitas das técnicas a utilizar no caso mais geral (secções 2, 4 e 6).

O problema restrito dos três corpos é introduzido na secção 7, e a topologia dos seus níveis de energia é descrita na secção 8. Aqui seguiu-se de perto o artigo de E. Lacombe, contornando-se inclusivamente uma pequena dificuldade na descrição da topologia do último nível de energia.

Na secção 9 analisa-se o efeito da regularização parcial de Levi-Civita na topologia dos níveis de energia. Esta análise (que não é difícil) é da responsabilidade do autor. A regularização global de Birkhoff é estudada na secção 10, e baseia-se no excelente artigo de G. Birkhoff. Apenas a topologia do quarto nível de energia é apresentada de modo radicalmente diferente.

Na secção 11 introduz-se um método que produz uma regularização global do problema restrito dos três corpos para cada função inteira, e mencionam-se algumas questões em aberto.

PALAVRAS-CHAVE: Níveis de energia, regularização, problema restrito dos três corpos.

ABSTRACT

The restricted three-body problem is the prototype of the "unsolvable" problems in Mechanics. Its study is therefore twice as important.

Two fundamental facts arise from studying this problem: First, that it may be given the form of a Hamiltonian autonomous system, and thus possesses a first integral (Hamilton's function); Second, that some of the solutions of this problem end in collisions. This difficulty can be avoided through a method of regularization of the differential equations of motion. The aim of this work is to study the relationship between the regularization and the topology of the (regularized) Hamiltonian's level sets.

This is done first in the case of the Kepler problem, which can be viewed as a particular case of the three-body restricted problem. By doing so, one is not only able to introduce the regularization method (section 3) as to illustrate in a simpler case many of the techniques to be used in the general case (sections 2, 4 and 6).

The restricted three-body problem is introduced in section 7, and the topology of its energy levels is described in section 8. Here we follow closely an article by E. Lacomba, with a minor correction in the topology of the last energy level.

In section 9 the effect of Levi-Civita's partial regularization on the topology of the energy levels is analysed. The author is responsible by the accuracy of this analysis (which is not difficult). Birkhoff's global regularization is discussed in section 10, based in the excellent article by G. D. Birkhoff. Only the topology of the fourth energy level is presented in a radically different fashion.

In section 11 a method is introduced which produces a global regularization of the restricted three-body problem for each holomorphic function, and some open problems are mentioned.

KEYWORDS: Energy levels, regularization, restricted three-body problem.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aqui ao professor Oliva, que gentilmente aceitou orientar-me na preparação deste trabalho, pela simpatia e empenhamento com que o fez. Gostaria também de agradecer ao professor Carlos Rocha a disponibilidade demonstrada.

ÍNDICE

1. O problema de Kepler.....	1
2. Níveis de energia para o problema de Kepler.....	2
3. Regularização.....	6
4. Problema de Kepler regularizado.....	12
5. Sistema de coordenadas em rotação.....	17
6. Problema de Kepler em coordenadas rotativas.....	19
7. Problema restrito dos três corpos.....	25
8. Níveis de energia para o problema restrito.....	28
9. Regularização de Levi-Civita do problema restrito.....	37
10. Regularização de Birkhoff do problema restrito.....	44
11. Outras regularizações globais do problema restrito.....	56
Bibliografia.....	59

1. PROBLEMA DE KEPLER

É bem conhecida a

Definição 1.1 (Problema de Kepler): *O problema de Kepler é o problema mecânico definido pela função de Lagrange $L: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{r}$$

onde k é uma constante positiva e $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

As equações do movimento correspondentes a esta função de Lagrange são

$$\ddot{x} = -\frac{k}{r^3}x$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{r^3}y,$$

e é imediato verificar que, para cada $R > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, admitem como soluções

$$x = R \cos(\omega(t - t_0))$$

$$y = R \sin(\omega(t - t_0))$$

onde

$$\omega = \frac{k^{1/2}}{R^{3/2}}.$$

Estas soluções correspondem a órbitas circulares de raio R . Para adimensionalizarmos o problema de Kepler, escolhemos uma órbita circular arbitrária que convencionamos ter raio e velocidade angular unitários (o período desta órbita de referência será portanto igual a 2π). Com esta escolha de unidades passamos a ter $k = 1$.

2. NÍVEIS DE ENERGIA PARA O PROBLEMA DE KEPLER

Recordamos aqui que é usual designar a variedade na qual se dá o movimento ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no caso do problema de Kepler) por **espaço das configurações**, e por **espaço de fase** o seu fibrado tangente ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2$ neste caso).

A função de Hamilton para o problema de Kepler (definida no espaço de fase) é

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{y} - L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{r}.$$

Como é sabido, a função acima é um primeiro integral das equações de Euler-Lagrange, pelo que o movimento no espaço de fase se dá nas subvariedades $H = \text{constante}$.

Definição 2.1 (Níveis de energia): *As subvariedades de nível $H = \text{constante}$ do espaço de fase denominam-se níveis de energia.*

Nos casos em que estaremos interessados, a função de Hamilton será sempre da forma

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y)$$

para alguma função $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ no seu domínio. Os pontos críticos da função de Hamilton serão então dados pelas equações

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{y}} = 0 \Leftrightarrow \dot{y} = 0.$$

Portanto, os pontos críticos da função de Hamilton serão exactamente as imagens inversas, segundo a projecção natural sobre a secção nula do espaço de fase, dos pontos críticos da função U . No caso do problema de Kepler, a função U não possui qualquer ponto crítico e, portanto, os subconjuntos $H = \text{constante}$ do espaço de fase são de facto subvariedades. Nos restantes casos em que estaremos interessados, a função U

apresentará apenas finitos valores críticos, pelo que os níveis de energia serão sempre variedades diferenciais, à excepção de um número finito de valores críticos da energia.

Fixado um valor h para a função de Hamilton, qualquer movimento no nível de energia correspondente verifica

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = h + \frac{1}{r},$$

pelo que só poderá ocorrer na região (dita acessível) do espaço das configurações definida por

$$h + \frac{1}{r} \geq 0.$$

Se $h \geq 0$, a condição acima não impõe qualquer restrição e o movimento pode ocorrer ao longo de todo o espaço de configurações. Se no entanto $h < 0$, o movimento só poderá ocorrer no disco perfurado definido por

$$0 < r \leq -\frac{1}{h}.$$

Dado qualquer ponto da região acessível do espaço das configurações, é claro que existe pelo menos uma solução que passa por esse ponto. Com efeito, basta tomar para condição inicial esse ponto, juntamente com um vector velocidade qualquer satisfazendo

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2h + \frac{2}{r}$$

para obtermos uma solução que passa pelo ponto considerado. Reciprocamente, qualquer solução que passe pelo ponto em causa deve nesse ponto possuir um vector velocidade satisfazendo a equação acima. É então imediata a

Proposição 2.2: *Se $h \geq 0$ o nível de energia é um fibrado sobre $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ cuja fibra típica é \mathbf{S}^1 .*

Desta proposição resulta imediatamente o

Corolário 2.3: *Se $h \geq 0$ o nível de energia é difeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado o círculo central, por exemplo, o aberto de \mathbf{R}^3*

$$T = \left\{ (x, y, z) : 0 < \left((x^2 + y^2)^{1/2} - 1 \right)^2 + z^2 < 1 \right\}.$$

Com efeito, se (r, θ) são coordenadas locais polares no plano e φ é a coordenada local usual em \mathbf{S}^1 , é claro que a função dada nestas coordenadas locais por

$$g(r, \theta, \varphi) = (1 + f(r) \cos(\varphi))(\cos(\theta), \sin(\theta), 0) + (0, 0, f(r) \sin(\varphi)),$$

onde

$$f(r) = \tanh\left(\frac{1}{r}\right),$$

define um difeomorfismo entre o nível de energia e T' (note-se que a expressão acima não é global devido à inexistência de cartas globais para as coordenadas angulares).

Identificando o nível de energia com T' , observamos que as soluções que tendem para a singularidade $r = 0$ no espaço das configurações se aproximam da fronteira do toro, enquanto que as soluções ilimitadas no espaço das configurações se aproximam do círculo central. Repare-se que à partida não era necessário que tal acontecesse, e é muito fácil obter um difeomorfismo do nível de energia em T' tal que as soluções que tendem para a singularidade se aproximam do círculo central e as soluções ilimitadas se aproximam da fronteira.

Se no entanto $h < 0$ a situação muda, em virtude da presença no espaço das configurações do círculo

$$r = -\frac{1}{h}.$$

Definição 2.4 (Curva de velocidade nula): *Caso exista, a curva no espaço das configurações definida por $H(x, y, 0, 0) = h$ diz-se a curva de velocidade nula correspondente à energia h .*

A curva de velocidade nula é portanto a projecção no espaço das configurações da intersecção do nível de energia com o subespaço $\dot{x} = \dot{y} = 0$ do espaço de fase.

Definição 2.5 (Curva de velocidade nula no nível de energia): *Caso exista, a intersecção do nível de energia $H = h$ com o subespaço $\dot{x} = \dot{y} = 0$ do espaço de fase diz-se a curva de velocidade nula no nível de energia $H = h$.*

Temos a

Proposição 2.6: *Se $h < 0$, o nível de energia é homeomorfo ao interior de um toro sólido, por exemplo, o aberto de \mathbf{R}^3*

$$T = \left\{ (x, y, z) : \left((x^2 + y^2)^{1/2} - 1 \right)^2 + z^2 < 1 \right\}.$$

Efectivamente, a mesma função g atrás indicada, mas com

$$f(r) = \tanh\left(h + \frac{1}{r}\right),$$

constitui agora um homeomorfismo entre o nível de energia e T . Note-se que não é neste caso possível inverter os papéis da fronteira do toro e do círculo central, justamente devido à presença da curva de velocidade nula, que é aplicada pela função g no círculo central.

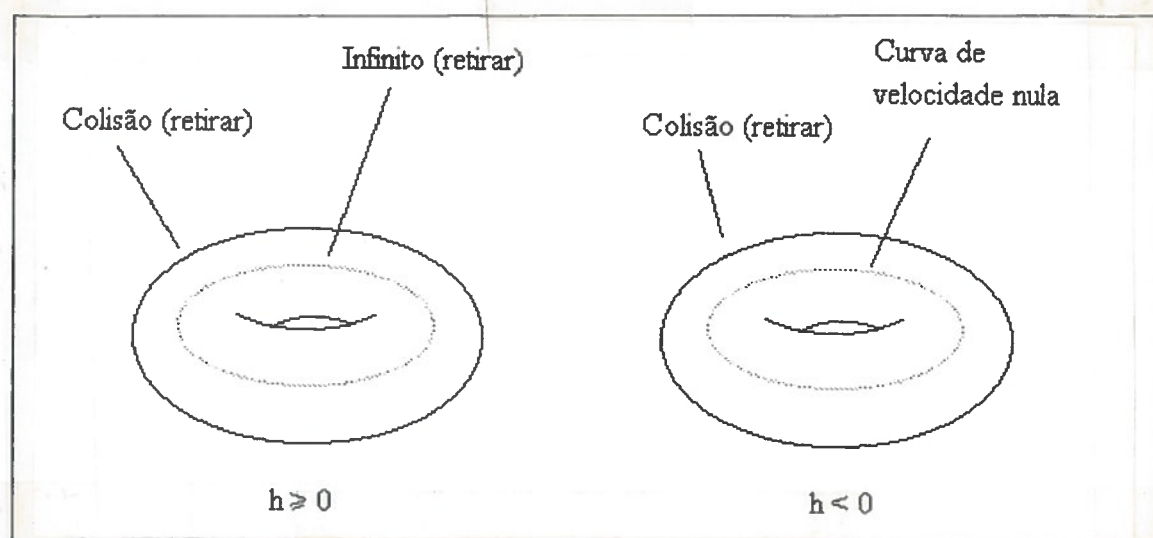


Figura 1: Níveis de energia para o problema de Kepler.

3. REGULARIZAÇÃO

Identificaremos \mathbf{R}^2 com \mathbf{C} da forma habitual. Observamos então que as equações do movimento do problema de Kepler podem ser escritas na forma

$$\ddot{z} = \text{grad}_z U$$

onde

$$z = x + iy,$$

$$U = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|},$$

$$\text{grad}_z U = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Mais geralmente, vamos considerar as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no plano dadas por

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = \text{grad}_z U$$

onde $U: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função de classe C^∞ no seu domínio e λ é um número imaginário puro (i.e., $\text{Re } \lambda = 0$). As equações do problema de Kepler constituem, claro está, um caso particular destas equações, para o qual $\lambda = 0$.

Começamos por observar que a equação acima possui sempre um primeiro integral:

Proposição 3.1: *A função*

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} |\dot{z}|^2 - U$$

é um primeiro integral das equações consideradas.

Efectivamente, e uma vez que o produto interno canónico de \mathbf{R}^2 se escreve em \mathbf{C} como

$$\langle z, w \rangle = \text{Re}(\bar{z}w)$$

temos

$$\frac{dH}{dt} = \operatorname{Re}(\bar{z}\ddot{z} - \bar{\dot{z}}\operatorname{grad}_z U) = \operatorname{Re}(-\lambda|\dot{z}|^2) = 0.$$

Na verdade, é fácil ver que as equações acima podem ser obtidas da função de Lagrange $L: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{|\lambda|}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + U$$

e que a função H não é mais que a função de Hamilton correspondente. Por este motivo, referimo-nos às subvariedades $H = \text{constante}$ de \mathbf{C}^2 (i.e., de \mathbf{R}^4) como os níveis de energia associados às equações consideradas.

Definição 3.2 (Potencial corrigido): No nível de energia $H = h$, definimos o potencial corrigido como sendo a função $U_h = U + h$.

É trivial a

Proposição 3.3: No nível de energia $H = h$, a equação do movimento pode ser escrita como

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = \operatorname{grad}_z U_h$$

e o primeiro integral como

$$\frac{1}{2}|\dot{z}|^2 - U_h = 0.$$

A respeito da última equação diferencial pretendemos demonstrar o seguinte

Teorema 3.4 (Regularização): Seja $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ uma função sobrejectiva analítica no seu domínio. Fazendo a mudança de variável complexa

$$z = f(w)$$

e a reparametrização definida por

$$\frac{dt}{d\tau} = \left| \frac{df}{dw} \right|^2,$$

as equações

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = \text{grad}_z U$$

passam, no nível de energia $H = h$, a escrever-se na forma

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \lambda \left| \frac{df}{dw} \right|^2 \frac{dw}{d\tau} = \text{grad}_w \left(\left| \frac{df}{dw} \right|^2 U_h \right).$$

Dem: A demonstração deste teorema não é difícil, envolvendo, porém, cálculos bastante longos. Começamos por introduzir as seguintes definições:

$$\dot{\tau}(t) = \frac{d\tau}{dt}$$

$$f'(w) = \frac{df}{dw}$$

$$w'(\tau) = \frac{dw}{d\tau}$$

(repare-se que usamos a plica para indicar diferenciação em ordem a duas variáveis diferentes). Temos então

$$\dot{z} = f' w' \dot{\tau}$$

e portanto

$$\ddot{z} = f' w' \ddot{\tau} + (f'' w'^2 + f' w''') \dot{\tau}^2.$$

Por outro lado, pondo $w = u + iv$ e passando a designar o potencial corrigido simplesmente por U , podemos escrever que

$$\text{grad}_w U = U_x x_u + U_y y_u + i(U_x x_v + U_y y_v)$$

onde os índices indicam diferenciação parcial em relação à variável indicada.

Uma vez que a função $z = f(w)$ é analítica, valem as equações de Cauchy-Riemann:

$$x_v = -y_u$$

$$y_v = x_u$$

resultando daqui que

$$\begin{aligned} grad_w U &= U_x x_u + U_y y_u + i(-U_x y_u + U_y x_u) = \\ &= (x_u - iy_u)(U_x + iU_y) = \bar{f}' grad_z U. \end{aligned}$$

As equações

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = grad_z U$$

podem então ser escritas na forma

$$f' w' \ddot{\tau} + (f'' w'^2 + f' w'^{\prime\prime}) \dot{\tau}^2 + \lambda f' w' \dot{\tau} = \frac{1}{f} grad_w U$$

ou, equivalentemente,

$$w'' + w' \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} + w'^2 \frac{f''}{f'} + \lambda w' \frac{1}{\dot{\tau}} = \frac{grad_w U}{\dot{\tau}^2 |f'|^2}.$$

Uma vez que

$$|f'|^2 = \frac{1}{\dot{\tau}}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} &= -\frac{d}{dt} |f'|^2 = -\frac{d}{dt} (f' \bar{f}') = -(f' w' \bar{f}' + f' \bar{f}' w') \dot{\tau} = \\ &= -(f' w' \bar{f}' + f' \bar{f}' w') \frac{1}{|f'|^2} = -\frac{f' w'}{f'} - \frac{\bar{f}' w'}{\bar{f}'} \end{aligned}$$

o que resulta numa simplificação notável das equações do movimento, que passam a escrever-se

$$w'' - |w'|^2 \frac{\bar{f}'}{\bar{f}'} + \lambda |f'|^2 w' = |f'|^2 grad_w U.$$

Chegados a este ponto, utilizamos o primeiro integral das equações do movimento para escrever

$$|\dot{z}|^2 = 2U \Leftrightarrow |f' w' \dot{\tau}|^2 = 2U \Leftrightarrow |w'|^2 = 2|f'|^2 U$$

pelo que podemos ainda obter as equações do movimento na forma

$$w'' + \lambda |f'|^2 w' = 2 \bar{f}'' f' U + |f'|^2 \text{grad}_w U.$$

Notamos agora que se $G = G(w)$ é uma função analítica temos

$$G_u = G' = -iG_v$$

$$\overline{G}_u = \overline{G}' = i\overline{G}_v$$

pelo que na expressão

$$\text{grad}_w |G|^2 = G \text{grad}_w \overline{G} + \overline{G} \text{grad}_w G$$

vem

$$\text{grad}_w G = G_u + iG_v = 0$$

$$\text{grad}_w \overline{G} = \overline{G}_u + i\overline{G}_v = 2\overline{G}'$$

e portanto

$$\text{grad}_w |G|^2 = 2G\overline{G}'.$$

Fazendo em particular $G = f'$, observamos então que as equações do movimento se podem escrever

$$w'' + \lambda |f'|^2 w' = U \text{grad}_w |f'|^2 + |f'|^2 \text{grad}_w U$$

o que completa a demonstração do teorema.

Note-se que a hipótese da analiticidade de f foi fundamental na demonstração. Convém insistir também no facto de que esta transformação das equações do movimento se faz para cada nível de energia, que é imagem de um subconjunto da subvariedade de \mathbb{C}^2 definida por

$$\frac{1}{2} |w'|^2 = |f'|^2 U_h.$$

Em particular, para cada nível de energia obtemos uma equação transformada diferente (porque $\text{grad}_w(|f'|^2 U_h)$ depende claramente de h).

Como a função f não é em geral injectiva, a subvariedade de \mathbf{C}^2 acima conterà pontos que são aplicados no mesmo ponto do nível de energia $H = h$, e que devemos pois identificar.

Definição 3.5 (Nível de energia regularizado): *A subvariedade de \mathbf{C}^2 definida por*

$$|w'|^2 = 2|f'|^2 U_h$$

sob identificação de pontos com a mesma imagem no nível de energia $H = h$, diz-se o nível de energia regularizado correspondente à energia h .

É claro que basta seguir o movimento nesta variedade, se bem que as coordenadas locais possam sempre ser fornecidas pelas da variedade antes da identificação.

4. PROBLEMA DE KEPLER REGULARIZADO

Para o problema de Kepler temos

$$U_h = \frac{1}{|z|} + h.$$

É portanto natural considerar a

Definição 4.1 (Regularização de Levi-Civita): A regularização de Levi-Civita do problema de Kepler consiste em considerar $f(w) = w^2$.

Com esta escolha passamos a ter

$$|f'|^2 U_h = |2w|^2 \left(\frac{1}{|w^2|} + h \right) = 4 + 4h|w|^2.$$

Definição 4.2 (Potencial regularizado): Chama-se potencial regularizado à função real de variável complexa $|f'|^2 U_h$.

As equações do movimento nas variáveis regularizadas ficam

$$w'' = \text{grad}_w (4h|w|^2)$$

sendo portanto análogas às de um oscilador harmónico simples. Em particular a transformação regularizadora fornece-nos um método de integração do problema de Kepler.

Note-se que as equações acima não contêm qualquer singularidade, ao contrário daquilo que se passava com as equações originais. Como vale o primeiro integral

$$\frac{1}{2} |w'|^2 = 4 + 4h|w|^2,$$

não é difícil mostrar que as soluções das equações regularizadas são globais. Invertendo a transformação regularizadora, obtemos soluções do problema de Kepler definidas em \mathbf{R} com a eventual excepção de um número contável de pontos isolados (correspondentes a zeros de $w(\tau)$, onde $z(\tau)$ não é diferenciável), a que podemos com alguma legitimidade chamar soluções globais do problema de Kepler (porque por exemplo se mantêm próximas de soluções globais no sentido usual do termo).

A transformação regularizadora define uma aplicação entre os níveis de energia dos problemas regularizado e não regularizado, dada por

$$(w, w') \mapsto (z, \dot{z}) = (f, f' w' \dot{t}) = \left(w^2, \frac{w'}{2w} \right).$$

Repare-se que pontos simétricos no nível de energia do problema regularizado correspondem ao mesmo ponto do nível de energia original, pelo que os devemos identificar para obter o nível de energia regularizado. Daqui e da equação

$$|w'|^2 - 8h|w|^2 = 8,$$

que define o nível de energia do problema regularizado, resulta imediatamente a

Proposição 4.3: *Se $h < 0$, o nível de energia regularizado é difeomorfo a \mathbf{S}^3 com os pontos antipodais identificados, i.e., ao espaço projectivo real tridimensional \mathbf{P}^3 .*

Considerando a projecção de

$$\mathbf{S}^3 = \{(x, y, u, v) : x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1\}$$

no hiperplano

$$H = \{(x, y, u, v) : x = 0\} \approx \mathbf{R}^3$$

é fácil ver que \mathbf{P}^3 é homeomorfo ao compacto de \mathbf{R}^3

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

com os pontos antipodais de ∂B identificados. Isto permite-nos visualizar mais facilmente o nível de energia regularizado.

Para identificar a curva de velocidade nula, observamos que esta é a projecção em \mathbf{P}^3 por identificação dos pontos antipodais do conjunto

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbf{S}^3 : u = v = 0\}$$

e que portanto é dada (no nosso modelo de \mathbf{P}^3) pela intersecção de B com o eixo dos xx . Note-se que, em virtude da identificação dos pontos da fronteira de B , a curva de velocidade nula é uma curva fechada.

O nível de energia regularizado não se encontra em correspondência biunívoca com o nível de energia não regularizado: contém a mais a curva

$$\{(w, w') \in \mathbf{C}^2 : w = 0 \wedge |w'|^2 = 8\}$$

onde pontos antipodais devem ser identificados.

Definição 4.4 (Curva de colisão): *O subconjunto acima indicado do nível de energia regularizado denomina-se a curva de colisão deste nível de energia.*

Portanto o nível de energia regularizado obtém-se do nível de energia não regularizado acrescentando a este último a curva de colisão. Identificando o nível de energia regularizado com \mathbb{P}^3 , a curva de colisão é dada pela projecção em \mathbb{P}^3 do conjunto

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbb{S}^3 : x = y = 0\}.$$

No nosso modelo, ela é portanto a intersecção de ∂B com o plano yz . Se retirarmos este círculo de B , é fácil ver que obtemos o interior um toro sólido "torcido", que é obviamente homeomorfo ao nível de energia não regularizado. Note-se que a curva de velocidade nula será o círculo central deste toro.

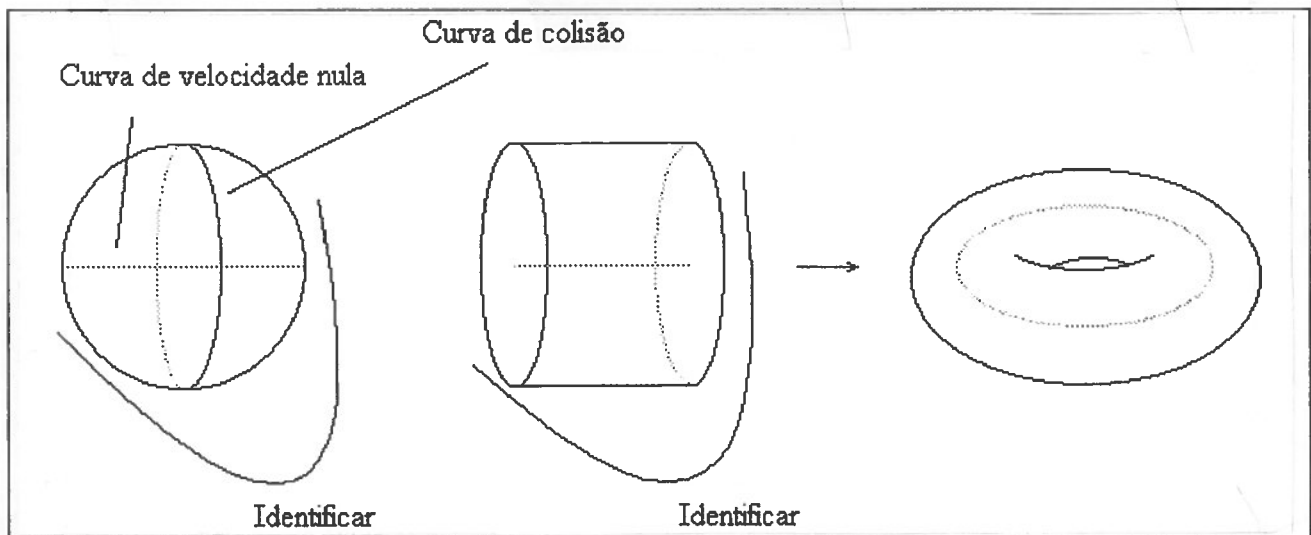


Figura 2. *Nível de energia regularizado para o problema de Kepler ($h < 0$) com e sem a curva de colisão.*

É claro que se projectarmos \mathbb{S}^3 no hiperplano

$$H' = \{(x, y, u, v) : v = 0\} \approx \mathbb{R}^3,$$

o espaço projectivo \mathbb{P}^3 continua a ser dado por B com os pontos antipodais da fronteira identificados; no entanto, mediante esta projecção, a curva de velocidade nula é transformada na intersecção de ∂B com o plano xy , e a curva de colisão na intersecção de

B com o eixo dos zz . Vemos portanto que estas duas curvas são indistinguíveis do ponto de vista topológico: elas são meramente duas curvas fechadas enlaçadas.

Passamos a analisar o nível de energia regularizado para $h \geq 0$. Repare-se que neste caso o membro direito da equação que define o nível de energia do problema regularizado,

$$|w'|^2 = 8h|w|^2 + 8,$$

é estritamente positivo, donde se segue a

Proposição 4.5: *Se $h \geq 0$, o nível de energia regularizado é difeomorfo à variedade*

$$\{(w, w') \in \mathbb{C}^2 : |w'| = 1\}$$

com os pontos simétricos identificados.

É claro que a variedade acima (antes da identificação) é ainda difeomorfa à variedade

$$\{(w, w') \in \mathbb{C}^2 : |w| < 1 \wedge |w'| = 1\}.$$

Parametrizando w' através de um ângulo $\varphi \in [-\pi, \pi]$, o conjunto acima pode ser claramente representado pelo cilindro sólido

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1 \wedge -\pi \leq z \leq \pi\}$$

com as bases identificadas de forma óbvia.

Uma vez que $\arg(-w') = \arg(w') + \pi \pmod{2\pi}$, identificar os pontos simétricos corresponde no nosso cilindro a identificar os pontos (x, y, z) e $(-x, -y, z - \pi)$ para $z \in [0, \pi]$. Portanto, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao cilindro sólido

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1 \wedge 0 \leq z \leq \pi\}$$

com as bases identificadas após meia rotação de uma delas. Daí que seja verdadeira a

Proposição 4.6: *Se $h \geq 0$, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao interior de um toro sólido.*

Para identificarmos a curva de colisão, notamos que esta corresponde ao eixo do cilindro, ou seja, ao círculo central do toro sólido. Retirando este círculo central ao toro sólido obtemos o nível de energia não regularizado.

Este resultado era de esperar, uma vez que o nível de energia regularizado para $h < 0$ sem a curva de velocidade nula é precisamente o interior de um toro sólido com a curva de colisão como círculo central.

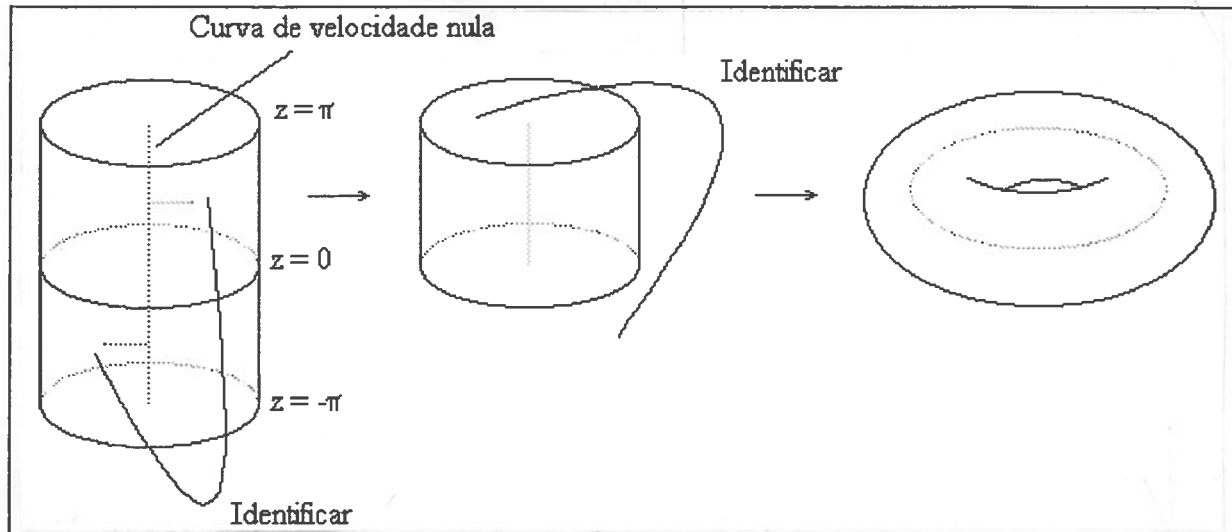


Figura 3. *Nível de energia regularizado para o problema de Kepler ($h \geq 0$).*

5. SISTEMA DE COORDENADAS EM ROTACÃO

Consideramos um sistema mecânico com dois graus de liberdade definido pela função de Lagrange $L: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, t) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + V(\xi, \eta, t),$$

e pretendemos estudar este sistema num sistema de coordenadas em rotação (com velocidade angular unitária) em relação ao sistema dado. Por outras palavras, pondo

$$\zeta = \xi + i\eta$$

e

$$z = x + iy$$

pretendemos estudar o sistema nas coordenadas (x, y) quando fazemos

$$\zeta = ze^{it}.$$

Decorre desta equação que

$$\dot{\zeta} = (\dot{z} + iz)e^{it}$$

e portanto

$$|\dot{\zeta}|^2 = (\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2.$$

No sistema de coordenadas em rotação a função de Lagrange escreve-se então

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - 2y\dot{x} + y^2 + \dot{y}^2 + 2x\dot{y} + x^2) + V(x, y, t) = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V(x, y, t), \end{aligned}$$

pelo que os momentos conjugados ficam

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x$$

e a função de Hamilton

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - V(x, y, t).$$

Se, como sucede nos casos que nos interessarão, o potencial V escrito nas coordenadas (x, y) não depende do tempo, é esta quantidade, e não a função de Hamilton nas coordenadas iniciais, que é conservada. Note-se que nas coordenadas originais (ou imóveis) esta quantidade se escreve

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}|\dot{z}|^2 - \frac{1}{2}|z|^2 - V = \frac{1}{2}|\dot{\zeta} - i\zeta|^2 - \frac{1}{2}|\zeta|^2 - V = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) - V \end{aligned}$$

e é realmente diferente da função de Hamilton do sistema original. É curioso notar que a diferença é precisamente o momento angular relativo à origem do sistema de coordenadas.

Para terminar, determinamos rapidamente as equações do movimento no sistema de coordenadas em rotação. Elas são

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial x} \Leftrightarrow \ddot{x} - \dot{y} = \dot{y} + x + \frac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow \ddot{x} - 2\dot{y} = x + \frac{\partial V}{\partial x}; \\ \frac{dp_y}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial y} \Leftrightarrow \ddot{y} + \dot{x} = -\dot{x} + y + \frac{\partial V}{\partial y} \Leftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{x} = y + \frac{\partial V}{\partial y}. \end{aligned}$$

Os termos adicionais que surgem relativamente às equações do movimento no sistema de coordenadas imóveis são as chamadas "forças de inércia", que neste caso se resumem à força centrífuga e à força de Coriolis.

6. PROBLEMA DE KEPLER EM COORDENADAS ROTATIVAS

Recorde-se que adimensionalizámos o problema de Kepler fixando uma órbita circular de referência, que convencionámos possuir velocidade angular unitária. Desejamos agora estudar o problema de Kepler num sistema de coordenadas em rotação que acompanhe esta órbita. É imediata da secção anterior a seguinte

Proposição 6.1: *No sistema de coordenadas em rotação acima escolhido, as equações do movimento escrevem-se*

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{x}{r^3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{y}{r^3}$$

e admitem o primeiro integral

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{r}.$$

Com efeito, o potencial V só depende da distância ao centro do sistema de coordenadas, que é independente do referencial.

Passamos a descrever a topologia dos níveis de energia neste novo sistema de coordenadas. A região acessível do espaço das configurações é para cada valor h de H definida pela inequação

$$h + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} \geq 0.$$

A função

$$f(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r}$$

é convexa em \mathbf{R}^+ e possui um mínimo global para $r = 1$. Assim, se

$$h > -\frac{3}{2}$$

todo o espaço das configurações (que continua a ser $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$) é acessível com velocidade necessariamente não nula em cada ponto, e temos a

Proposição 6.2: *Se $2h > -3$ então o nível de energia $H = h$ é um fibrado sobre $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ de fibra típica \mathbf{S}^1 .*

Segue-se, claro está, o

Corolário 6.3: *Se $2h > -3$ então o nível de energia $H = h$ é difeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado o círculo central.*

No toro acima mencionado, o círculo central corresponde ao infinito e a fronteira à singularidade $r = 0$ (ou vice-versa).

Se $2h < -3$, a equação

$$h + \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = 0$$

possui exactamente duas soluções $r_-, r_+ \in \mathbb{R}^+$, com $r_- < r_+$. Os círculos $r = r_{\pm}$ são portanto curvas de velocidade nula, e a região acessível do espaço das configurações é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : r \leq r_- \vee r \geq r_+\}$$

sendo imediato concluir a veracidade da

Proposição 6.4: *Se $2h < -3$ então o nível de energia $H = h$ é homeomorfo à união dos interiores de dois toros sólidos.*

Note-se que estes toros são disjuntos; a fronteira de um deles corresponde à singularidade $r = 0$, enquanto que a fronteira do outro corresponde ao infinito. Em ambos, as curvas de velocidade nula são os círculos centrais.

Resta analisar o caso $2h = -3$. O círculo $r = 1$, que é, neste caso, a (única) curva de velocidade nula, coincide com o conjunto dos pontos críticos da função U ; portanto, este valor de h é um valor crítico da energia, e não devemos esperar que o nível de energia seja uma variedade diferencial (de facto não o é). Facilmente se vê que as regiões do nível de energia definidas por $r \geq 1$ e por $r \leq 1$ são homeomorfas ao interior de um toro sólido, pelo que temos a

Proposição 6.5: *Se $2h = -3$ então o nível de energia $H = h$ é homeomorfo à união dos interiores de dois toros sólidos com os respectivos círculos centrais identificados.*

Repare-se que a curva de velocidade nula $r = 1$ é formada pelos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico definido pelas equações do movimento, que correspondem a órbitas circulares de raio unitário no sistema de coordenadas imóvel.

Passamos à regularização das equações do movimento. Começamos por observar que estas podem ser postas na forma

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = \text{grad}_z U$$

com

$$z = x + iy;$$

$$\lambda = 2i;$$

$$U = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = \frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{|z|}.$$

É portanto natural utilizar a regularização de Levi-Civita, caracterizada pela escolha $f(w) = w^2$. Com esta escolha o potencial regularizado fica

$$|f'|^2 U_h = |2w|^2 \left(\frac{|w^2|^2}{2} + \frac{1}{|w^2|} + h \right) = 2|w|^6 + 4 + 4h|w|^2,$$

pelo que a equação regularizada se escreve na forma

$$w'' + 8i|w|^2 w' = \text{grad}_w (2|w|^6 + 4h|w|^2),$$

possuindo o primeiro integral

$$\frac{1}{2}|w'|^2 = 2|w|^6 + 4 + 4h|w|^2.$$

O potencial regularizado (cujo sinal é o mesmo do potencial corrigido) é estritamente positivo para $2h > -3$. Daí que tenhamos, por analogia com as proposições 4.5 e 4.6, a

Proposição 6.6: *Se $2h > -3$, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao interior de um toro sólido.*

Recorde-se que a curva de colisão corresponde ao círculo central deste toro, e o infinito à sua fronteira.

No caso em que $2h < -3$, o potencial regularizado anula-se nos dois círculos, definidos pela condição

$$|w| = (r_{\pm})^{\frac{1}{2}},$$

sendo negativo na região limitada entre eles. Portanto, a projecção do nível de energia do sistema regularizado no plano w possui duas componentes conexas,

$$\left\{w \in \mathbf{C}: |w| \leq (r_-)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

e

$$\left\{w \in \mathbf{C}: |w| \geq (r_+)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Correspondentemente, o nível de energia regularizado possuirá também duas componente conexas. A primeira é homeomorfa ao conjunto

$$\{(w, w') \in \mathbf{C}^2: |w| \leq 1 \wedge |w'|^2 = 1 - |w|^2\}$$

(sob identificação de pontos antipodais), uma vez que é imediato obter um homeomorfismo entre o nível de energia do sistema regularizado e o conjunto acima a partir de uma homotetia entre os discos

$$\left\{w \in \mathbf{C}: |w| \leq (r_-)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

e

$$\{w \in \mathbf{C}: |w| \leq 1\}.$$

Com efeito, temos o seguinte

Teorema 6.7: *Sejam $A, B \subset \mathbf{R}^2$ dois conjuntos homeomorfos e $f: A \rightarrow B$ um homeomorfismo. Sejam $g: A \rightarrow [0, +\infty[$ e $h: B \rightarrow [0, +\infty[$ duas funções contínuas tais que g e $h \circ f$ têm os mesmos zeros. Então os conjuntos*

$$\tilde{A} = \{(x, y, u, v): (x, y) \in A \wedge u^2 + v^2 = g(x, y)\}$$

e

$$\tilde{B} = \{(x, y, u, v): (x, y) \in B \wedge u^2 + v^2 = h(x, y)\}$$

são homeomorfos.

Dem: Para demonstrar este teorema basta notar que nas condições do enunciado a função $\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ definida por

$$\tilde{f}(x,y,u,v) = \begin{cases} \left(f(x,y), \left(\frac{h \circ f(x,y)}{g(x,y)} \right)^{1/2} u, \left(\frac{h \circ f(x,y)}{g(x,y)} \right)^{1/2} v \right) & \text{se } g(x,y) \neq 0 \\ (f(x,y), 0, 0) & \text{se } g(x,y) = 0 \end{cases}$$

é um homeomorfismo.

A primeira componente conexa do nível de energia regularizado para $2h < -3$ é portanto homeomorfa a \mathbf{P}^3 . As curvas de colisão e de velocidade nula são obviamente análogas às descritas na secção 4.

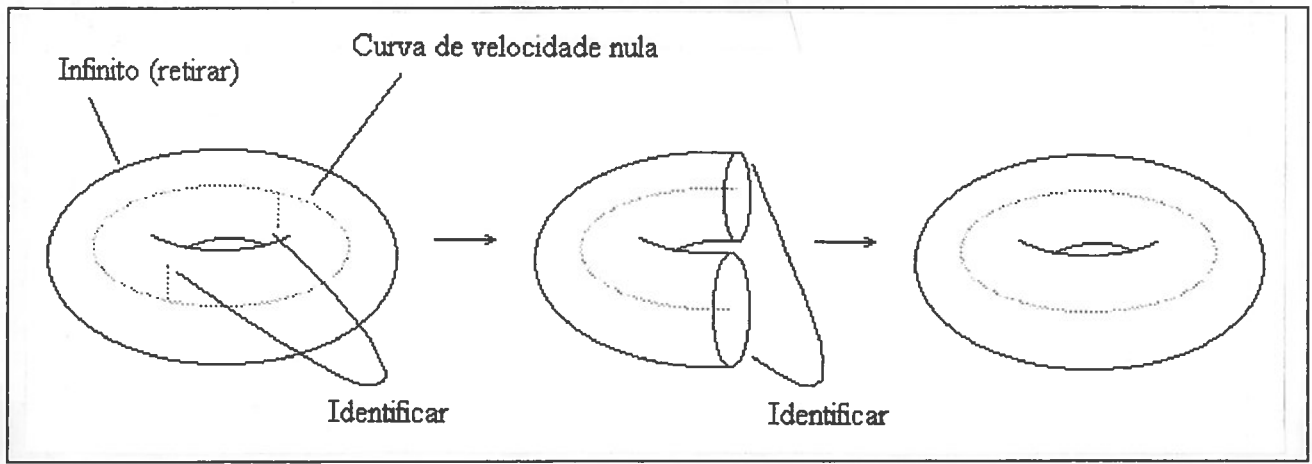


Figura 4. Segunda componente conexa do nível de energia regularizado para o problema de Kepler em coordenadas rotativas ($2h < -3$).

A segunda componente conexa é evidentemente homeomorfa ao interior de um toro sólido em que se devem identificar certos pares de pontos. É fácil ver que o resultado da identificação é de novo um toro sólido em que a curva de velocidade nula é o círculo central. Podemos portanto enunciar a

Proposição 6.8: Se $2h < -3$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à união do espaço projectivo tridimensional \mathbf{P}^3 com o interior de um toro sólido.

Finalmente, no caso em que $2h = -3$ obtemos para nível de energia as duas componentes conexas do caso $2h < -3$ descritas acima com as respectivas curvas de velocidade nula identificadas:

Proposição 6.9: Se $2h = -3$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à união do espaço projectivo tridimensional \mathbf{P}^3 com o interior de um toro sólido, identificando uma curva fechada simples qualquer no primeiro com o círculo central do segundo.

A curva de colisão será neste caso novamente uma curva fechada em P^3 enlaçando a curva de velocidade nula.

7. PROBLEMA RESTRITO DOS TRÊS CORPOS

O problema dos dois corpos consiste no estudo do movimento de duas massas pontuais sujeitas exclusivamente à sua atracção gravitacional mútua. É bem sabido que este problema admite soluções particulares em que ambos os corpos descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa comum. Recordamos aqui rapidamente como é que se pode tirar tal conclusão.

Designando por m e M as massas dos dois corpos, por \mathbf{r} e \mathbf{R} os respectivos vectores posição num referencial inercial e por G a constante de gravitação universal, as equações do movimento do problema dos dois corpos escrevem-se

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{R});$$

$$M\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{GMm}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{r}).$$

É imediato destas equações que o vector $m\mathbf{r} + M\mathbf{R}$ é uma função afim do tempo; escolhendo adequadamente o referencial inercial em que estudamos o movimento podemos então supor $m\mathbf{r} + M\mathbf{R} = \mathbf{0}$ (o referencial inercial em que isto sucede diz-se o **referencial do centro de massa**). Desta condição resulta

$$\mathbf{r} = -\frac{M}{M+m}(\mathbf{R} - \mathbf{r});$$

$$\mathbf{R} = \frac{m}{M+m}(\mathbf{R} - \mathbf{r}),$$

e das equações do movimento é imediato que

$$\ddot{\mathbf{R}} - \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{r}).$$

O vector $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ mantém-se num certo plano em virtude da conservação do vector $(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \wedge (\dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{r}})$, que facilmente se deduz da equação acima; portanto, o vector $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ satisfaz as equações do movimento do problema de Kepler com $k = G(M+m)$. Existem então soluções particulares em que o vector $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ descreve uma trajectória circular com velocidade angular constante, pelo que as massas M e m descrevem igualmente órbitas circulares em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular. Fixando uma destas órbitas, tomando a distância (constante) entre as duas massas para unidade de comprimento e o inverso da sua velocidade angular para unidade de tempo, adimensionalizamos o problema e passamos a ter

$$k = GM + Gm = 1.$$

Consideramos agora o sistema de coordenadas em rotação no qual as duas massas se mantêm fixas no eixo das abcissas. Pondo $Gm = \mu$, elas situar-se-ão, por exemplo, nos pontos $(\mu, 0)$ e $(\mu - 1, 0)$ neste novo sistema de coordenadas. O problema restrito dos três corpos consiste então no estudo, neste referencial, do movimento de uma partícula de massa nula, i.e., de uma partícula que é atraída pelos dois corpos (que se dizem os **primários**) mas que não perturba o movimento destes. Tendo em atenção os resultados da secção 5, podemos então introduzir a

Definição 7.1 (Problema restrito dos três corpos): *O problema restrito dos três corpos é o problema mecânico definido pela função de Lagrange*
 $L: \mathbb{R}^2 \setminus \{(\mu, 0), (\mu - 1, 0)\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

onde

$$r_1 = \left((x - \mu)^2 + y^2\right)^{1/2};$$

$$r_2 = \left((x - \mu + 1)^2 + y^2\right)^{1/2}.$$

As equações do movimento são portanto

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{r_2^3},$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}.$$

Note-se que este problema se reduz ao problema de Kepler em coordenadas rotativas (que já analisámos) se $\mu = 0$. Supomos portanto $\mu > 0$. Podemos além disso supor, sem perda de generalidade, que $\mu \leq 1/2$, porque os problemas correspondentes aos parâmetros μ e $1 - \mu$ diferem por uma mera rotação do sistema de coordenadas. Por ser excepcional, mas de fácil análise a partir dos restantes casos, excluiremos ainda do nosso estudo o caso em que $\mu = 1/2$.

Repare-se que é no sistema de coordenadas em rotação, e não no sistema de coordenadas inercial, que a função de Lagrange é independente do tempo. Temos portanto a

Proposição 7.2: *O problema restrito dos três corpos admite o primeiro integral*

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

Este primeiro integral é conhecido como o **integral de Jacobi**. Como foi visto na secção 5, o integral de Jacobi não é a energia (função de Hamilton) E da partícula calculada no referencial do centro de massa, mas sim $E - L$, onde L é o momento angular da partícula neste referencial. Este facto tem diversas aplicações práticas, a mais famosa das quais é o chamado **critério de Tisserand** para a identificação de cometas. Este tem em atenção o facto de que o movimento de um cometa em torno do Sol é bem descrito pelo problema de Kepler excepto quando o primeiro passa nas proximidades de um planeta (normalmente Júpiter). Daí que, muitas vezes, cometas observados em órbitas diferentes são na realidade o mesmo cometa antes e depois de uma passagem nas proximidades de Júpiter. Como o sistema Sol-Júpiter-cometa é muitas vezes bem modelado pelo problema restrito dos três corpos, um critério útil para decidir se as duas observações correspondem ou não ao mesmo cometa é a comparação da quantidade $E - L$ em ambas as órbitas. Note-se que tanto E como L são conservados no problema de Kepler.

O integral de Jacobi é o único primeiro integral conhecido para o problema restrito dos três corpos. Acerca da questão da integrabilidade deste problema existe o seguinte

Teorema 7.3 (Siegel, 1936): *Qualquer primeiro integral do problema restrito dos três corpos, algébrico nas variáveis (x, y, \dot{x}, \dot{y}) , é da forma $\phi(H(x, y, \dot{x}, \dot{y})) = 0$, onde ϕ é uma função algébrica.*

8. NÍVEIS DE ENERGIA PARA O PROBLEMA RESTRITO

Passamos à análise da topologia dos níveis de energia para o problema restrito dos três corpos. Recorde-se que estamos a supor $\mu \in]0, 1/2[$.

Começamos, como habitualmente, por estudar as regiões do espaço das configurações acessíveis ao movimento para $H = h$. Uma vez que

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + H$$

estas são dadas pela inequação

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \geq -h.$$

Interessa portanto estudar a função $\Omega: \mathbf{R}^2 \setminus \{(\mu, 0), (\mu-1, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Para tal, começamos por reescrever esta função de uma forma mais simétrica: notando que

$$\begin{aligned} (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 &= (1-\mu)((x-\mu)^2 + y^2) + \mu((x-\mu+1)^2 + y^2) = \\ &= x^2 + y^2 + (1-\mu)\mu^2 + \mu(1-\mu)^2 = x^2 + y^2 + \mu(1-\mu), \end{aligned}$$

podemos então escrever

$$\Omega(x, y) = (1-\mu)\left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1}\right) + \mu\left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

É ainda conveniente notar que, por exemplo,

$$(r_1 - 1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} - \frac{3}{2},$$

pelo que

$$\Omega(x, y) = (1-\mu)(r_1 - 1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_1}\right) + \mu(r_2 - 1)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

Escrita a função desta forma, é imediato concluir a

Proposição 8.1: *A função Ω satisfaz a desigualdade*

$$\Omega(x, y) \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)$$

para (x, y) no espaço das configurações, e tem-se

$$\Omega(x, y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)$$

exactamente nos dois pontos L_4 e L_5 do espaço das configurações que satisfazem as condições $r_1(L_4) = r_2(L_4) = r_1(L_5) = r_2(L_5) = 1$.

Portanto a função Ω possui exactamente dois pontos de mínimo global, cada um dos quais forma, juntamente com os dois primários, um triângulo equilátero.

Definição 8.2 (Pontos Lagrangeanos): *Os pontos L_4 e L_5 dizem-se os pontos Lagrangeanos associados ao problema restrito dos três corpos.*

Necessitaremos conhecer os pontos críticos de Ω . Para tal, devemos resolver as equações

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{r_2^3} = 0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow y \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0$$

Da segunda equação resulta que

$$1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \vee y = 0.$$

A verificar-se a primeira hipótese, resulta da primeira equação que

$$x - \left(1 - \frac{\mu}{r_2^3} \right) (x - \mu) - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{r_2^3} = 0 \Leftrightarrow \mu - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \Leftrightarrow r_2 = 1,$$

pelo que a segunda equação fica

$$1 - \mu - \frac{1 - \mu}{r_1^3} = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1$$

e os pontos críticos que obtemos são precisamente os pontos Lagrangeanos.

A verificar-se a segunda hipótese, obtemos os restantes pontos críticos, que são pontos de ordenada nula e abcissa satisfazendo a equação

$$x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{|x - \mu|^3} - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{|x - \mu + 1|^3} = 0.$$

Após cálculos bastante trabalhosos, é possível demonstrar a seguinte

Proposição 8.3: *A equação acima possui exactamente três soluções reais, x_1 , x_2 e x_3 , satisfazendo $x_1 < \mu - 1 < x_2 < \mu < x_3$. Os correspondentes pontos críticos de Ω , L_1 , L_2 e L_3 satisfazem $\Omega(L_3) < \Omega(L_1) < \Omega(L_2)$. Estes pontos são pontos de sela; os eixos principais da matriz Hessiana de Ω nestes pontos são paralelos aos eixos coordenados, sendo os eixos paralelos ao eixo das abcissas correspondentes a valores próprios positivos e os eixos paralelos ao eixo das ordenadas correspondentes aos valores próprios negativos.*

Definição 8.4 (Pontos Eulerianos): *Os pontos L_1 , L_2 e L_3 dizem-se os pontos Eulerianos associados ao problema restrito dos três corpos.*

É quase uma consequência imediata da proposição 8.3 a

Proposição 8.5: *A função real de variável real $\Omega(x, 0)$ é convexa em cada um dos intervalos $]-\infty, \mu - 1[$, $]\mu - 1, \mu[$ e $]\mu, +\infty[$, e possui mínimos globais nestes intervalos em cada um dos pontos Eulerianos.*

Terminamos o nosso estudo da função Ω com a seguinte proposição (óbvia!):

Proposição 8.6: *A função Ω satisfaz $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Omega = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \Omega = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \Omega = +\infty$.*

Estamos agora em condições de determinar as regiões acessíveis do espaço das configurações para cada valor da energia. Do estudo acima é bem claro que para $h < -\Omega(L_2)$, a região acessível é composta de duas ovas em torno de cada um dos primários e da região exterior a uma oval envolvendo os dois primários. Quando $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, as duas ovas interiores unem-se por L_2 , e fazendo $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$ a região interior une-se à região exterior através de L_1 . Para

$-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, forma-se uma nova ligação através de L_3 , tornando a região inacessível desconexa. Por fim, é óbvio que se $h > -\Omega(L_4)$ todo o espaço das configurações é acessível ao movimento. Note-se que a fronteira das regiões acessíveis (sem contar com os primários) é formada por curvas de velocidade nula.

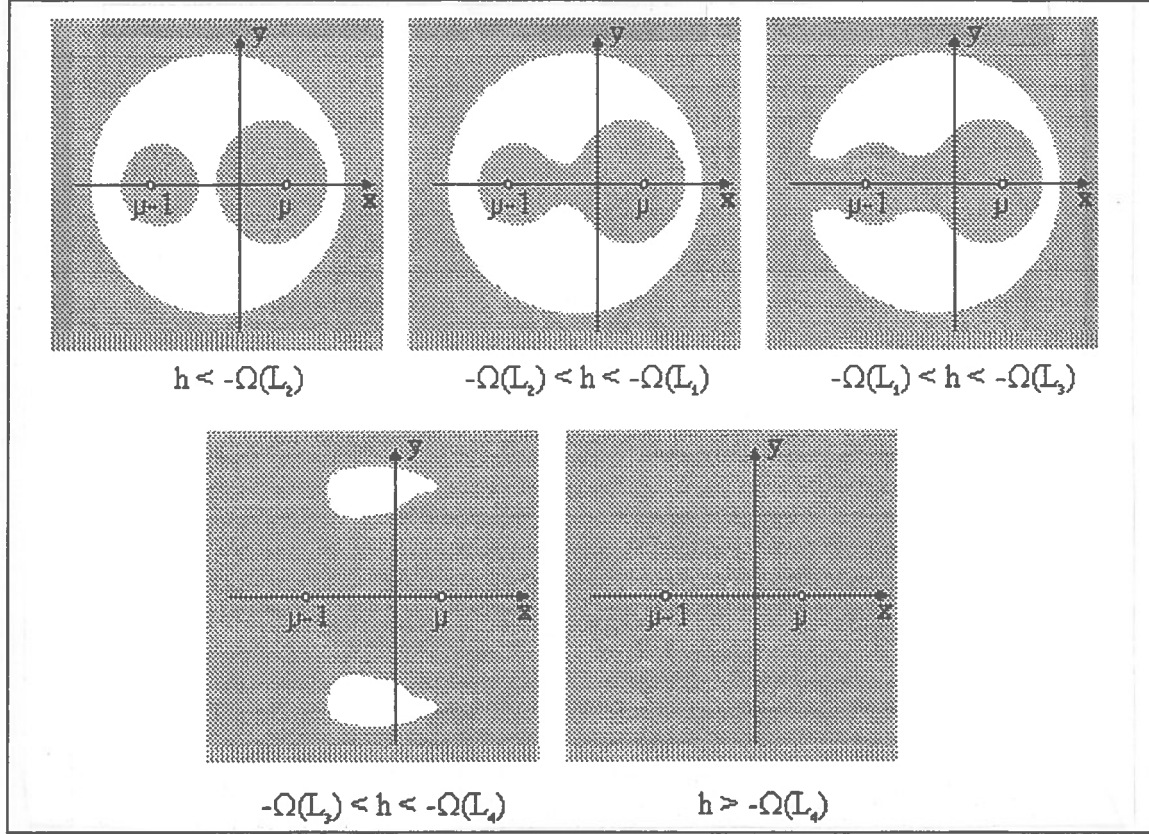


Figura 5. Regiões acessíveis do espaço das configurações para o problema restrito dos três corpos.

Do facto de que cada nível de energia é definido por

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \Omega(x, y) + h$$

e por analogia com os resultados das secções 2 e 6 podemos deduzir imediatamente a

Proposição 8.7: Se $h < -\Omega(L_2)$, o nível de energia é homeomorfo à união dos interiores de três toros sólidos.

Mais uma vez os círculos centrais destes toros são as curvas de velocidade nula. As fronteiras de dois dos toros correspondem às colisões com cada um dos primários, enquanto que a fronteira do terceiro corresponde ao infinito.

Para estudarmos a topologia do nível de energia $H = h$ com $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, notamos que este será composto por duas componentes conexas, correspondentes às duas componentes conexas da região acessível do espaço das configurações correspondente. A componente correspondente à região exterior é análoga à do caso anterior, sendo portanto homeomorfa ao interior de um toro, cujo círculo central é a curva de velocidade nula e cuja fronteira corresponde ao infinito. A componente correspondente à região interior requer uma análise mais detalhada.

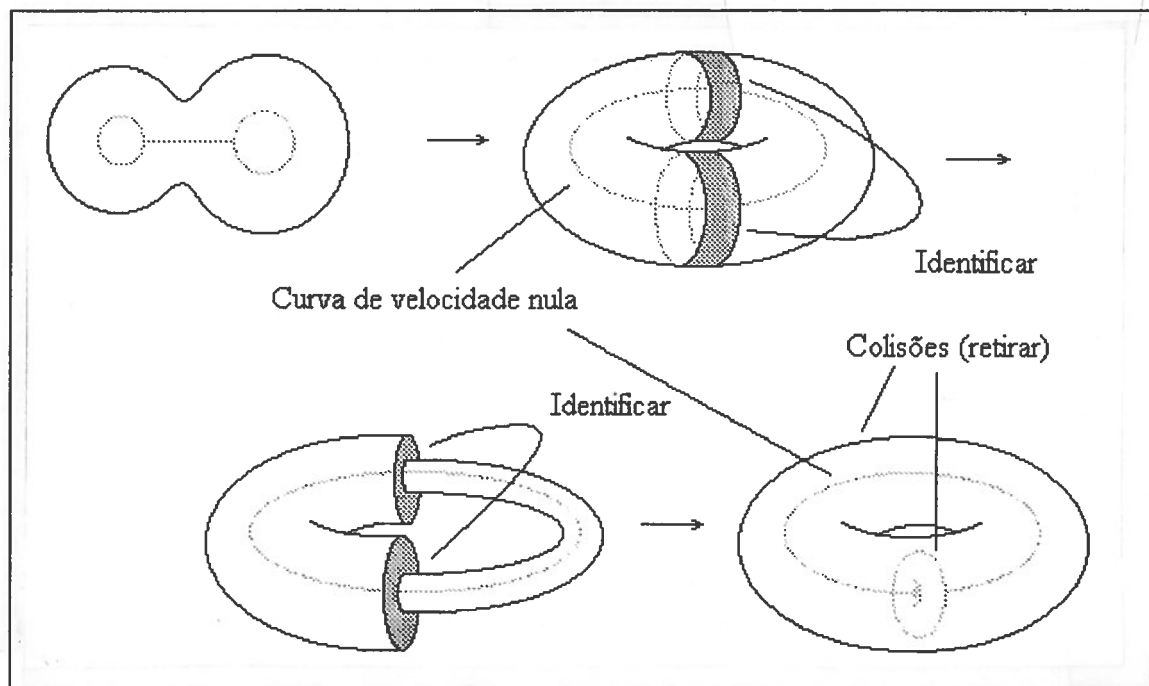


Figura 6. Segunda componente conexa para o nível de energia para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$).

Começamos por observar que a componente interior da região acessível é homeomorfa a ela própria retirando-lhe duas pequenas vizinhanças circulares fechadas em torno dos primários. Este homeomorfismo é obviamente extensível à correspondente componente do nível de energia, que é portanto homeomorfo a si próprio excepto a imagem inversa (pela projecção natural) destas duas vizinhanças. Imaginemos agora o segmento do eixo das abcissas unindo as duas vizinhanças. Se retirarmos este segmento de recta à região acessível sem as duas vizinhanças, a componente em causa do nível de energia fica homeomorfa ao interior de um toro sólido, com o círculo central como curva de velocidade nula. Incluir o segmento é incluir dois troços da fronteira do toro sólido, que devem ser identificados. É razoavelmente simples ver que tal é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado um pequeno toro sólido em torno do seu círculo central. Note-se que o círculo central corresponde à curva de velocidade nula, a fronteira do toro "grande" à colisão com um dos primários e a fronteira do toro "pequeno" à colisão com o outro primário. Em resumo, temos portanto a

Proposição 8.8: Se $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, o nível de energia é homeomorfo à união do interior de um toro sólido com o interior de um toro sólido ao qual foi retirado um pequeno toro sólido em torno do círculo central.

Se $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$, a região acessível do espaço das configurações (e consequentemente o nível de energia) torna-se conexa. Esta região é claramente homeomorfa ao complementar de uma bola aberta excepto dois pontos (correspondendo aos primários). Como já foi visto, retirar estes pontos equivale a retirar duas pequenas bolas fechadas contendo os primários; por outro lado, é também claro que se pode supor a região acessível limitada (porque \mathbb{R}^2 é homeomorfo a uma bola aberta). Concluimos portanto que a região acessível é homeomorfa a uma bola aberta à qual foram retiradas uma pequena bola aberta (correspondente à região inacessível) e duas pequenas bolas fechadas (correspondentes aos primários). Este homeomorfismo, claro está, estende-se ao nível de energia.

Para determinarmos a topologia do nível de energia imaginamos novamente segmentos de recta unindo as bolas fechadas à fronteira exterior da região acessível. Se retirarmos estes segmentos à região acessível, a porção restante do nível de energia fica homeomorfa ao interior de um toro sólido, com o círculo central correspondendo à curva de velocidade nula. Introduzir estes segmentos na região acessível equivale a acrescentar ao toro sólido quatro troços de fronteira que devem ser identificados dois a dois (não alternadamente). Temos assim a

Proposição 8.9: Se $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$, o nível de energia é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foram retirados dois pequenos toros sólidos em torno do círculo central.

A fronteira do toro "grande" corresponde ao infinito enquanto que as fronteiras dos toros "pequenos" às colisões com os primários.

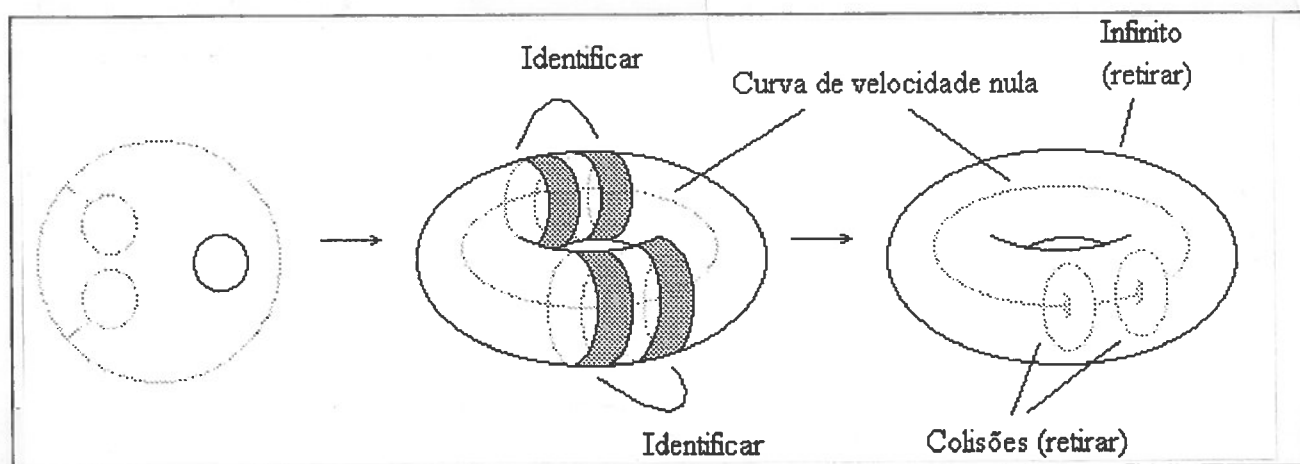


Figura 7. Nível de energia para o problema restrito dos três corpos $(-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3))$.

Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, a região acessível do espaço das configurações mantém-se conexa, mas a região inacessível torna-se desconexa. A região acessível é portanto homeomorfa a uma bola aberta à qual foram retiradas duas pequenas bolas abertas (correspondentes à região inacessível) e duas pequenas bolas fechadas (correspondentes aos primários). Mais uma vez este homeomorfismo se estende ao nível de energia.

A topologia do nível de energia pode ser encontrada imaginando um segmento de recta seccionando a região acessível em duas componentes simétricas. Se retirarmos ao nível de energia a imagem inversa, pela projecção natural, deste segmento, é claro do que foi feito para trás que obtemos os interiores de dois toros sólidos a cada um dos quais foi retirado um pequeno toro sólido em torno do respectivo círculo central. Incluir o segmento na região acessível corresponde a incluir troços da fronteira de ambos os toros "grandes", que devem ser identificados.

Para exprimir esta topologia de uma forma mais elegante, observamos que uma bola fechada em \mathbb{R}^2 é homeomorfa a uma coroa circular fechada com os pontos da fronteira exterior simétricos em relação a um diâmetro identificados. Imaginando este círculo a rodar em torno de um eixo, gerando assim um toro sólido, temos a

Proposição 8.10: *O interior de um toro sólido é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado um toro sólido fechado ampliando o círculo central, com os pontos da fronteira exterior simétricos em relação ao plano que contém o círculo central identificados.*

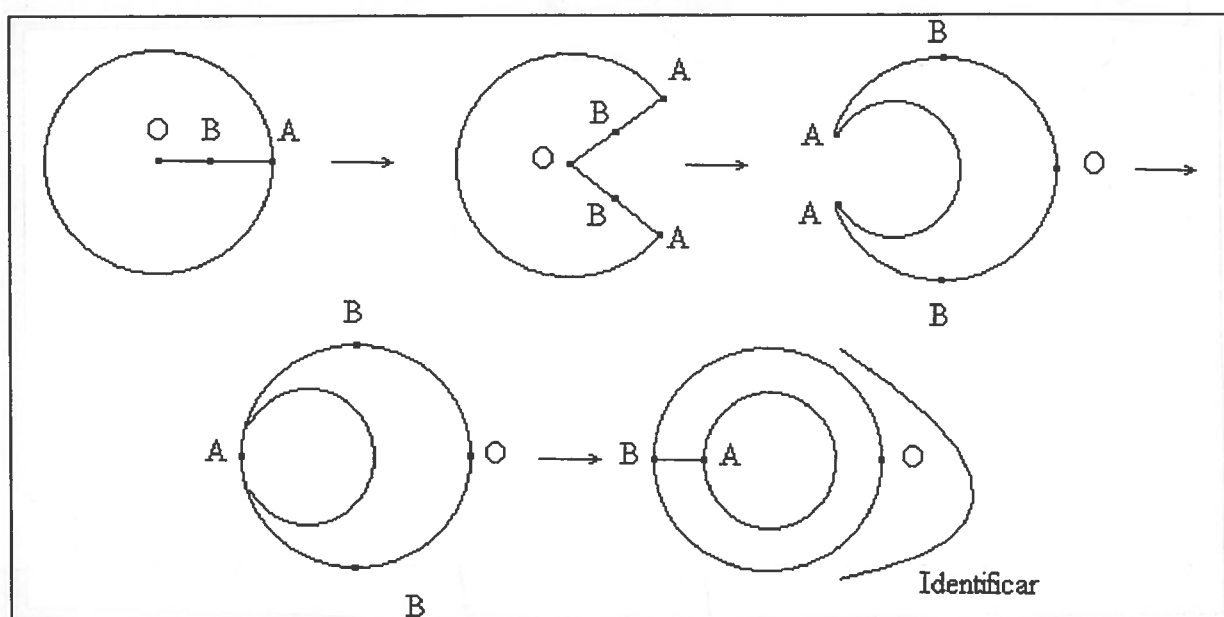


Figura 8. Homeomorfismo entre uma bola fechada em \mathbb{R}^2 e uma coroa circular fechada com pontos da fronteira exterior identificados.

Podemos então aplicar o homeomorfismo acima a um dos toros sólidos que compõem o nível de energia e imaginar o outro toro sólido no interior deste, unindo os

troços da fronteira a identificar. Não é difícil ver que a região compreendida entre os dois toros fica ela própria homeomorfa a um toro sólido, o que nos permite enunciar a

Proposição 8.11: *Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, o nível de energia é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foram retirados três pequenos toros sólidos, com os pontos da fronteira exterior simétricos em relação ao plano do círculo central identificados.*

A fronteira de um dos toros "pequenos" corresponde ao infinito enquanto que as fronteiras dos dois toros "pequenos" restantes às colisões com os primários. Existem duas curvas de velocidade nula (disjuntas), cada qual envolvida pelo seu toro "pequeno" (correspondendo à colisão) e por nenhum outro. A fronteira do toro grande não possui qualquer significado, sendo composta por pontos interiores ao toro original.

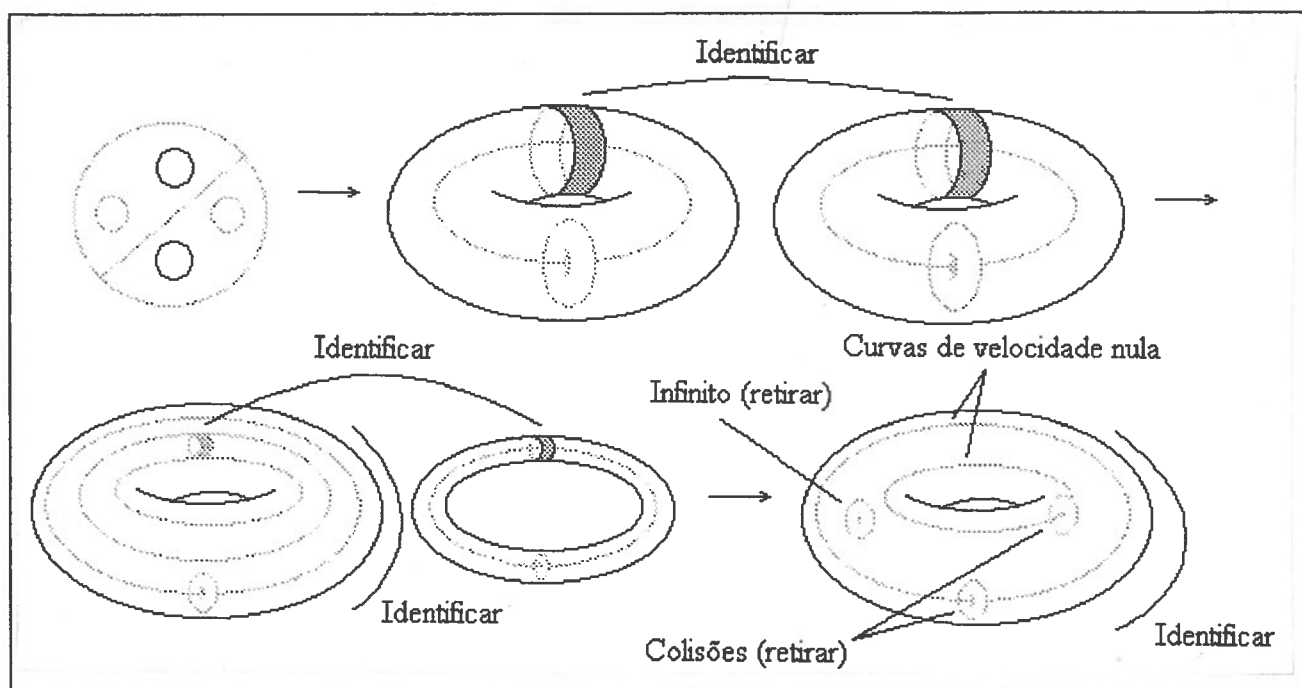


Figura 9. *Nível de energia para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$).*

Resta analisar o caso em que $h > -\Omega(L_4)$. Este caso é bastante simples: a região acessível do espaço das configurações é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\mu, 0), (\mu - 1, 0)\}$, que é obviamente homeomorfo a uma bola aberta à qual foram retiradas duas pequenas bolas fechadas (correspondendo aos primários). Por analogia com a proposição 8.8 obtemos a

Proposição 8.12: *Se $h > -\Omega(L_4)$, o nível de energia é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foram retirados o círculo central e um pequeno toro sólido em torno do círculo central.*

As fronteiras de ambos os toros correspondem, claro está, às colisões com os primários.

9. REGULARIZAÇÃO DE LEVI-CIVITA DO PROBLEMA RESTRITO

Começamos por observar que o problema restrito pode ser escrito na forma

$$\ddot{z} + \lambda \dot{z} = \text{grad}_z U$$

com

$$z = x + iy;$$

$$\lambda = 2i;$$

$$U = \Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{|z|^2}{2} + \frac{1-\mu}{|z-\mu|} + \frac{\mu}{|z-\mu+1|}.$$

Para regularizar uma das singularidades é natural considerar novamente a regularização de Levi-Civita, escolhendo por exemplo $f(w) = w^2 + \mu$. Com esta escolha o potencial regularizado escreve-se

$$|f'|^2 U_h = |2w|^2 \left(\frac{|w^2|^2}{2} + \frac{1-\mu}{|w^2|} + \frac{\mu}{|w^2+1|} + h \right) = 2|w|^6 + 4(1-\mu) + \frac{4\mu|w|^2}{|w^2+1|} + 4h|w|^2,$$

pelo que a singularidade correspondente ao primário $(\mu, 0)$ é removida.

As equações do movimento regularizadas são

$$w'' + 8i|w|^2 w' = \text{grad}_w \left(2|w|^6 + \frac{4\mu|w|^2}{|w^2+1|} + 4h|w|^2 \right)$$

e possuem o primeiro integral

$$\frac{1}{2}|w'|^2 = 2|w|^6 + 4(1-\mu) + \frac{4\mu|w|^2}{|w^2+1|} + 4h|w|^2.$$

Note-se que temos uma aplicação entre os níveis de energia dos problemas regularizado e não regularizado dada por

$$(w, w') \mapsto (z, \dot{z}) = (f, f' w' \dot{\tau}) = \left(w^2 + \mu, \frac{w'}{2\bar{w}} \right).$$

Portanto, o nível de energia regularizado obtém-se do nível de energia do problema regularizado identificando os pontos simétricos. É claro que a correspondência acima define uma aplicação injectiva entre os níveis de energia não regularizado e regularizado, que é um homeomorfismo entre todas as componentes conexas do nível de energia cuja projecção no espaço das configurações não intersecte uma vizinhança do primário $(\mu, 0)$. Deste facto e por analogia com os resultados da secção 6 podemos enunciar imediatamente a

Proposição 9.1: *Se $h < -\Omega(L_2)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à união do espaço projectivo tridimensional \mathbf{P}^3 com os interiores de dois toros sólidos.*

Para que fique claro, os círculos centrais de ambos os toros correspondem a curvas de velocidade nula; a fronteira de um deles corresponde à colisão com o primário não regularizado e a fronteira do outro ao infinito. No plano projectivo a curva de velocidade nula e a curva de colisão são representadas por duas curvas fechadas simples enlaçadas; retirando a curva de colisão recuperamos o interior de toro sólido do nível de energia não regularizado.

Se $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, notamos que a região acessível ao movimento no espaço das configurações do problema regularizado possui duas componentes conexas, uma das quais (a interior) é homeomorfa a uma bola fechada à qual foram retiradas duas pequenas bolas fechadas simétricas relativamente à origem (e que correspondem ao primário não regularizado). Daqui se conclui que a correspondente componente conexa do nível de energia para o problema regularizado é homeomorfa ao conjunto

$$\{(w, w') \in \mathbf{C}^2 : |w| \leq 1 \wedge |w - 1/2| > 1/4 \wedge |w + 1/2| > 1/4 \wedge |w'|^2 = 1 - |w|^2\}$$

Identificando os pontos antipodais deste conjunto obtemos um subconjunto do espaço projectivo tridimensional \mathbf{P}^3 , que pode ser representado pelo conjunto

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge (x - 1/2)^2 + y^2 > 1/16 \wedge (x + 1/2)^2 + y^2 > 1/16\}$$

com os pontos antipodais de norma unitária identificados. É claro que este conjunto não é mais que \mathbf{P}^3 excepto um toro sólido; é fácil ver que a curva de velocidade nula (representada pelo equador no conjunto acima) enlaça simultaneamente este toro (que corresponde à colisão com o primário não regularizado) e a curva de colisão (representada no conjunto acima pelo eixo polar). Podemos portanto concluir a

Proposição 9.2: *Se $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, o nível de energia regularizado é*

homeomorfo à união do espaço projectivo tridimensional \mathbb{P}^3 , ao qual foi retirado um toro sólido, com o interior de um toro sólido.

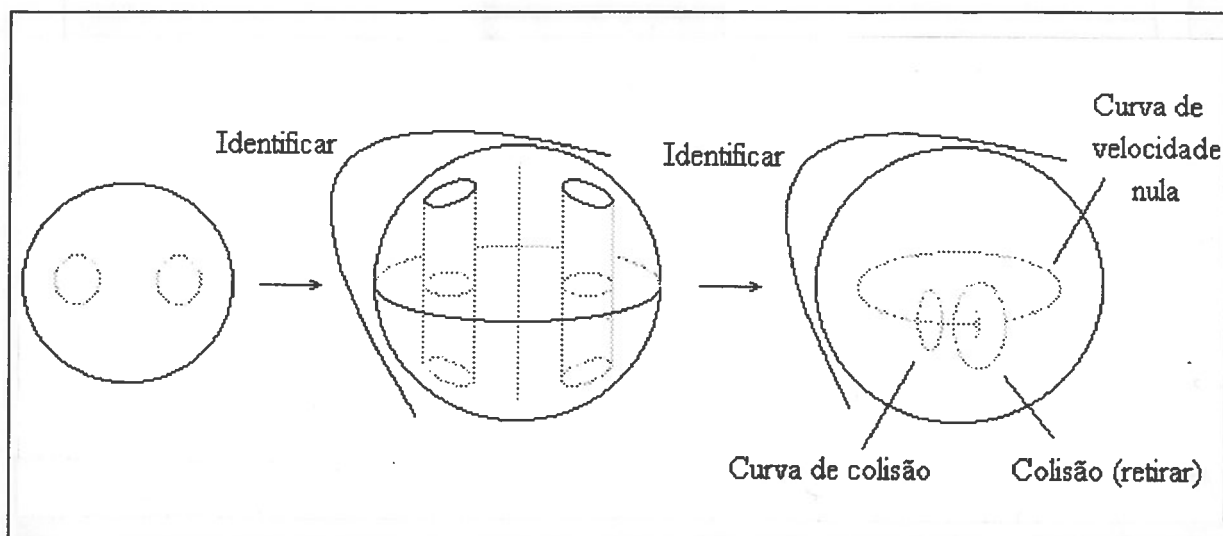


Figura 10. Primeira componente conexa do nível de energia regularizado (Levi-Civita) para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$).

Prosseguimos analisando o caso em que $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$. Neste caso a região acessível no espaço de configurações do problema não regularizado é homeomorfa a uma bola aberta à qual foi retirada uma bola aberta (correspondendo à região inacessível) e duas bolas fechadas (correspondendo aos primários); a fronteira exterior da bola aberta corresponde obviamente ao infinito. Aplicando uma inversão, é simples ver que esta região é ainda homeomorfa a uma bola fechada (cuja fronteira exterior é precisamente a curva de velocidade nula) à qual foram retiradas três bolas fechadas (duas correspondendo aos primários e uma ao infinito). Daí que a região acessível no espaço das configurações do problema regularizado seja homeomorfa a uma bola fechada à qual foram retiradas quatro bolas fechadas, dispostas simetricamente em relação à origem duas a duas (um dos pares correspondendo ao infinito e o outro ao primário não regularizado). Por analogia com a proposição 9.2 é então imediato concluir a

Proposição 9.3: Se $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao espaço projectivo tridimensional \mathbb{P}^3 ao qual foram retirados dois toros sólidos.

Como anteriormente, a curva de velocidade nula enlaça simultaneamente os dois toros (que correspondem ao infinito e à colisão com o primário não regularizado) e a curva de colisão.

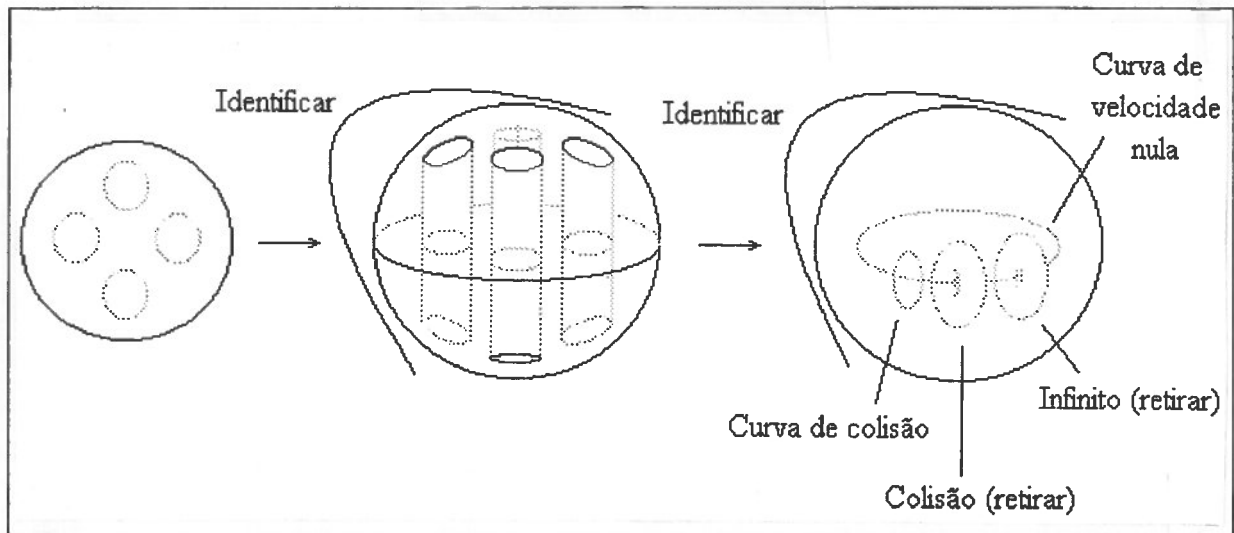


Figura 11. *Nível de energia regularizado (Levi-Civita) para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$).*

Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, a topologia complica-se ainda mais em virtude do facto da região inacessível se tornar desconexa. Neste caso, a região acessível do espaço de configurações do problema não regularizado é homeomorfa a uma bola aberta à qual foram retiradas duas bolas abertas (correspondendo à região inacessível) e duas bolas fechadas (correspondendo aos primários); a fronteira exterior da bola aberta corresponde, claro está, ao infinito. Procedendo como no caso anterior, é simples ver que esta região é ainda homeomorfa a uma bola fechada (cuja fronteira exterior é uma das curvas de velocidade nula) à qual foram retiradas três bolas fechadas (duas correspondendo aos primários e uma ao infinito) e uma bola aberta (correspondendo à outra componente da região inacessível). Daí que a região acessível no espaço das configurações do problema regularizado seja homeomorfa a uma bola fechada à qual foram retiradas quatro bolas fechadas e duas bolas abertas, dispostas simetricamente duas a duas relativamente à origem (os diferentes pares correspondendo respectivamente ao infinito, ao primário não regularizado e a uma das componentes da região inacessível). Uma vez que o nível de energia regularizado se obtém do nível de energia do problema regularizado por identificação antipodal, basta-nos considerar sobre cada ponto da região acessível no problema regularizado (excepto os pontos das curvas de velocidade nula) apenas um hemicírculo (em vez de S^1). A partir daqui e tendo em conta as identificações a fazer não é muito difícil obter a

Proposição 9.4: *Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo a um bitoro, com os pontos antipodais da fronteira identificados, ao qual foram retirados dois toros sólidos.*

Estes toros corresponderão ao infinito e ao primário não regularizado. As intersecções da fronteira do bitoro com o seu plano de simetria corresponderão

obviamente às curvas de velocidade nula (note-se que as duas curvas interiores são na realidade a mesma) e a intersecção do bitoro com o seu eixo de simetria perpendicular ao plano de simetria corresponderá à curva de colisão (que, claro está, é uma curva fechada).

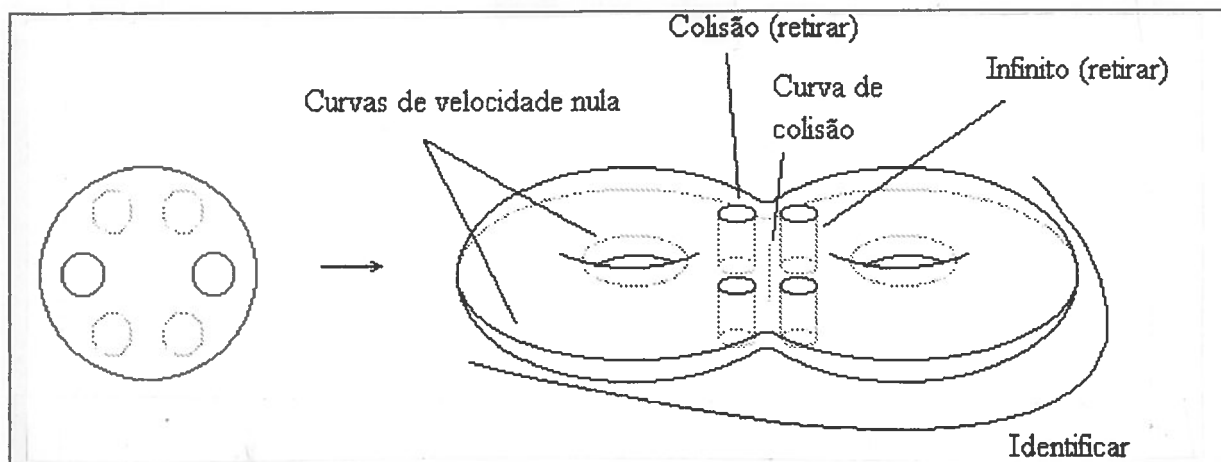


Figura 12. *Nível de energia regularizado (Levi-Civita) para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$).*

Postas as coisas desta forma, não é fácil ver que o nível de energia regularizado sem a curva de colisão é homeomorfo ao nível de energia não regularizado. Tal é no entanto óbvio se apresentarmos a topologia de uma outra forma (não tão elegante), cuja determinação passamos a descrever.

Começamos por observar que se retirarmos ao nível de energia regularizado a porção correspondente, no espaço das configurações do problema regularizado, a uma pequena faixa em torno do eixo real, obtemos, de acordo com o foi visto na secção 8, os interiores de dois toros sólidos (um dos quais sem um toro sólido, correspondente ao primário não identificado) com uma porção da fronteira identificada. Os círculos centrais destes toros são as curvas de velocidade nula.

A faixa que retirámos corresponde a uma porção do nível de energia regularizado que é homeomorfa ao conjunto

$$\{(w, w') \in \mathbb{C}^2 : |w| \leq 1/2 \wedge |w'|^2 = 1 - |w|^2\}$$

sob identificação antipodal; é fácil ver que isto não é mais que o espaço projectivo sem um toro sólido. Ao juntarmos as duas porções, devemos identificar uma faixa da fronteira deste toro com uma faixa da fronteira de um dos toros da outra porção (aquele ao qual não foi retirado um pequeno toro sólido, por exemplo). Obtemos assim a

Proposição 9.5: *Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao espaço projectivo tridimensional \mathbb{P}^3 ao qual foi retirado um pequeno*

toro sólido, e ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado um pequeno toro sólido, identificando faixas das fronteiras dos dois primeiros toros.

No plano projectivo a curva de velocidade nula enlaça simultâneamente a curva de colisão e o toro retirado (que corresponde ao infinito); no toro (cuja fronteira corresponde também ao infinito), a curva de colisão (que corresponde ao seu círculo central) enlaça o toro retirado (que corresponde ao primário não regularizado).

Se nos imaginarmos agora a retirar a curva de colisão e recordarmos que num toro ao qual foi retirado um toro é possível inverter os papéis dos dois toros através de um homeomorfismo, é agora claro como recuperar o nível de energia não regularizado.

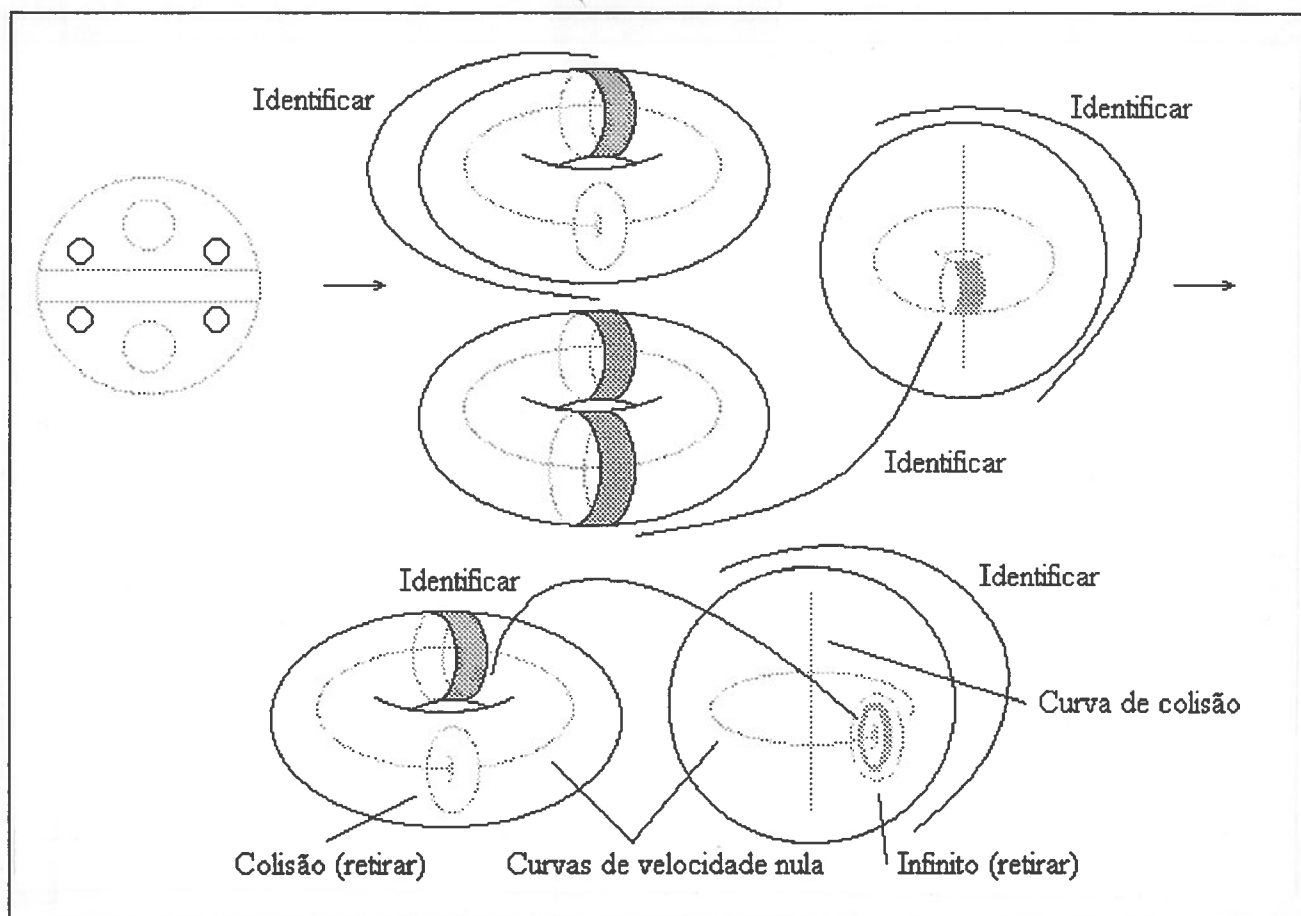


Figura 13. Outra representação do nível de energia regularizado (Levi-Civita) para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$).

Resta o caso $h > -\Omega(L_4)$, que não oferece qualquer dificuldade. Tendo em atenção que o espaço projectivo sem um círculo é homeomorfo ao interior de um toro sólido, é imediata a

Proposição 9.6: *Se $h > -\Omega(L_4)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo ao interior de um toro sólido ao qual foi retirado um pequeno toro sólido.*

A fronteira do toro "grande" corresponderá ao infinito, e a fronteira do toro "pequeno" ao primário não regularizado.

10. REGULARIZAÇÃO DE BIRKHOFF DO PROBLEMA RESTRITO

A regularização de Birkhoff permite-nos regularizar os dois primários simultaneamente. A ideia é utilizar uma transformação $z = f(w)$ tal que

$$\frac{z - \mu}{z - \mu + 1} = \left(\frac{w - \mu}{w - \mu + 1} \right)^2$$

uma vez que tal transformação terá os primários como pontos fixos e reduzir-se-á localmente (em torno dos primários e a menos de constantes) à regularização de Levi-Civita.

Da equação acima resulta

$$(z - \mu) \left[1 - \left(\frac{w - \mu}{w - \mu + 1} \right)^2 \right] = \left(\frac{w - \mu}{w - \mu + 1} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - \mu) [(w - \mu + 1)^2 - (w - \mu)^2] = (w - \mu)^2 \Leftrightarrow z - \mu = \frac{(w - \mu)^2}{2w - 2\mu + 1},$$

donde obtemos portanto a

Definição 10.1 (Regularização de Birkhoff): *A regularização de Birkhoff do problema restrito dos três corpos corresponde à escolha*

$$f(w) = \mu + \frac{(w - \mu)^2}{2w - 2\mu + 1}.$$

Analogamente ao que se fez (ou directamente da equação acima), é simples concluir que se tem também

$$z - \mu + 1 = \frac{(w - \mu + 1)^2}{2w - 2\mu + 1}.$$

Uma vez que

$$f'(w) = \frac{2(w - \mu)(2w - 2\mu + 1) - 2(w - \mu)^2}{(2w - 2\mu + 1)^2} = \frac{(w - \mu)(w - \mu + 1)}{(2w - 2\mu + 1)^2}$$

tem-se

$$|f'(w)|^2 = 4 \left| \frac{(w - \mu)^2}{(2w - 2\mu + 1)} \frac{(w - \mu + 1)^2}{(2w - 2\mu + 1)} \frac{1}{(2w - 2\mu + 1)^2} \right| =$$

$$= |z - \mu| |z - \mu + 1| \frac{1}{|w - \mu + 1/2|^2}$$

pelo que as singularidades correspondentes aos primários no potencial corrigido são removidas. Surge uma nova singularidade, que corresponde a

$$2w - 2\mu + 1 = 0$$

ou seja, a

$$z = \infty.$$

Para facilitar a análise da transformação $z = z(w)$, introduzimos as novas variáveis

$$q = z - \mu + 1/2$$

e

$$\omega = w - \mu + 1/2.$$

Estas novas variáveis diferem das anteriores por meras translações, pelo que os níveis de energia nestas variáveis diferem dos níveis de energia nas variáveis anteriores também por translações (sendo portanto homeomorfos). A razão da introdução destas variáveis é a simplificação que ocorre na correspondente expressão de f :

$$q - 1/2 = \frac{(\omega - 1/2)^2}{2\omega} \Leftrightarrow q = \frac{1}{2\omega} (\omega + \omega^2 - \omega + 1/4) = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{8\omega}.$$

Temos portanto

$$\omega^2 - 2q\omega + 1/4 = 0$$

donde facilmente se conclui que a cada valor de q correspondem dois valores de ω , excepto se

$$q^2 - 1/4 = 0 \Leftrightarrow q = \pm 1/2.$$

Estes valores de q correspondem aos dois primários, e é fácil ver que

$$q = \pm 1/2 \Rightarrow \omega = \pm 1/2,$$

o que mostra que os primários são de facto pontos fixos de f . Nos restantes pontos, cada valor de q é imagem por f de dois pontos, ω_1 e ω_2 , os quais satisfazem

$$\omega_1 + \omega_2 = 2q$$

e

$$\omega_1 \omega_2 = 1/4,$$

ou seja: a sua média aritmética é q e a sua média geométrica é $1/2$.

Daqui diversas conclusões se podem tirar: por exemplo, se

$$\omega_1 = \frac{1}{2} e^{i\theta}$$

então

$$\omega_2 = \frac{1}{4\omega_1} = \frac{1}{2} e^{-i\theta} = \overline{\omega_1}$$

e

$$q = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \operatorname{Re}(\omega_1).$$

Portanto, f transforma o círculo de raio $1/2$ no segmento $[-1/2, 1/2]$ entre os primários. É claro que as pré-imagens da origem são então os pontos $\pm i/2$.

É fácil obter de modo semelhante as seguintes conclusões:

$$\omega_1 \in [1/2, +\infty[\Rightarrow \omega_2 \in]0, 1/2] \quad \text{e} \quad q \in [1/2, +\infty[;$$

$$\omega_1 \in]-\infty, -1/2] \Rightarrow \omega_2 \in [-1/2, 0[\quad \text{e} \quad q \in]-\infty, -1/2];$$

$$\omega_1 \in [i/2, +i\infty[\Rightarrow \omega_2 \in [-i/2, 0[\quad \text{e} \quad q \in [0, +i\infty[;$$

$$\omega_1 \in]-i\infty, -i/2] \Rightarrow \omega_2 \in]0, i/2] \quad \text{e} \quad q \in]-i\infty, 0].$$

Com base nesta informação é imediata a análise da transformação f e, consequentemente, do espaço das configurações do problema regularizado. Este é $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ (correspondendo a origem ao ponto no infinito); tanto o interior quanto o exterior do círculo de raio $1/2$ são pré-imagem de $\mathbb{C}^2 \setminus [-1/2, 1/2]$.

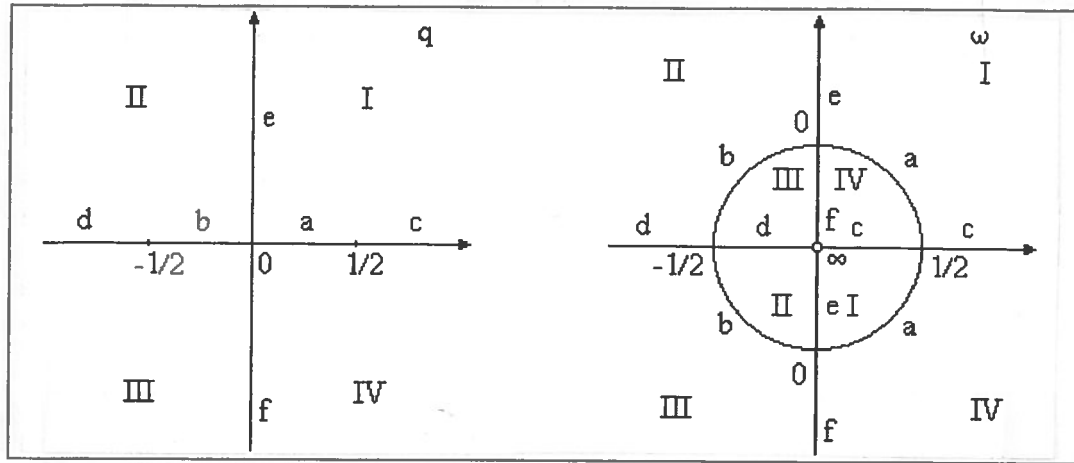


Figura 14. Espaço de configurações dos problemas não regularizado e regularizado.

Como foi visto, vale o primeiro integral

$$\frac{1}{2}|\omega'|^2 = |f'|^2 U_h,$$

que define o nível de energia do problema regularizado, e temos uma aplicação entre os níveis de energia dos problemas regularizado e não regularizado dada por

$$(\omega, \omega') \mapsto (q, \dot{q}) = (f, f' \omega' \tau) = \left(f, \frac{f'}{|f'|^2} \omega' \right).$$

Como f não é injectiva (possuindo cada ponto do seu contradomínio, à excepção dos primários, duas pré-imagens cada), o nível de energia regularizado obtém-se do nível de energia do problema regularizado identificando pares de pontos. No entanto, não é aqui tão claro quais os pontos a identificar como na regularização de Levi-Civita. Para facilitar a análise deste aspecto, observamos que qualquer solução $q = q(t)$ das equações do movimento é imagem por f de duas soluções $\omega_1(\tau)$ e $\omega_2(\tau)$ das equações do movimento regularizadas, que satisfazem

$$\frac{\omega_1(\tau) + \omega_2(\tau)}{2} = q(t(\tau))$$

e

$$\omega_1(\tau)\omega_2(\tau) = \frac{1}{4}.$$

Diferenciando esta última relação obtemos

$$\omega_1' \omega_2 + \omega_1 \omega_2' = 0 \Leftrightarrow \omega_2' = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \omega_1';$$

portanto, se ω_1 e ω_2 são pré-imagens por f do mesmo ponto e pertencem à projecção no espaço das configurações de um certo nível de energia (do problema regularizado), devemos identificar nesse nível de energia os pontos

$$(\omega_1, \omega_1')$$

e

$$\left(\omega_2, -\frac{\omega_2}{\omega_1} \omega_1' \right)$$

para obtermos o nível de energia regularizado.

Posto isto, passamos então à análise da topologia dos níveis de energia regularizados. Para tal, a primeira coisa a fazer é identificar as regiões do espaço das configurações do problema regularizado acessíveis ao movimento para os diferentes valores do integral de Jacobi. Tal é imediato da análise já feita para o problema não regularizado e da informação de que dispomos acerca da função f , e encontra-se feito na figura 15.

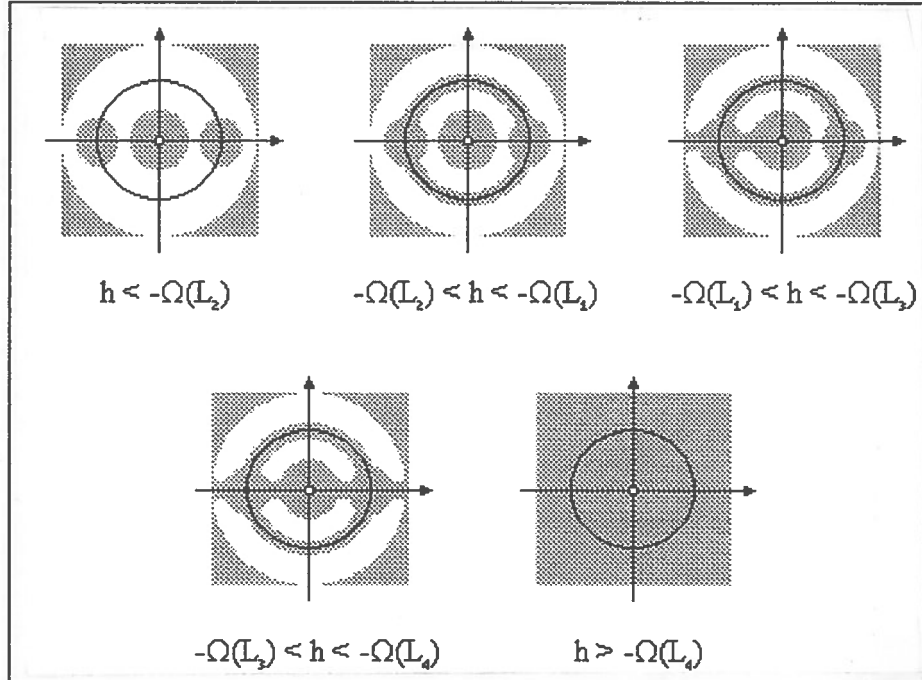


Figura 15. Regiões acessíveis do espaço das configurações para o problema restrito dos três corpos regularizado (regularização de Birkhoff).

Para a identificação da topologia dos níveis de energia regularizados começamos por notar que nos basta considerar a porção do nível de energia regularizado que se projecta em

$$\{\omega \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \text{Im}(\omega) \geq 0\},$$

uma vez que a função f restrita a este subconjunto é sobrejectiva. A vantagem desta observação consiste em que para obter o nível de energia regularizado basta agora fazer identificações de pares de pontos na imagem inversa pela projecção natural do eixo real. Mediante homeomorfismos simples, os pontos a identificar podem ser transformados simplesmente em pontos da forma (ω_1, ω_1') e (ω_2, ω_2') tais que

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^+, \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \omega_1' = -\omega_2'$$

ou

$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}^-, \omega_1 + \omega_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \omega_1' = -\omega_2'.$$

Se $h < -\Omega(L_2)$ a região acessível do espaço das configurações do problema regularizado é homeomorfa a

$$\left\{ \omega \in \mathbf{C} : \left| \omega - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8} \vee \left| \omega + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8} \vee 0 < |\omega| \leq \frac{1}{8} \vee \frac{7}{8} \leq |\omega| < 1 \right\}.$$

O nível de energia regularizado possuirá então três componentes conexas: duas delas (as que se projectam em vizinhanças dos primários) são planos projectivos tridimensionais (como seria de esperar, já que a regularização de Birkhoff é, localmente, a de Levi-Civita). A maneira mais fácil de ver isto é notar que estas componentes são homeomorfas a

$$\left\{ (\omega, \omega') \in \mathbf{C} : \text{Im}(\omega) \geq 0 \wedge \left| \omega - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{8} \wedge |\omega'|^2 = \frac{1}{64} - \left| \omega - \frac{1}{2} \right|^2 \right\}$$

com a região que se projecta no eixo real identificada como foi indicado acima. Ora o conjunto acima é claramente um hemisfério de \mathbf{S}^3 , e a identificação referida é a identificação usual do "equador" do hemisfério que origina \mathbf{P}^3 .

Quanto à terceira componente, ela é claramente homeomorfa a dois cilindros com as bases identificadas, i.e., a um toro sólido. Temos portanto a

Proposição 10.2: *Se $h < -\Omega(L_2)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à união de dois espaços projectivos tridimensionais \mathbf{P}^3 com o interior de um toro sólido.*

O círculo central do toro corresponde à curva de velocidade nula e a fronteira ao infinito. Nos planos projectivos, a curva de velocidade nula e a curva de colisão são representadas por duas curvas fechadas simples enlaçadas.

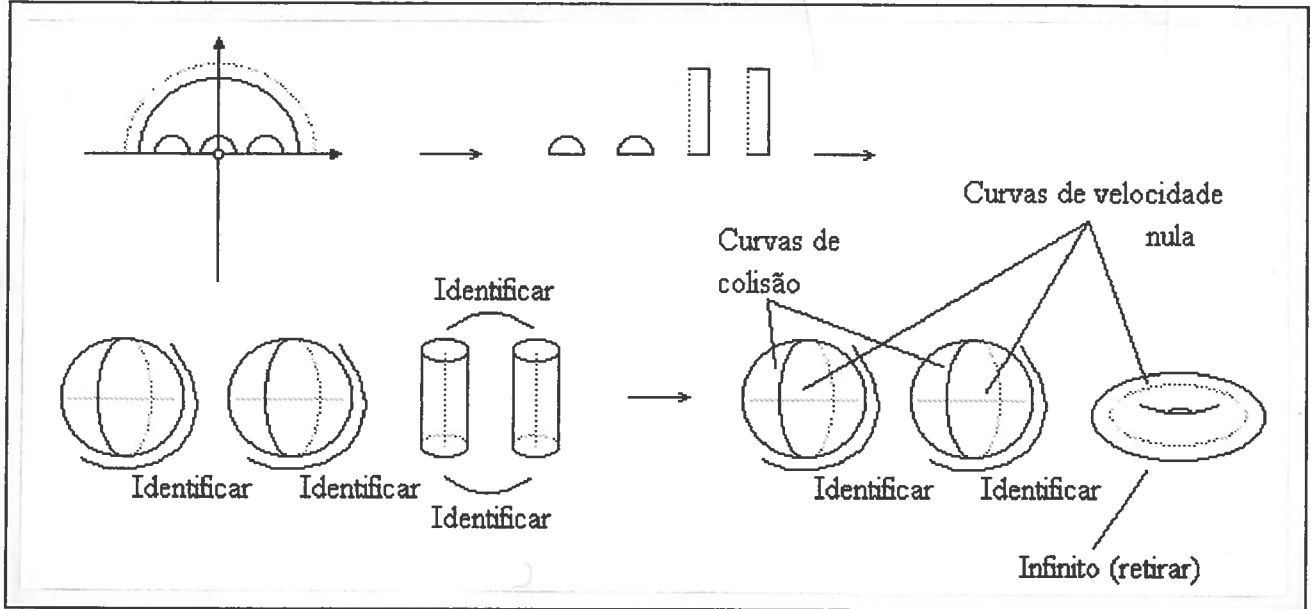


Figura 16. *Nível de energia regularizado (Birkhoff) para o problema restrito dos três corpos ($h < -\Omega(L_2)$).*

Se $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, o nível de energia passa a ter apenas duas componentes conexas: as componentes que se projectam em vizinhanças dos primários "unem-se", de forma que o nível de energia é portanto a união do interior de um toro sólido com a soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais. Este facto tanto pode ser compreendido por analogia com o que se fez atrás como notando que a região acessível ao movimento no espaço das configurações do problema regularizado que contém os primários contida no semi-plano $\text{Im}(\omega) \geq 0$ é homeomorfa ao quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$, correspondendo as curvas de velocidade nula às arestas paralelas aos eixos das ordenadas. Este homeomorfismo pode ser estendido ao nível de energia, pelo que é fácil constatar que a componente em questão do nível de energia regularizado é homeomorfa ao conjunto

$$\{(x, y, u, v): (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \wedge u^2 + v^2 = 1 - x^2\}$$

onde se devem identificar os pontos $(x, \pm 1, u, v)$ e $(-x, \pm 1, -u, -v)$. Se notarmos que para cada valor de y fixo obtemos uma superfície esférica, imaginando estas superfícies esféricas "encaixadas" umas nas outras, facilmente concluímos então que a componente do nível de energia regularizado em análise é homeomorfa a uma coroa esférica com os

pontos antipodais da fronteira identificados, o que é uma representação da soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais. Temos portanto a

Proposição 10.3: *Se $-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à união da soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais \mathbb{P}^3 com o interior de um toro sólido.*

Mais uma vez a curva central do toro sólido é a curva de velocidade nula e a fronteira deste corresponde ao infinito. Na representação acima mencionada da soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais, é fácil ver que as curvas de colisão correspondem, por exemplo, aos equadores das duas superfícies que delimitam a coroa esférica, ao passo que a curva de velocidade nula corresponde à intersecção da coroa esférica com o eixo polar. Portanto, a curva de velocidade nula é uma curva fechada (como não podia deixar de ser) que enlaça simultâneamente as duas curvas de colisão.

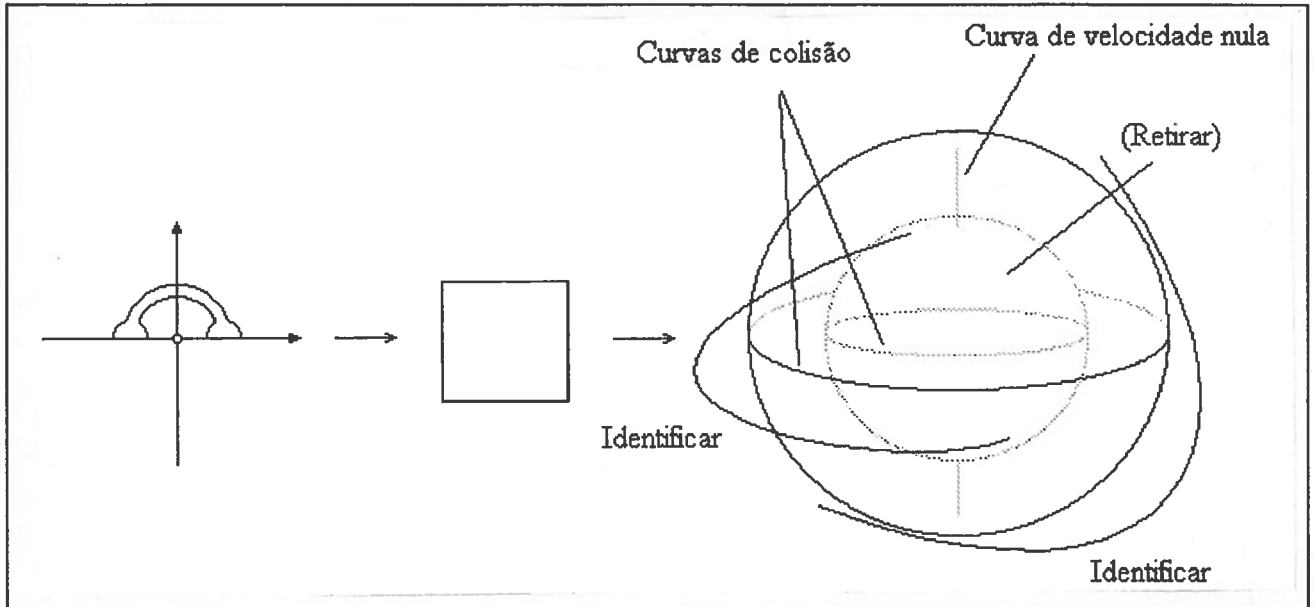


Figura 17. *Primeira componente conexa do nível de energia regularizado (Birkhoff) para o problema restrito dos três corpos ($-\Omega(L_2) < h < -\Omega(L_1)$).*

Prosseguimos analisando o caso em que $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$. Neste caso, o nível de energia passa a ser conexo, e a região acessível ao movimento no espaço das configurações do problema regularizado contida no semi-plano $\text{Im}(\omega) \geq 0$ é homeomorfa ao quadrado $] -1, 1[\times] -1, 1[$, correspondendo as curvas de velocidade nula, por exemplo, aos segmentos $[\pm 3/4, \pm 1/4] \times \{1\}$. Este homeomorfismo pode ser estendido ao nível de energia de um modo semelhante ao que foi feito para o nível anterior, mas tendo em atenção que sobre as curvas de velocidade nula se deve ter $u = v = 0$ e não deve ocorrer qualquer identificação. Portanto devem-se identificar os pontos $(x, -1, u, v)$ e

$(-x, -1, -u, -v)$ e ainda os pontos $(x, 1, u, v)$ e $(-x, 1, -u, -v)$ para $x \notin [-3/4, -1/4] \cup [-3/4, -1/4]$. As superfícies correspondentes a $y = \text{constante}$ no nível de energia podem ser imaginadas como superfícies esféricas deformadas, sem dois pontos antípodas, "encaixadas" umas nas outras e que vão "afunilando" na região em que $x \in [-3/4, -1/4] \cup [-3/4, -1/4]$ à medida que y aumenta, reduzindo-se esta região a duas linhas para $y = 1$. Não é difícil concluir então que o nível de energia regularizado em análise é homeomorfo a uma esfera sólida (com os pontos antipodais da fronteira identificados), à qual foram retirados dois pontos antipodais e os interiores de três esferas sólidas, uma concêntrica com a esfera "grande" e duas dispostas simetricamente adjacentes aos pontos antípodas retirados às superfícies "encaixadas". Os pontos das fronteiras das esferas "pequenas" simétricos em relação à origem devem ser identificados. Note-se que isto é ainda homeomorfo a uma coroa esférica com os pontos antipodais da fronteira identificados, desde que se retire à fronteira "exterior" dois círculos antipodais (correspondendo os interiores destes círculos às duas superfícies esféricas não concêntricas). Temos portanto a

Proposição 10.4: Se $-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais \mathbb{P}^3 à qual foi retirada uma curva fechada.

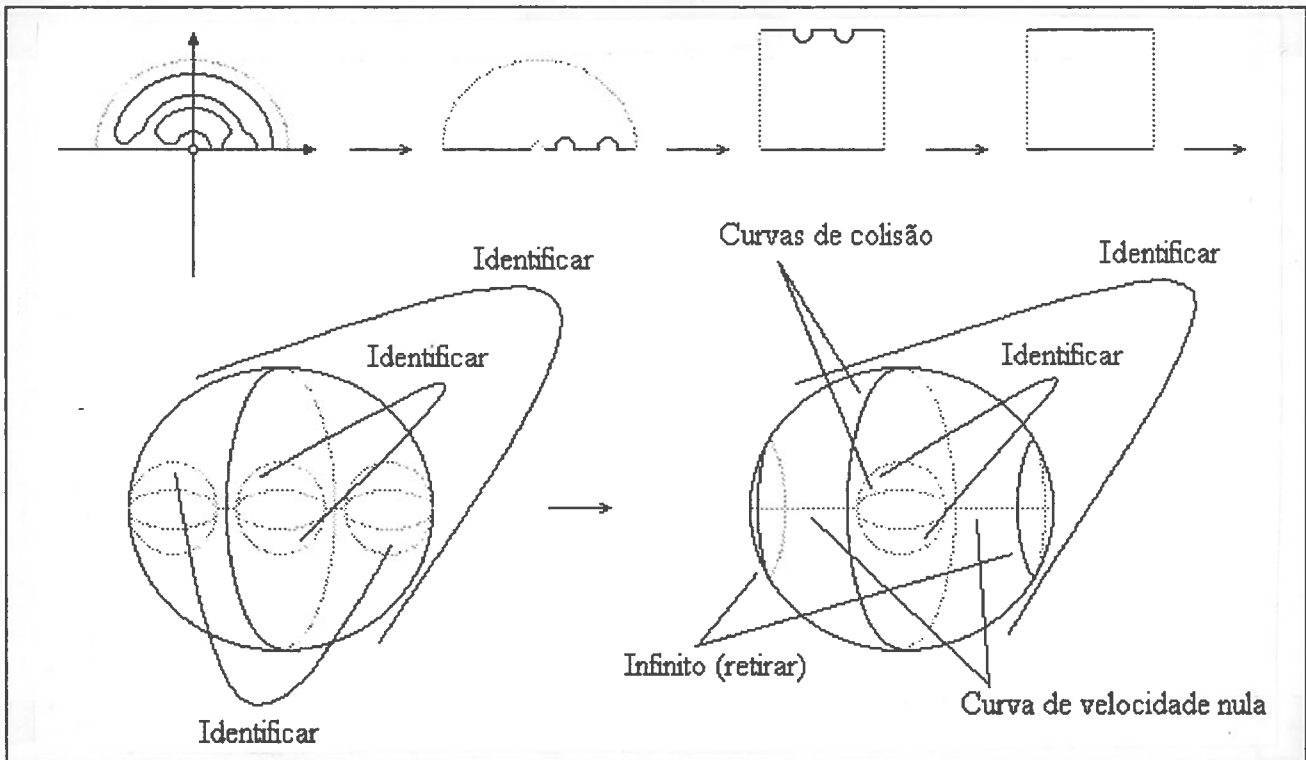


Figura 18. Nível de energia regularizado (Birkhoff) para o problema restrito dos três corpos $(-\Omega(L_1) < h < -\Omega(L_3))$.

Esta curva fechada corresponde, como facilmente se compreende, ao infinito. A curva de velocidade nula será representada pela intersecção com a coroa esférica com o eixo definido pelos centros dos dois círculos que se retiram, e enlaça, portanto, a curva correspondente ao infinito. As curvas de colisão são representadas pelos equadores das duas superfícies esféricas que delimitam a coroa, e são também enlaçadas pela curva de velocidade nula.

O caso em que $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$ corresponde à topologia mais complicada. Neste caso, a região acessível do espaço das configurações do problema regularizado contida no semi-plano $\text{Im}(\omega) \geq 0$ é homeomorfa ao conjunto

$$\{(x, y) \in]-1, 1[\times]-1, 1[: x^2 + (y - 1/2)^2 \geq 1/9 \wedge x^2 + (y + 1/2)^2 \geq 1/9\},$$

com os primários correspondendo aos pontos $(0, \pm 1)$. Se imaginarmos esta região dividida em duas pelo eixo das abcissas, é então simples decompor o nível de energia regularizado em duas partes, cada uma das quais é homeomorfa ao espaço projectivo tridimensional \mathbf{P}^3 ao qual foram retiradas duas bolas abertas unidas pelas curvas de velocidade nula. O nível de energia obtém-se identificando as fronteiras destas bolas e as curvas de velocidade nula (que ficam portanto, como não podia deixar de ser, fechadas), numa espécie de soma conexa. Temos então a

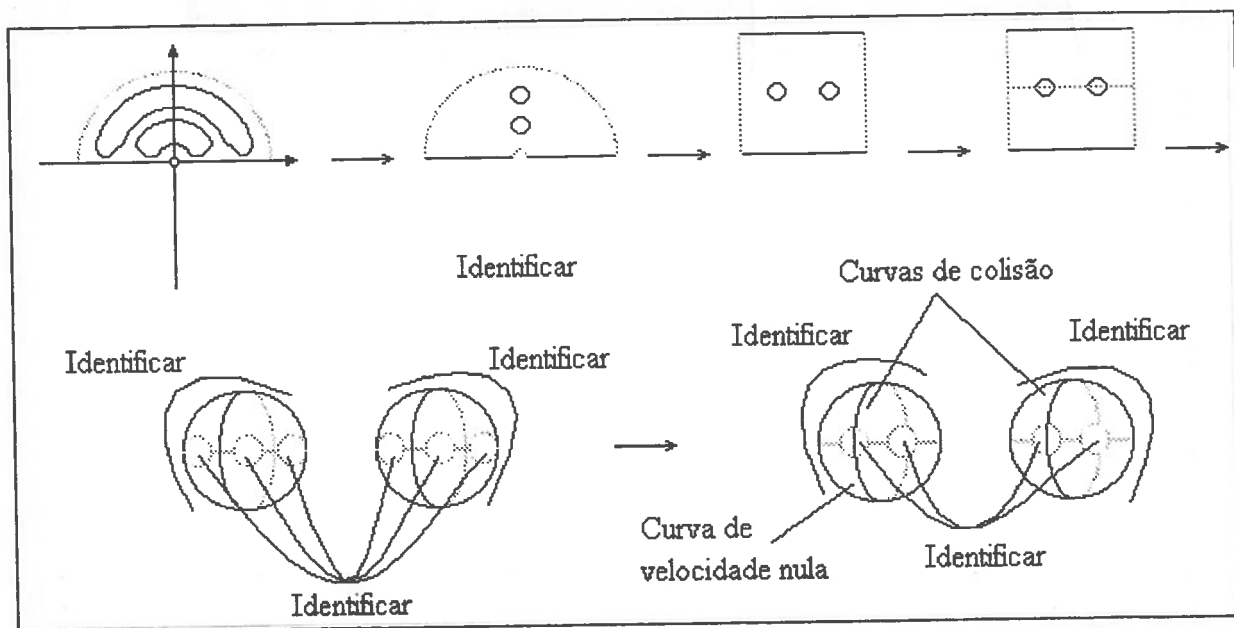


Figura 19. Nível de energia regularizado (Birkhoff) para o problema restrito dos três corpos $(-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4))$.

Proposição 10.5: Se $-\Omega(L_3) < h < -\Omega(L_4)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo a dois espaços projectivos tridimensionais \mathbf{P}^3 aos quais foram retiradas

duas bolas abertas, cujas fronteiras, juntamente com duas curvas unindo estas bolas, devem ser identificadas.

Note-se que uma das bolas corresponderá ao infinito. À semelhança do que se fez na secção 9, pode-se ver como recuperar o nível de energia não regularizado apresentando a topologia de forma menos elegante, o que não faremos aqui.

Resta o caso $h > -\Omega(L_4)$, que não oferece qualquer dificuldade: o nível de energia regularizado é claramente homeomorfo ao conjunto

$$\{(x, y, u, v): (x, y) \in]-1, 1[\times [-1, 1] \wedge u^2 + v^2 = 1\}$$

onde se devem identificar os pontos da forma $(x, \pm 1, u, v)$ e $(-x, \pm 1, -u, -v)$. Imaginando as superfícies $y = \text{constante}$ "encaixadas" umas nas outras, temos a

Proposição 10.6: *Se $h > -\Omega(L_4)$, o nível de energia regularizado é homeomorfo à soma conexa de dois espaços projectivos tridimensionais à qual foi retirada uma curva fechada.*

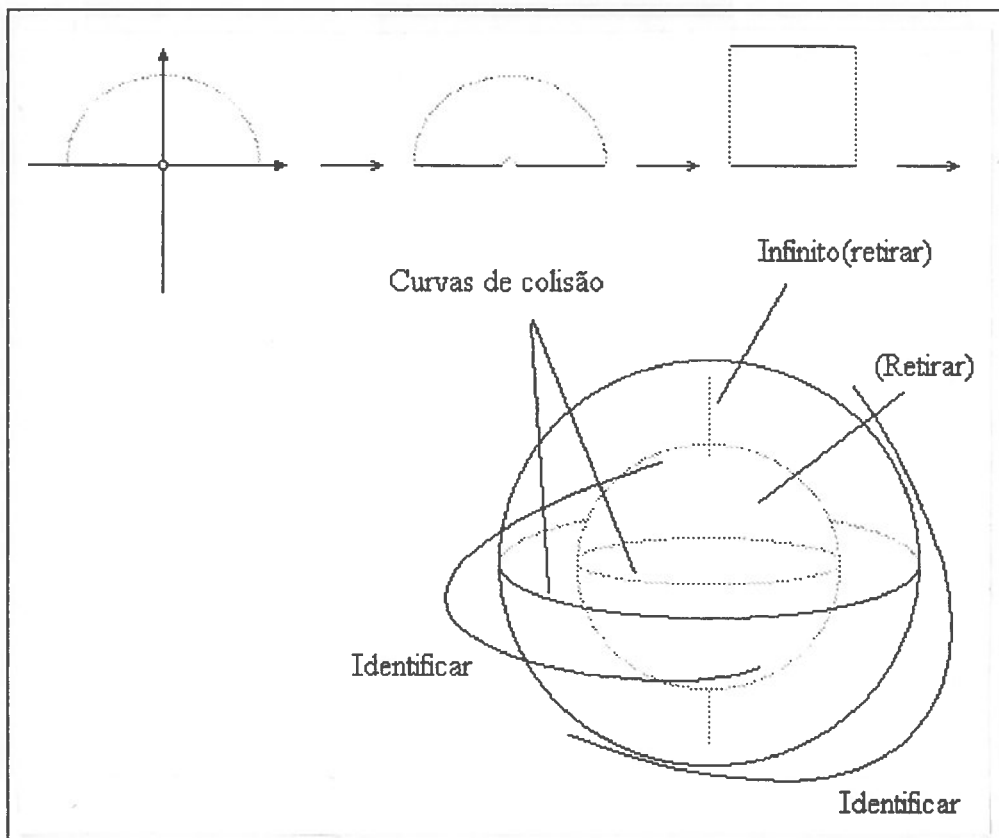


Figura 20. *Nível de energia regularizado (Birkhoff) para o problema restrito dos três corpos ($h > -\Omega(L_4)$).*

A curva fechada corresponde, claro está, ao infinito.

11. OUTRAS REGULARIZAÇÕES GLOBAIS DO PROBLEMA RESTRITO

É relativamente simples obter outras regularizações globais para o problema restrito dos três corpos para além da regularização de Birkhoff. Consideremos, por exemplo, a transformação

$$q = f(\omega) = \frac{1}{4} \left(h(\omega) + \frac{1}{h(\omega)} \right)$$

onde h é uma função analítica (a razão para a escolha da constante $1/4$ tornar-se-á clara dos cálculos). A regularização de Birkhoff corresponde obviamente a $h(\omega) = 2\omega$.

Note-se que para esta escolha da função f as pré-imagens dos primários são as raízes da equação

$$\begin{aligned} f(\omega) = \pm \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(h(\omega) + \frac{1}{h(\omega)} \right) = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow h^2(\omega) \mp 2h(\omega) + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (h(\omega) \mp 1)^2 = 0 \Leftrightarrow h(\omega) = \pm 1. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$f'(\omega) = \frac{1}{4} \left(h'(\omega) \frac{h^2(\omega) - 1}{h^2(\omega)} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\omega)}{h(\omega)} \frac{(h(\omega) - 1)(h(\omega) + 1)}{h(\omega)} \right)$$

e

$$\begin{aligned} r_1 &= \left| q - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{4} \left(h + \frac{1}{h} \right) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{h^2 + 1 - 2h}{4h} \right| = \left| \frac{(h - 1)^2}{4h} \right|; \\ r_1 &= \left| q + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{4} \left(h + \frac{1}{h} \right) + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{h^2 + 1 + 2h}{4h} \right| = \left| \frac{(h + 1)^2}{4h} \right|. \end{aligned}$$

É portanto imediato concluir que

$$|f'|^2 = \left| \frac{h'}{h} \right|^2 r_1 r_2,$$

pelo que a transformação f é de facto uma regularização global para o problema restrito dos três corpos, independentemente da função (analítica) h . As únicas singularidades que surgirão nas equações do movimento regularizadas serão as da função h'/h . Note-se que estas singularidades estarão associadas a zeros da função h e, portanto, corresponderão sempre a $q = \infty$.

Para evitar o aparecimento de singularidades basta então escolher uma função h sem zeros. Um exemplo é a

Definição 11.1 (Regularização de Thiele-Burrau): *A regularização de Thiele-Burrau corresponde a escolher*

$$h(\omega) = e^{\omega},$$

isto é,

$$f(\omega) = \frac{1}{2} \cos(\omega).$$

Esta regularização foi introduzida para possibilitar a integração numérica (com lápis e papel!) do problema restrito dos três corpos. Conduz a expressões razoavelmente simples e produz resultados mais rápidos e fiáveis que qualquer integração numérica das equações originais, mesmo utilizando esquemas de passo de tempo variável.

Uma questão interessante seria a de analisar se a topologia dos níveis de energia regularizados varia consoante a função h utilizada. Se bem que seja evidente que os níveis de energia regularizados só podem diferir dos níveis de energia não regularizados pela forma como se adiciona a estes a curva de colisão, não é à partida claro que todas as regularizações conduzam à mesma topologia. Um primeiro passo nesta direcção poderia ser a análise (certamente não demasiado complicada) da regularização de Thiele-Burrau.

É no entanto de salientar que todas as regularizações produzem os mesmos efeitos numa colisão:

Proposição 11.2: *Se a colisão se dá no instante $t = t_c$, tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} = - \lim_{t \rightarrow t_c^+} \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}.$$

A colisão faz então lembrar um choque elástico. Este resultado pode parecer estranho até nos recordarmos de que no problema de Kepler soluções com a mesma energia mas momentos angulares sucessivamente menores descrevem órbitas que se aproximam mais e mais de trajectórias rectilíneas com inversão do sentido da velocidade no centro do campo.

É muito fácil demonstrar a proposição acima: basta notar que para qualquer transformação regularizadora f tal que ω_p seja pré-imagem de um primário se deve ter

$$f(\omega_p) = \pm \frac{1}{2};$$

$$f'(\omega_p) = 0$$

(porque f deve satisfazer $|f'|^2 = \gamma r_1 r_2$).

Portanto a expansão de f em série de Taylor em torno de ω_p será

$$f'(\omega) = A(\omega - \omega_p) + \dots$$

donde, sendo $\tau_c = \tau(t_c)$, se tem de facto

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_c^-} \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^-} \frac{\omega'}{\bar{f}} \left| \frac{\bar{f}'}{\omega'} \right| = \frac{\omega'}{|\omega'|} \frac{|A\omega'|}{-A\bar{\omega}'} = -\frac{\omega'|A|}{\bar{\omega}'A}$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_c^+} \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^+} \frac{\omega'}{\bar{f}} \left| \frac{\bar{f}'}{\omega'} \right| = \frac{\omega'}{|\omega'|} \frac{|A\omega'|}{A\bar{\omega}'} = \frac{\omega'|A|}{\bar{\omega}'A}$$

(onde nas expressões acima ω' se refere ao valor desta variável para $\tau = \tau_c$).

Além de numericamente serem de extrema utilidade, as regularizações globais permitem-nos ainda estudar órbitas de colisão múltipla, que possuem aplicações importantes em engenharia aeroespacial. A respeito destas órbitas existe o seguinte

Teorema 11.3 (Wintner-Arenstorf): *O conjunto dos instantes de colisão para o problema restrito dos três corpos não possui qualquer ponto de acumulação finito.*

Este teorema foi demonstrado com o objectivo de garantir a existência de solução global para as equações do movimento regularizadas. Conhecem-se diversas órbitas de colisão múltipla, muitas estabelecidas numericamente; esta questão está longe, no entanto, de ser um assunto completamente encerrado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abraham, R. & Marsden, J. E., *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings (1978);
- [2] Arnold, V. I., *Dynamical Systems III*, Springer-Verlag (1988);
- [3] Birkhoff, G. D., *The Restricted Problem of Three Bodies*, Collected Mathematical Papers, Vol. I, p. 628, American Mathematical Society, New York (1950);
- [4] Lacombe, E. A., *Topology of Regularized Submanifolds in Restricted 3-Body Problem*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Volumen 20, p. 35 (1975);
- [5] Moser, J. K., *Lectures on Hamiltonian Systems*, N. Y. U. Lectures (1964);
- [6] Moser, J. K. & Siegel, C. L., *Curso de Mecânica Celeste*, Fundação Calouste Gulbenkian (1986);
- [7] Smale, S., *Topology & Mechanics II*, Invent. Math. 11, p. 45 (1970);
- [8] Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Academic Press (1967).