

## **Uma Abordagem Progressiva à Teoria da Relatividade Geral**

Um Projeto Didático para Ensino Universitário

**João Rodrigo de Almeida Vaz Fernandes Coimbra**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Física e Tecnológica**

Orientadores: Prof. Vitor Cardoso  
Prof. José Natário

**Outubro 2025**

# **Declaração**

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

# **Agradecimentos**

Quero agradecer aos meus orientadores, Professor José Natário e Professor Vitor Cardoso, pela oportunidade de desenvolver este trabalho e por terem aceite o tema que propus. Agradeço também o tempo que dedicaram a orientar-me e a guiar-me ao longo deste percurso.

Agradeço à Faculdade por tornar possível a realização desta tese, fornecendo o enquadramento e os meios necessários.

Por fim, agradeço às pessoas que mais amo, pelo apoio e pela ajuda nos momentos difíceis.

# **Resumo**

A Teoria da Relatividade Geral é uma das construções mais elegantes e fundamentais da física moderna, mas o seu acesso continua a ser difícil para estudantes em início de percurso. A literatura existente em português é escassa e, muitas vezes, a apresentação tradicional assume conceitos complexos sem motivação clara, criando obstáculos adicionais à aprendizagem.

Esta tese propõe e analisa uma nova abordagem didática à Relatividade, concebida para guiar o leitor de forma progressiva e lógica através dos conceitos fundamentais. A proposta estrutura-se como uma narrativa sequencial, onde cada resultado é derivado a partir de motivações intuitivas e experiências mentais, evitando saltos de raciocínio. O texto é auto-suficiente, inclui provas detalhadas, exemplos resolvidos e desafios intermédios, de modo a permitir que cada estudante adapte a leitura ao seu ritmo.

Embora não apresente a totalidade da abordagem final, esta tese reúne uma versão condensada e otimizada, destacando os pontos em que difere da literatura tradicional: derivação original de resultados, novas motivações para conceitos estabelecidos e integração pedagógica entre rigor matemático e intuição geométrica. O objetivo é contribuir para a construção de um caminho de aprendizagem mais acessível, estruturado e envolvente, que possa servir de base futura para a publicação de um livro didático em português e também em inglês.

# **Palavras Chave**

Abordagem; Ensino; Relatividade Especial; Geometria Diferencial; Relatividade Geral

# Abstract

General Relativity is one of the most elegant and fundamental frameworks in modern physics, yet it remains difficult to access for students at the beginning of their studies. Existing literature in Portuguese is scarce and, in many cases, traditional presentations assume complex concepts without clear motivation, creating additional barriers to learning.

This thesis proposes and analyzes a new didactic approach to Relativity, designed to guide the reader progressively and logically through its fundamental concepts. The approach is structured as a sequential narrative, where each result is derived from intuitive motivations and thought experiments, avoiding leaps in reasoning. The text is self-contained, includes detailed proofs, solved examples, and intermediate challenges, allowing each student to adapt the reading process to their own pace.

Although it does not present the complete version of the final approach, this thesis gathers a condensed and optimized structure, emphasizing the points where it differs from traditional literature: original derivations of results, new motivations for established concepts, and a pedagogical integration between mathematical rigor and geometric intuition. The goal is to contribute to the construction of a more accessible, structured, and engaging learning path, which may serve as the basis for the future publication of a didactic book in both Portuguese and English.

# Keywords

Approach; Education; Special Relativity; Differential Geometry; General Relativity

# Conteúdo

<b>0 Introdução da Tese</b>	<b>1</b>
0.1 Motivação . . . . .	3
0.2 Objetivo . . . . .	3
0.3 Estrutura da Tese . . . . .	4
<b>1 Introdução da Teoria da Relatividade</b>	<b>6</b>
1.1 O Início de uma Nova Era . . . . .	7
1.1.1 A Experiência de Michelson e Morley: A Invariância da Velocidade da Luz . . . . .	8
1.2 O Problema da Soma de Velocidades . . . . .	9
1.2.1 Relatividade de Galileu . . . . .	10
1.2.2 Incompatibilidade com Invariância da Velocidade da Luz . . . . .	10
1.3 Os Dois Postulados Fundamentais da Relatividade Restrita . . . . .	11
1.3.1 Princípio da Relatividade . . . . .	11
1.3.2 Invariância da Velocidade da Luz . . . . .	12
1.4  Impactos e Consequências . . . . .	12
<b>2 Relatividade Restrita</b>	<b>13</b>
2.1 Eventos . . . . .	15
2.1.1 Coordenadas de Espaço . . . . .	16
2.1.2 Coordenadas de Tempo . . . . .	16
2.1.3 Definição de Eventos . . . . .	17
2.1.4 Referenciais . . . . .	18
2.2 Experiências Mentais . . . . .	18
2.2.1  Simultaneidade de Eventos I . . . . .	19
2.2.2 Dilatação de Tempo . . . . .	19
2.2.3 Contração de Espaço . . . . .	26
2.2.4 Simultaneidade de Eventos II . . . . .	30
2.3  Gráficos de Espaço-Tempo . . . . .	32
2.3.1  Introdução a gráficos de Espaço-Tempo . . . . .	32
2.3.2  Unidades do Sistema Internacional (SI) . . . . .	32
2.3.3  Unidades Naturais . . . . .	33
2.3.4  Cones de Luz . . . . .	33

2.4	Transformações de Lorentz . . . . .	33
2.4.1	Cenário Inicial . . . . .	33
2.4.2	Definição da Origem Espacial . . . . .	34
2.4.3	Definição da Origem Temporal . . . . .	34
2.4.4	Conversão de Coordenadas de um Evento . . . . .	35
2.5	Soma Relativista de Velocidades . . . . .	38
2.5.1	Cenário Inicial . . . . .	39
2.5.2	Usando as transformações de Lorentz . . . . .	39
2.5.3	Usando a Experiência da Sincronização com vários Referenciais . . . . .	39
2.5.4	Solução do Problema da Soma de Velocidades . . . . .	41
2.6	Efeito de Doppler . . . . .	43
2.7	Geometria de Minkowski . . . . .	43
2.7.1	Intervalo Invariante . . . . .	43
2.7.2	Vetores de Posição e Velocidade . . . . .	43
2.7.3	Métrica de Minkowski . . . . .	43
2.8	Coordenadas de Rindler . . . . .	43
2.8.1	Referenciais Acelerados . . . . .	44
2.8.2	Horizonte de Rindler . . . . .	44
2.9	Paradoxos . . . . .	44
2.9.1	Paradoxo dos Gêmeos . . . . .	44
2.9.2	Paradoxo da Garagem . . . . .	44
2.10	Quadrimomento e outros . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Para Além da Relatividade Restrita</b>	<b>45</b>
3.1	Princípio de Equivalência . . . . .	46
3.2	Forças de Maré . . . . .	48
3.3	Limitações da Relatividade Restrita . . . . .	48
3.3.1	Desvio gravitacional para o vermelho . . . . .	48
3.3.2	Máquina de Energia Infinita . . . . .	48
3.3.3	Conclusão . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Ferramentas Matemáticas Necessárias</b>	<b>49</b>
4.1	Variedades . . . . .	52
4.1.1	Variedade Topológica . . . . .	54
4.1.2	Variedade Diferenciável . . . . .	59
4.1.3	Curvas . . . . .	60
4.2	Coordenadas Locais . . . . .	61
4.3	Vetores . . . . .	61
4.3.1	Definição Abstrata . . . . .	62

4.3.2	Forma Local . . . . .	63
4.3.3	Mudança de Coordenadas . . . . .	63
4.3.4	Contravariante vs. Covariante . . . . .	63
4.3.5	Campo Vetorial . . . . .	63
4.4	Covetores . . . . .	64
4.4.1	Forma Local . . . . .	64
4.4.2	Mudança de Coordenadas . . . . .	64
4.4.3	Campo de Covetores . . . . .	64
4.5	Tensores . . . . .	64
4.5.1	Forma Local . . . . .	64
4.5.2	Produto Tensorial . . . . .	64
4.5.3	Mudança de Coordenadas . . . . .	64
4.5.4	Campo Tensorial . . . . .	64
4.6	Transporte Paralelo . . . . .	65
4.6.1	Definição . . . . .	66
4.7	Derivada Covariante . . . . .	67
4.7.1	Definição Abstrata . . . . .	67
4.7.2	Propriedades . . . . .	68
4.7.3	Em coordenadas locais . . . . .	70
4.7.4	Transporte Paralelo . . . . .	72
4.8	Geodésicas . . . . .	72
4.8.1	Em coordenadas locais . . . . .	72
4.9	Métrica . . . . .	73
4.9.1	Compatibilidade com a Métrica . . . . .	74
4.9.2	Torsão . . . . .	74
4.9.3	Inversa da Métrica . . . . .	74
4.9.4	Conexão Levi Civita . . . . .	74
4.9.5	Comprimento de uma Curva . . . . .	74
4.9.6	A métrica como ponte entre vetores e covetores . . . . .	74
4.10	Curvatura . . . . .	74
4.10.1	Tensor de Curvatura de Riemann . . . . .	74
4.10.2	Tensor de Ricci . . . . .	74
4.10.3	Escalar de Ricci . . . . .	74
5	<b>Relatividade Geral</b>	75
5.1	Curvatura no espaço-tempo . . . . .	76
5.1.1	Espaço-tempo como variedade . . . . .	76
5.1.2	Métrica do espaço-tempo . . . . .	76
5.1.3	Geodésicas no espaço-tempo . . . . .	76

5.2	Equações de Campo de Einstein . . . . .	76
5.2.1	Soluções das Equações de Campo de Einstein . . . . .	76
5.3	Métrica de Schwarzschild . . . . .	76
5.4	Buracos Negros . . . . .	76
5.5	Ondas Gravitacionais . . . . .	76
5.6	Cosmologia . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Conclusão da Tese</b>	<b>77</b>
6.1	Objetivo Principal . . . . .	78
6.2	Síntese do Trabalho Desenvolvido . . . . .	78
6.3	Contributo e Relevância . . . . .	79
6.4	Limitações do Estudo . . . . .	79
6.5	Perspetivas Futuras . . . . .	80
<b>Bibliography</b>		<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Transporte Paralelo de Objetos Geométricos</b>	<b>83</b>
A.1	Transporte Paralelo de Escalares . . . . .	84
A.2	Transporte Paralelo de Vetores . . . . .	84
A.3	Transporte Paralelo de Covetores . . . . .	88

# **Lista de Figuras**

1	Ilustração da Cidade Futurista . . . . .	2
1.1	Esquema de um interferómetro. . . . .	8
1.2	Ilustração da Relatividade de Galileu . . . . .	10
1.3	Ilustração da Invariância da Velocidade da Luz . . . . .	10
1.4	<i>Albert Einstein</i> em 1947 . . . . .	11
2.1	Disposição dos observadores no espaço . . . . .	16
2.2	Visualização de um referencial. . . . .	18
2.3	Tabela do Fator de Lorentz. . . . .	21
2.4	Notação usada. . . . .	21
2.5	Experiência vista do Referencial A. . . . .	22
2.6	Situação inicial observada no Referencial A. . . . .	22
2.7	Situação após $\gamma_v$ observada no Referencial A. . . . .	23
2.8	Situação vista do Referencial B. . . . .	23
2.9	Situação vista do Referencial A. . . . .	27
2.10	Situação vista do Referencial B. . . . .	28
2.11	Referencial B - a carroagem move-se com velocidade $v$ . . . . .	30
2.12	Configuração inicial vista dos referenciais A e B . . . . .	34
2.13	Ilustração do cenário inicial no Referencial A . . . . .	35
2.14	Configuração inicial vista dos referenciais A e B . . . . .	39
2.15	Experiência no Referencial A . . . . .	40
2.16	Experiência no Referencial B . . . . .	40
2.17	Ilustração da soma de velocidades relativista. . . . .	41
2.18	Ilustração da soma de velocidades relativista no caso da luz. . . . .	42
3.1	Diferentes acelerações . . . . .	47
3.2	O princípio de Equivalência na ISS . . . . .	48
4.1	Mundo da formiga . . . . .	50
4.2	Terra como variedade $S^2$ . . . . .	53

4.3	Homeomorfismo $\varphi$ entre a superfície da Terra e a sua respetiva imagem . . . . .	55
4.4	Como obter a projeção cilíndrica de $S^2$ . . . . .	56
4.5	$U = S^2$ implicaria perda de continuidade da carta $\varphi$ . . . . .	57
4.6	Domínio $U$ para a carta $\varphi$ . . . . .	58
4.7	Sobreposição de duas cartas locais. . . . .	59
4.8	Visualização da função de temperatura sobre a variedade $M$ . . . . .	62
4.9	Vetores na Variedade $M$ . . . . .	63

# O

## Introdução da Tese

### Conteúdo

---

0.1 Motivação . . . . .	3
0.2 Objetivo . . . . .	3
0.3 Estrutura da Tese . . . . .	4

---

Sempre vi a Teoria da Relatividade, como tantas outras áreas da física e matemática, como uma cidade futurista no meio do deserto — imaginemos o Dubai. É de acesso difícil, mas maravilhosa quando lá se chega: cheia de oportunidades, inovação e pessoas talentosas a desenvolver projetos inspiradores.

Muitos, fascinados pelo potencial, concentram-se em expandir a cidade com novas técnicas e projetos ambiciosos. No entanto, enquanto a cidade cresce, os acessos continuam precários. O deserto afasta muita gente; apenas os mais resilientes conseguem chegar. Essa foi a minha experiência: um percurso penoso e frustrante.

Acredito que o verdadeiro salto virá não só da inovação dentro da cidade, mas também de investir nos caminhos até lá. Criar estradas melhores permitirá que mais pessoas com potencial consigam chegar, em vez de deixar que cada um se perca sozinho no deserto.



(a) Situação Inicial



(b) Situação Ideal

**Figura 1:** Ilustração da Cidade Futurista

Decidi, então, desenvolver “*Uma Abordagem Progressiva à Teoria da Relatividade Geral*”, uma proposta que procura atacar este problema. Não se trata de uma solução completa, mas de uma tentativa de melhorar o acesso a este conhecimento, mais uma pedra no caminho.

Esta abordagem constitui o objeto de estudo desta tese. A tese não apresenta a abordagem na sua totalidade, mas sim uma exposição e análise dela.

Neste capítulo, serão introduzidos todos os aspectos relevantes para a compreensão da tese. Iremos explorar a origem da ideia, os objetivos da abordagem e da tese, e a estrutura adotada para tentar concretizar esses objetivos.

A minha intenção é, se tudo correr bem, publicar futuramente um livro que apresente a abordagem integral num formato apelativo, em português e também em inglês. A ideia final é criar algo que eu próprio gostaria de ter lido no início desta jornada.

## 0.1 Motivação

Desde cedo, sempre fui fascinado pelo processo de aprender, pela sensação única e recompensadora de dominar o complexo e torná-lo familiar. Essa paixão por desvendar o enigmático tem sido uma constante no meu percurso académico. Gosto de abordar a física e a matemática como se estivesse a resolver um problema, onde cada passo lógico puxa o seguinte, criando uma narrativa coesa que me guia como num passeio. Para mim, o ideal é sentir que estou a descobrir a matéria por mim mesmo, respondendo às perguntas certas e construindo, peça por peça, uma estrutura que resolve o desafio à minha frente. É como se, ao final, eu pudesse olhar para esse conhecimento como uma criação minha, algo que conheço profundamente e pelo qual sinto até um certo apego, carregado das memórias e das ferramentas que fui reunindo pelo caminho.

No entanto, ao entrar na faculdade, percebi uma desconexão entre essa forma de aprender – guiada, lógica e pessoal – e a maneira como muitos tópicos, apesar de fascinantes e relevantes, me eram apresentados. Isso tornou-se especialmente evidente quando estudei relatividade pela primeira vez. O que me diziam ser uma teoria clara, lógica e fundamentada em poucos princípios aparecia, na prática, confuso, desconexo e pouco motivado, onde conceitos nada triviais eram assumidos ou mal explicados. Essa frustração acendeu em mim o desejo de fazer diferente.

Nasceu daí a motivação para criar um recurso que respeite o processo de aprendizagem: uma nova abordagem no ensino da teoria, que leve o leitor por uma jornada acessível e estruturada pelos conceitos fundamentais da Relatividade Geral.

## 0.2 Objetivo

Os principais objetivos desta abordagem são criar um texto:

- Em **português**, a minha língua materna, permitindo um desenvolvimento otimizado da abordagem e preenchendo uma lacuna existente na literatura portuguesa nesta área.
- Para alunos **universitários**, com os conhecimentos mínimos de cálculo exigidos a nível universitário (derivadas, integrais, etc.).
- **Completo**, equivalente a uma cadeira universitária de Relatividade e Cosmologia.
- **Auto-suficiente**, de forma a ser contido, mantendo a estrutura narrativa que considero fulcral. Idealmente, desde que o leitor possua os conhecimentos pré-requisitos, o texto seria sequencial e autocontido.
- Bem **motivado e lógico**, partindo de premissas intuitivas e explorando as suas consequências de forma encadeada. O objetivo é ser honesto com o leitor, assumindo apenas ferramentas que façam sentido e que não pareçam forçadas.

- **Exaustivo**, incluindo todos os passos e provas. Estes são apresentados de forma clara e bem delimitada, permitindo que o leitor interessado os siga detalhadamente, enquanto quem preferir pode saltá-los sem perder a coerência do texto.
- Complementado com **exemplos resolvidos** e **pequenos desafios**, que ajudam a consolidar e a compreender as nuances dos tópicos abordados.

O objetivo final é facilitar a aprendizagem, tornando-a mais envolvente e eficaz.

No contexto desta tese, o principal objetivo será expor e analisar esta nova abordagem. O foco está em destacar os pontos em que a abordagem difere da literatura tradicional: manter um fio narrativo coerente, experiências mentais originais, novas derivações, reformular conteúdos com base em motivações inéditas e, onde a literatura tradicional acerta, criar compilações fruto de uma seleção cuidadosa, escolhendo sempre o melhor passo ao longo do caminho. Livros usados como referência da literatura tradicional [1] [2] [3] [4] [5] e como inspiração [6].

Para além da componente técnica, uma grande parte da abordagem é a forma como esta informação é apresentada: escolhas de notações, *design*, criação de imagens e ilustrações, e formatação do texto para uma leitura fácil e intuitiva. A ideia é que a parte técnica mostra o caminho mais eficaz para aceder ao conhecimento, enquanto a apresentação e estética constroem a infraestrutura desse percurso, permitindo que seja percorrido de forma confortável e orientada.

### 0.3 Estrutura da Tese

A abordagem foi pensada para guiar o leitor de forma natural e lógica através dos conceitos fundamentais da Relatividade. Cada secção tem um propósito claro, funcionando como um pequeno passo a ser superado com as ferramentas adquiridas até aquele ponto.

A abordagem é concretamente estruturada da seguinte forma:

0. **Introdução da Abordagem:** Explicação da estrutura da abordagem, estratégias para transmitir informação, motivação, objetivos e mensagem ao leitor.
1. **Introdução à Teoria da Relatividade:** Contexto histórico da Relatividade (de onde surgiu a necessidade de uma nova teoria?) e apresentação dos postulados fundamentais.
2. **Relatividade Restrita:** Através de experiências mentais, exploram-se algumas consequências dos postulados, como a dilatação do tempo e a contração do espaço. Derivação das Transformações de Lorentz e da equivalência massa-energia ( $E = mc^2$ ).
3. **Para Além da Relatividade Restrita:** Aborda-se o *Princípio de Equivalência* e a incompatibilidade fundamental entre a Relatividade Restrita e a introdução da gravidade na teoria. Esta tensão motiva a necessidade de um novo conceito — o de **curvatura** — cuja exploração será o passo seguinte.

4. **Ferramentas Matemáticas Necessárias:** Conceitos essenciais para a compreensão da relatividade geral, como cálculo tensorial e geometria diferencial, apresentados de forma acessível e com exemplos práticos.
  5. **Relatividade Geral:** Introdução ao Princípio da Equivalência e à ideia de gravidade como curvatura do espaço-tempo. Dedução das equações de Einstein e análise de soluções simples, como a métrica de Schwarzschild. Aplicações concretas, como órbitas planetárias, desvio gravitacional da luz e expansão do universo.
- \* **Exercícios e Desafios:** Ao longo de cada secção, serão apresentados pequenos exercícios e desafios progressivos, permitindo ao leitor aplicar as ferramentas aprendidas. O objetivo é que sinta que está a *descobrir o próximo passo* por si próprio.
- A. **Apêndices:** Reúnem tópicos necessários mas possivelmente redundantes para alguns leitores. Incluem recursos adicionais como notação, glossário, convenções e fórmulas importantes.

Devido a limitações de espaço, esta tese não apresenta a abordagem na sua totalidade. Muitas secções surgem de forma condensada, representando uma versão otimizada e não uma transcrição literal da abordagem original.

Alguns conteúdos repetidos ao longo das secções — generalizações para 4D, limites clássicos, curiosidades, etc. — serão ilustrados apenas quando necessário. Nos restantes casos, surgirá apenas o título a vermelho, assinalando a posição do conteúdo, mas mantendo-o oculto.

De forma semelhante, secções que não apresentam material original — incluindo exercícios cujo valor é sobretudo pedagógico — e que seguem a abordagem tradicional surgem também ocultas, permitindo rentabilizar espaço sem comprometer o fluxo da tese.

Para além disto, o documento mantém uma estrutura próxima da abordagem tradicional, mas incorpora caixas de comentários, como a seguinte:

#### Comentário do Autor

Estas caixas contêm comentários sobre a abordagem: motivação de escolhas, intenções futuras, desafios encontrados, e análises sobre divergências entre a abordagem e a literatura tradicional. São exclusivas desta tese.

Nos capítulos seguintes, como o objeto em estudo é o próprio texto em si, onde a apresentação estética é relevante para a transmissão da informação, permiti maior liberdade na sua formatação.

# 1

## Introdução da Teoria da Relatividade

### Conteúdo

---

1.1	O Início de uma Nova Era . . . . .	7
1.2	O Problema da Soma de Velocidades . . . . .	9
1.3	Os Dois Postulados Fundamentais da Relatividade Restrita . . . . .	11
1.4	Impactos e Consequências . . . . .	12

---

No final do século XIX, a física clássica era vista como uma ciência quase perfeita, plenamente amadurecida. As leis de *Newton* explicavam tudo, desde a queda de uma maçã até as órbitas dos planetas. Já *James Clerk Maxwell* havia unificado eletricidade e magnetismo em equações elegantes, revelando que a luz era uma onda eletromagnética. [7] Muitos especialistas estavam tão confiantes que desencorajavam os alunos de seguir esta área, afirmando que nada de essencial faltava por descobrir e que apenas restavam medições mais precisas para refinar os valores das constantes físicas. [8]

Hoje sabemos o quanto enganados estávamos: o universo ainda nos reserva inúmeros mistérios e estamos longe de uma compreensão absoluta do que nos rodeia.

Então, o que levou esta fortaleza aparentemente inabalável da física teórica a ruir? De onde surgiu a maior revolução da física de que há registo, com áreas inteiramente novas a emergir, como a mecânica quântica e a relatividade geral — foco desta obra?

Neste capítulo, exploramos as fissuras nas teorias clássicas que levaram ao colapso. Veremos as experiências cruciais e as ideias que forçaram postulados revolucionários, moldando a física moderna — especialmente a relatividade geral.

#### Comentário do Autor

Esta parte introdutória segue de perto a literatura tradicional, priorizando um fio narrativo coeso que conecta as ideias e aborda todos os tópicos essenciais de uma introdução à teoria. A estrutura começa com o panorama inicial (como descrito acima), explora as razões para a mudança de paradigma e prossegue com uma lógica sequencial para os passos seguintes.

Por fim, apresenta-se os postulados fundamentais, devidamente justificados e contextualizados quanto à sua origem e motivação.

## 1.1 O Início de uma Nova Era

As equações de Maxwell, que descreviam o eletromagnetismo de forma tão elegante, revelavam que a luz no vácuo se propagava com velocidade de valor constante (que designamos por  $c$ ), que hoje sabemos ser aproximadamente 300 000 quilómetros por segundo:  $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$ .<sup>1</sup> Tal resultado levantava duas questões intrigantes sobre a natureza da luz:

→ **Em relação a quê é que essa velocidade era medida?**

Toda velocidade é relativa a um referencial de observação. Um comboio parece imóvel se estivermos dentro dele, mas desloca-se a 100 km/h visto da estação. Nas equações de Maxwell, porém,  $c$  surgia sem especificar o referencial — seria em relação ao meio de propagação?

→ **Se a luz era uma onda em que meio viajava?**

Na física clássica, a velocidade de uma onda, como o som no ar, era medida usando como

<sup>1</sup>Valor aproximado; medições precisas, como as de Michelson em 1879, indicavam cerca de 299 792 km/s.

referência o meio onde propagava. No entanto a luz, ao contrário do som, conseguia atravessar o vácuo – como na sua viagem do Sol à Terra – sem precisar de um meio aparente. Então, onde estaria este “meio” da luz?

Para resolver este mistério, os físicos propuseram a existência de um éter *luminífero*, um meio invisível que preencheria o universo e serviria de suporte para a propagação da luz. Mas existiria mesmo este éter? Seria possível medir a que velocidade a Terra se deslocava através dele?

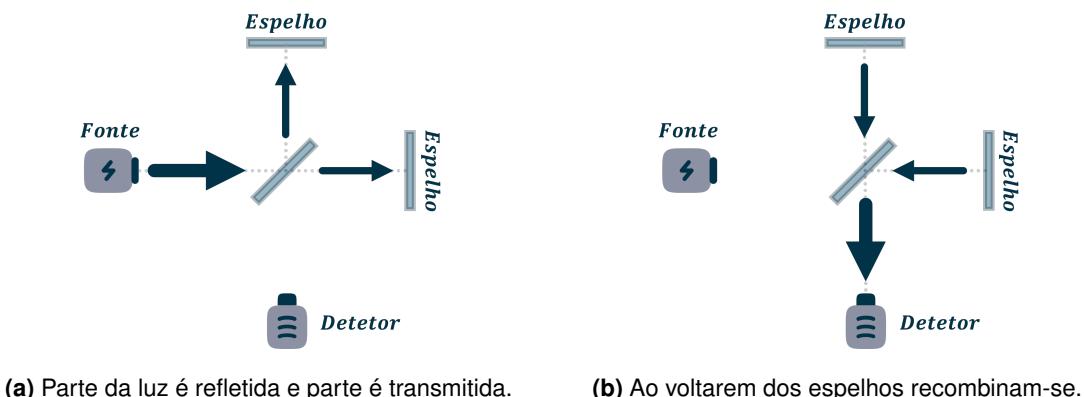
A ideia era que a Terra, ao mover-se pelo éter, sentiria um “vento de éter” que alteraria a velocidade da luz, assim como o vento afeta o som, ou a corrente na água afetas as ondações que criamos.

Em 1887, dois cientistas americanos decidiram desenvolver uma experiência que com objetivo de detetar e medir este “vento de éter”. Mas o que acabaram por descobrir mudou para sempre a nossa visão do universo.

### 1.1.1 A Experiência de Michelson e Morley: A Invariância da Velocidade da Luz

Em 1887, Albert Michelson e Edward Morley tentaram resolver o enigma do éter *luminífero* — o suposto meio invisível que conduziria a luz pelo universo — com uma experiência que marcaria a história da física.

Construíram um *interferômetro*, um aparelho que divide um feixe de luz em dois percursos perpendiculares, como mostrado na Figura 1.1a. Cada feixe viaja até um espelho, reflete e volta ao ponto inicial (Figura 1.1b), recombinando-se para formar um padrão de interferência — como ondações que se cruzam num lago quando duas pedras caem. [9]



**Figura 1.1:** Esquema de um interferômetro.

### **Curiosidade:** O que é um “padrão de interferência”?

James Clerk Maxwell, nos anos 1860, mostrou que a luz é uma onda eletromagnética – uma oscilação dos campos elétricos e magnéticos que se propaga pelo espaço.

Quando dois feixes de luz se encontram, as suas ondas “somam-se” como ondulações na água: se as cristas se alinharam, a luz fica mais intensa (interferência construtiva); se uma crista encontra um vale, a luz pode até se anular (interferência destrutiva). O padrão de interferência, com franjas claras e escuras, revela como as ondas estavam alinhadas ao se recombinarem.

### **Comentário do Autor**

Para tornar o texto auto-contido, a abordagem inclui várias caixas de curiosidades como esta, que servem para complementar a narrativa e fornecer ao leitor as ferramentas necessárias para compreender pontos-chave da teoria da Relatividade.

Por limitações de formato da tese, estas caixas serão maioritariamente omitidas, sendo apresentadas apenas pontualmente, a título ilustrativo do que faria parte de uma versão final.

A ideia era simples, mas genial: se a Terra se movesse através do éter, o “vento de éter” criado pelo seu movimento deveria afetar a velocidade da luz, que variaria em função da direção do aparelho (se estava mais a favor do “vento” ou mais contra), causando diferenças nos tempos de viagem dos dois feixes e criando diferentes padrões de interferência para cada direção. Essas mudanças no padrão indicariam que a velocidade da luz depende da direção medida.

O resultado foi surpreendente: independentemente da direção, da hora do dia ou da época do ano, o padrão de interferência permaneceu idêntico. Não havia qualquer sinal do “vento de éter”! Poderia a Terra estar em repouso no éter? Essa ideia foi descartada, pois implicaria que a Terra seria o único corpo celeste privilegiado, parado num universo em movimento, algo incompatível com tudo o que sabemos sobre o cosmos.

A conclusão era clara: os feixes de luz percorreram sempre os dois caminhos à mesma velocidade. Isso significava que a velocidade da luz no vácuo,  $c \approx 300\,000\text{ km/s}$ , era sempre a mesma, não importando a direção nem o movimento do observador. Este fenômeno, chamado **Invariância da Velocidade da Luz**, mostrava que a luz, ao contrário do som, não precisava de um meio e confirmava que as equações de eletromagnetismo de Maxwell [10] eram válidas em qualquer referencial inercial.

Este resultado virou a física clássica de cabeça para baixo. Se a luz tem a mesma velocidade para todos, como conciliar isso com a nossa intuição de que velocidades se somam, como Galileu nos ensinou?

## **1.2 O Problema da Soma de Velocidades**

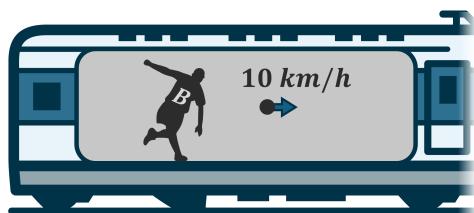
O facto de qualquer referencial medir o mesmo valor para a velocidade da luz, independentemente da velocidade do observador, era incompatível com o modelo predominante na época: a **Relatividade de Galileu**.

### 1.2.1 Relatividade de Galileu

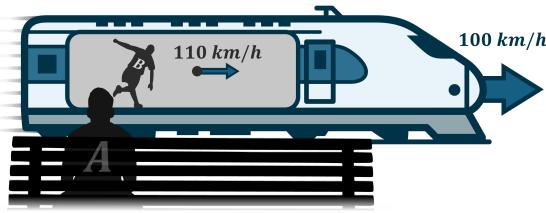
Imaginemos o seguinte cenário: um amigo (*A*) está sentado na estação de comboios, enquanto outro amigo (*B*) está dentro de um comboio que se desloca a uma velocidade de 100 km/h. O amigo *B*, dentro do comboio, lança uma bola a 10 km/h (segundo a sua própria percepção) no mesmo sentido do movimento do comboio. O cenário encontra-se ilustrado na Figura 1.3.

Para *B*, a bola desloca-se a 10 km/h. E para *A*, sentado na estação?

Com base na nossa intuição do dia a dia, percebemos que a bola, ao andar a 10 km/h em relação ao comboio, somaria a sua velocidade à do comboio em relação à estação (100 km/h). Logo, *A* observaria a bola a uma velocidade total de 110 km/h.



(a) Comboio visto de *B*



(b) Comboio visto de *A*

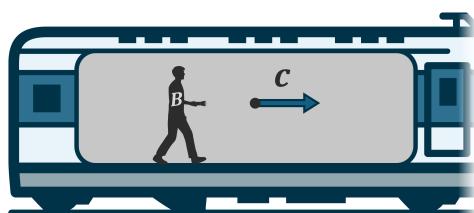
Figura 1.2: Ilustração da Relatividade de Galileu

Este princípio, em que as velocidades se somam (ou subtraem, se em sentidos opostos), constitui a base da **Relatividade de Galileu**. Durante muito tempo, esta ideia foi usada para transformar velocidades entre diferentes referenciais, explicando como objetos em movimento se comportam relativamente uns aos outros. [11]

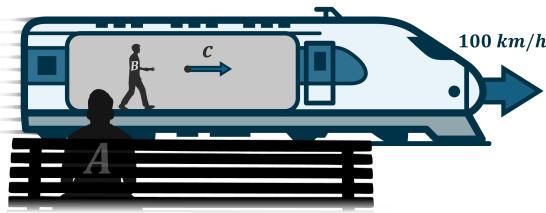
### 1.2.2 Incompatibilidade com Invariância da Velocidade da Luz

Tal como medido na **experiência de Michelson e Morley**, todos os observadores, independentemente do referencial, medem o mesmo valor para a velocidade da luz no vácuo  $c$ .

Por exemplo, se *B* acender uma lanterna no comboio, verá a luz sair à velocidade  $c$ . Surpreendentemente, *A*, sentado na estação, também observará a luz da lanterna a propagar-se à mesma velocidade de  $c$  e não à velocidade esperada de  $c$  mais os 100 km/h a que anda o comboio.



(a) Comboio visto de *B*

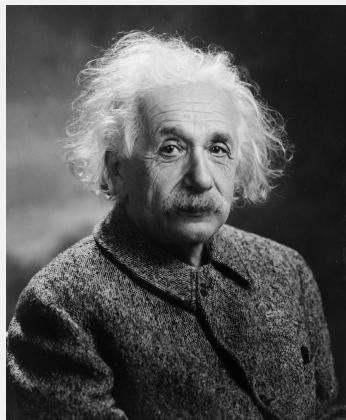


(b) Comboio visto de *A*

Figura 1.3: Ilustração da Invariância da Velocidade da Luz

Este resultado contradizia a Relatividade de Galileu e exigia uma nova teoria, que introduzisse um modelo capaz de converter velocidades entre referenciais e, simultaneamente, respeitasse o princípio da *Invariância da Velocidade da Luz*. Foi nesse contexto que Albert Einstein, no início do século XX, formulou a **Teoria da Relatividade Restrita**, que reestruturou profundamente as nossas ideias sobre espaço, tempo e movimento.

**Curiosidade:** Quem foi *Albert Einstein*?



**Albert Einstein** (1879–1955) foi um físico teórico alemão, famoso por desenvolver a relatividade restrita em 1905, que mudou a nossa visão do espaço e do tempo, e a relatividade geral em 1915, que descreve a gravidade como a curvatura do espaço-tempo. Ganhou o Prémio Nobel da Física em 1921, não pela relatividade, mas pelo efeito fotoelétrico, que ajudou a fundar a mecânica quântica. Einstein adorava tocar violino e dizia que as suas melhores ideias vinham enquanto passeava ou sonhava acordado!

**Figura 1.4:** *Albert Einstein* em 1947

**Comentário do Autor**

Nestas secções de curiosidades serão também apresentadas algumas das figuras-chave que tiveram um papel relevante na construção da teoria. Mais uma vez, este é apenas um exemplo ilustrativo.

## 1.3 Os Dois Postulados Fundamentais da Relatividade Restrita

O objetivo deste documento é, de certa forma, redescobrirmos esta nova teoria da Relatividade Restrita pensada por Einstein. Para isso, iremos assumir algumas afirmações que tomamos como verdades, a que iremos chamar de os Postulados Fundamentais da nossa teoria. Será sobre estes que iremos construir todo o nosso raciocínio, até chegarmos finalmente a um novo modelo da realidade.

### 1.3.1 Princípio da Relatividade

→ As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, isto é, em qualquer sistema onde a Lei da Inércia se aplique. Nestes referenciais, os corpos mantêm velocidades constantes na ausência de forças externas que atuem sobre eles.

Este princípio já era conhecido na época de Galileu, e é fácil visualizá-lo com uma analogia clássica:

Imagina-te no porão de um navio navegando em águas calmas, a uma velocidade constante. Dentro deste porão, sem janelas ou qualquer contacto com o exterior, podes encher o espaço com objetos familiares: aquários com água, pratos e bolas. Experimenta interagir com eles: toca na água, fala, atira a bola em diferentes direções. Surpreendentemente, tudo se comporta exatamente como se o navio estivesse parado. As ondulações na água, o som da tua voz, o movimento da bola, tudo é idêntico ao que observarias em terra firme.

Isto é a relatividade em ação: dentro de um referencial inercial, não há experiência que permita identificar se estás em movimento ou em repouso. A física funciona da mesma maneira em ambos os casos. [11]

### 1.3.2 Invariância da Velocidade da Luz

→ A velocidade da luz no vácuo ( $c$ ) é sempre a mesma para qualquer observador, independentemente do movimento da fonte ou do referencial.

Este princípio, inspirado pelas equações de Maxwell [10] e confirmado pela experiência de Michelson-Morley, contradiz a intuição clássica de somar velocidades e exige uma reformulação completa da mecânica clássica.

## 1.4 Impactos e Consequências

# 2

## Relatividade Restrita

### Conteúdo

---

2.1	Eventos . . . . .	15
2.2	Experiências Mentais . . . . .	18
2.3	QQ Gráficos de Espaço-Tempo . . . . .	32
2.4	Transformações de Lorentz . . . . .	33
2.5	Soma Relativista de Velocidades . . . . .	38
2.6	QQ Efeito de Doppler . . . . .	43
2.7	QQ Geometria de Minkowski . . . . .	43
2.8	QQ Coordenadas de Rindler . . . . .	43
2.9	QQ Paradoxos . . . . .	44
2.10	QQ Quadrímomento e outros . . . . .	44

---

Ao admitirmos que a velocidade da luz é invariante, ou seja qualquer observador de qualquer referencial (que definimos concretamente nas próximas secções) mede o mesmo valor para a velocidade da luz, encontramo-nos alguns fenómenos bastantes intrigantes.

Ao explorarmos as consequências desta nova Relatividade entraremos num mundo fascinante, num mundo diferente do nosso dia a dia. Aqui vamos descobrir que a simultaneidade de dois eventos é relativa – o que acontece ao mesmo tempo para nós pode não o ser para outro referencial; a passagem do tempo é relativa – a percepção que temos da passagem do tempo é diferente entre referenciais; a passagem de tempo está relacionada com a velocidade; e as nossas medições de distâncias também estão relacionadas com a velocidade.

Já falámos dos Postulados Fundamentais na secção anterior, mas é importante agora criarmos um espaço de trabalho, a nossa **caixa de areia**, onde possamos brincar em cenários idealizados e explorar todas as consequências dos nossos axiomas. Para isso precisamos dizer como queremos que seja esta caixa de areia a que chamamos de espaço.

Vamos então assumir que este espaço possui duas propriedades:

- **Homogéneo:** O espaço é o mesmo em todos os pontos, ou seja, o espaço não tem posição preferida: não importa onde estejamos, as propriedades do espaço não mudam. (Igual em todos os pontos)
- **Isotrópico:** O espaço é o mesmo em todas as direções a partir de um ponto, o que significa que ele não tem uma orientação preferida. Não importa para onde olhemos, as propriedades são idênticas em todas as direções. (Igual em todas as direções)

Estas propriedades somam ao princípio da relatividade, de forma a garantir que não importa a posição, orientação ou velocidade do nosso referencial que as leis da física se mantêm verdadeiras e válidas. Todas estas propriedades são assumidas, motivadas pela nossa experiência pessoal e até agora confirmadas pelas experiências científicas.

Neste momento a nossa caixa de areia está vazia; seria então essencial começar por definir alguns conceitos que serão as nossas ferramentas. Começaremos pelos **Eventos**.

#### Comentário do Autor

Este capítulo já adota algumas abordagens que divergem da leitura tradicional, todo o processo é abordado de forma mais pausada. A análise da teoria será feita em 1 dimensão espacial e 1 temporal, de forma a simplificar o raciocínio, sendo posteriormente em cada secção generalizada para as restantes dimensões. Inicia-se pela construção do espaço onde iremos trabalhar, definindo os conceitos de eventos e referenciais. [1]

Segue-se uma sequência de experiências mentais que, a meu ver, constroem de forma sequencial e original a estrutura conceptual necessária. Estas experiências fornecerão as ferramentas que permitirão derivar as transformações de Lorentz de forma intuitiva e visual, sem recorrer a pressupostos adicionais.

Com esta base, será possível abordar o problema da soma de velocidades sob duas pers-

petivas complementares: uma mais visual, inspirada nas experiências mentais, e outra formal, baseada diretamente nas transformações de Lorentz.

## 2.1 Eventos

O universo é uma coleção de **eventos** – momentos específicos onde algo acontece, como um relâmpago, o instante em que acendes uma lâmpada ou até o segundo em que lês esta frase. Para descrever esses eventos, precisamos de um “endereço” que nos diga **onde** e **quando** eles ocorrem. Esse endereço irá ser dado por **coordenadas**, números que marcam a posição no espaço e o instante no tempo.

Pensa em combinar um encontro com um amigo. Dizes: “Encontra-me na esquina da Rua X com a Avenida Y, no terceiro andar, às 15h.” São necessárias quatro informações: três para o espaço (latitude, longitude e altitude) e uma para o tempo (o horário). Sem qualquer uma delas, o teu amigo ficaria completamente perdido!

Este exemplo mostra que vivemos num universo **quadrimensional**, com **três dimensões espaciais** e **uma dimensão temporal**, em que para especificar um evento é necessário indicar quatro coordenadas.

Na relatividade restrita, podemos imaginar o universo como um grande “tecido” chamado **espaço-tempo**, e cada evento é um ponto nesse tecido. As coordenadas são como alfinetes que fixam esses pontos, com etiquetas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para a posição e  $t$  para o tempo. Mas o que significa, exatamente, dizer que um evento acontece “a cinco metros de mim” ou “às 5:45”?

Para responder a isso, vamos construir, passo a passo, um sistema para medir espaço e tempo, começando com uma versão simplificada do universo.

### Simplificação para 2D – uma dimensão espacial e uma temporal

Para tornar as ideias mais fáceis de visualizar, vamos simplificar o universo. Imagina que tudo acontece ao longo de uma linha reta, infinita em ambas as direções, onde cada evento necessita apenas de **dois números** para ser identificado: a sua posição ao longo da linha e o instante em que acontece.

Assim, usaremos apenas **uma dimensão espacial**, com uma coordenada que chamamos de  $x$ , e **uma dimensão temporal**, com uma coordenada  $t$ . Esta abordagem serve para nos treinar numa versão mais simples antes de explorar o universo completo em quatro dimensões.

Ao longo do texto, faremos notas sobre como generalizar estas ideias para as quatro dimensões do espaço-tempo: as três dimensões espaciais e uma temporal, garantindo que percebemos tanto o quadro simplificado como o completo da teoria.

### 2.1.1 Coordenadas de Espaço

Vamos agora estabelecer uma estratégia para atribuir coordenadas espaciais a um acontecimento.

O primeiro passo é compreender que qualquer medição é, na sua essência, uma comparação entre duas entidades. Por exemplo, ao afirmarmos que algo tem dois metros de comprimento, estamos a dizer que é duas vezes maior do que uma certa barra de referência, definida em França como unidade de distância e batizada de *metro*.

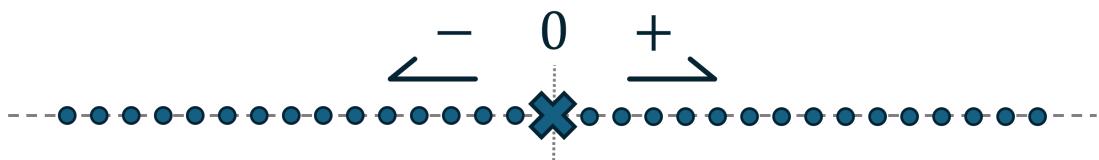
De forma análoga, precisamos de definir a nossa própria unidade de distância. Para isso, criaremos a nossa própria barra de medição e estabeleceremos um ponto de referência a partir do qual todas as medições serão feitas – a nossa **origem espacial**.

Nesta origem, colocamos o nosso primeiro **observador** – uma entidade responsável por registar acontecimentos – e atribuímos-lhe a coordenada espacial  $x = 0$  *barras*. Este observador será denominado **Observador da Origem**. Se um acontecimento ocorrer na origem, será registado por este observador, ficando o evento assinalado com a coordenada espacial do próprio observador, ou seja,  $x = 0$  *barras*.

Podemos agora distribuir observadores idênticos ao longo da linha, mantendo um espaçamento de uma barra entre cada um. A cada observador atribuímos uma coordenada espacial correspondente ao número de barras que o separa da origem. Para distinguir a posição de cada observador em relação à origem, atribuímos coordenadas positivas a um lado da linha e negativas ao outro.

Na Figura 2.1, os observadores à esquerda da origem possuem coordenadas negativas, e os à direita, positivas. Por exemplo, se um evento ocorre em  $x = -3$  *barras*, significa que aconteceu na posição do observador que se encontra três barras à esquerda da origem.

Para garantir a maior precisão possível, a barra unitária deve ser suficientemente pequena, de modo a que qualquer evento possa ser representado, a nosso critério, por um número inteiro de barras.



**Figura 2.1:** Disposição dos observadores no espaço

### 2.1.2 Coordenadas de Tempo

Para atribuir temporais a um acontecimento a ideia é semelhante à do espaço:

1. Pegaremos um fenômeno cíclico e a duração de um ciclo será a nossa unidade de tempo.
2. Criaremos um relógio que mantém o registo destes ciclos, contando quantos ciclos passaram desde de um certo instante definido, e distribuiremos cópias por cada um dos observadores.

3. Definimos um dado instante para ser a nossa **origem no tempo**. A ideia seria que neste instante cada relógio de cada observador marcasse 0 ciclos.

Garantir este último passo, ou seja sincronizar todos os relógios da forma correta, será um processo desafiante. Iremos ver como o resolver no segmento abaixo. Se um evento acontecer no instante que definimos como a origem temporal ele terá a coordenada temporal  $t = 0$  *ciclos*.

A coordenada temporal então indica quantos ciclos um evento dista desta origem, sendo a coordenada negativa se o evento aconteceu antes do instante definido como origem e positiva se o evento aconteceu depois.

Mais uma vez, para garantir a melhor precisão possível é importante que ciclo unitário seja o mais pequeno possível, de forma a que, ao nosso critério, qualquer evento esteja bem representado por um número inteiro de ciclos.

### **Sincronização dos Relógios**

Imaginemos que somos o Observador da Origem e queremos definir um certo instante como a origem do tempo. Teríamos de arranjar um método de sincronização de forma a que os relógios de todos os observadores marquem  $t = 0$  *ciclos* nesse instante. Poderíamos agir da seguinte forma

1. Usaremos feixes de luz como método de sincronização. O primeiro passo será, portanto, determinar a velocidade da luz. Tal pode ser feito emitindo um feixe de luz em direção ao observador na posição  $x = 1$  *barra*, que possui um espelho que reflete o feixe de volta.

Podemos então usar o nosso relógio para medir o tempo que o feixe levou a ir e voltar, percorrendo 2 *barras*. Sabendo a distância percorrida e o tempo gasto, conseguimos calcular a velocidade da luz, comunicando depois o resultado da nossa descoberta a todos os observadores.

2. No instante que decidirmos definir como origem temporal, reiniciamos a contagem do nosso relógio — o relógio principal — para começar a contar do zero e enviamos dois feixes de luz, um em cada direção.
3. Estes feixes de luz serão progressivamente registados pelos observadores. Cada um sabe a sua posição relativamente à origem (a sua coordenada espacial) e, conhecendo a velocidade da luz, pode calcular quanto tempo o feixe demorou a chegar até si. Assim, pode usar essa informação para sincronizar o seu relógio com o principal.

Por exemplo, um observador que receba um feixe de luz e calcule que a luz demorou 10 *ciclos* sabe que, no instante em que recebeu o feixe, o relógio principal marcava também 10 *ciclos*, e usa essa informação para ajustar o seu relógio.

### **2.1.3 Definição de Eventos**

Com ambas as ferramentas, temos o necessário para identificar um evento. Imaginemos que ao evento  $A$  foram atribuídas as coordenadas  $(t_A, x_A)$ ; isto significa que o evento foi registado pelo observador

situado a  $x_A$  barras da origem espacial, no instante em que o seu relógio marcava  $t_A$  ciclos.

Por exemplo, um evento com coordenadas  $t = 3$  ciclos e  $x = -2$  barras, ou simplesmente  $(3, -2)$  de forma abreviada, será registado pelo observador situado a duas barras à esquerda da origem espacial, quando o seu relógio marca três ciclos.

### 🔗 Generalização a 4D

#### Comentário do Autor

Tal como referido, para simplificar a análise os conceitos são abordados primeiro numa versão simplificada em apenas 1 dimensão espacial e 1 dimensão temporal, mas a abordagem terá sempre uma subsecção que generaliza o conhecimento a 4D para equipar o leitor de não apenas o caso simples mas uma preparação real.

#### 2.1.4 Referenciais

Como visto, podemos criar toda esta estrutura de observadores e de relógios partindo de uma origem no espaço (que usaremos como referência para dispor os observadores) e no tempo (que usaremos como referência para sincronizar os relógios). Usando as barras e ciclos como as unidades correspondentes.

A esta estrutura (Figura 2.2) chamaremos de **Referencial**, que nos proporcionará um sistema para atribuir coordenadas a acontecimentos.



**Figura 2.2:** Visualização de um referencial.

No entanto, se construíssemos outra estrutura idêntica mas usando outra origem – quer espacial quer temporal – como referência, os mesmos acontecimentos já seriam descritos por diferentes coordenadas, isto é seria outro referencial.

A um referencial construído com o **objeto A** (por exemplo) como origem espacial chamaremos de **Referencial A**. Veremos embaixo que isto significará que o objeto A estará sempre em **repouso** no seu próprio referencial.

### 🔗 Velocidade

### 🔗 Exercícios Resolvidos

## 2.2 Experiências Mentais

Agora que definimos a estrutura da nossa "caixa de areia"— ou seja, o que são eventos, o que significam medições de tempo e espaço, e o que entendemos por velocidade — podemos finalmente pegar

nos postulados e perceber as suas implicações. Nesta secção, iremos idealizar cenários e perguntar “e se...?”, que serão as nossas experiências mentais. Aqui iremos analisar um total de quatro experiências que nos levarão a questionar a universalidade da simultaneidade, do tempo e do espaço. Esta secção fornecerá os fenómenos-chave que irão moldar a nossa abordagem ao longo do capítulo.

#### Comentário do Autor

Tal como referido no início do capítulo, vamos agora desenvolver quatro experiências mentais, algumas com abordagem original, que nos abrirão o caminho para conceitos fundamentais da relatividade: a quebra da universalidade da simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do espaço.

A secção foi organizada de forma que estas experiências sejam sequenciais e encadeadas. Esta abordagem contrasta com grande parte da literatura tradicional, que normalmente começa por derivar as equações das transformações de Lorentz e só depois apresenta estes fenómenos.

A razão da minha escolha é que, ao abordar primeiro os fenómenos, o leitor consegue visualizar imediatamente consequências fascinantes, como o abrandamento do tempo ou a contração de objetos, sem se perder em matemática relativamente pesada. As equações de Lorentz, por si só, podem ser abstratas e não exibem de forma óbvia as implicações físicas.

Além disso, a derivação das equações de Lorentz que proponho baseia-se diretamente nestes fenómenos, resultando numa abordagem mais natural: partindo de casos concretos, generalizamos para um sistema que permite analisar múltiplos referenciais.

### 2.2.1 Simultaneidade de Eventos I

#### Comentário do Autor

Nesta subsecção, a experiência do comboio de Einstein é usada para explorar qualitativamente a quebra da universalidade da simultaneidade. [12]

#### Generalização a 4D

#### Exercícios Resolvidos

### 2.2.2 Dilatação de Tempo

Uma outra ideia frequentemente tomada como absoluta é a universalidade da passagem do tempo: pela nossa experiência do quotidiano, o tempo parece passar ao mesmo ritmo para todos os referenciais. Intuitivamente, parece natural que a cada hora que passa para uma pessoa na estação também passe uma hora para a pessoa no comboio, independentemente da sua velocidade.

No entanto, é prudente reavaliar esta crença de forma mais rigorosa, uma vez que a invariância da velocidade da luz pode pôr em causa esta certeza. Devemo-nos, então, perguntar: *será que o tempo passa da mesma forma em todos os referenciais?*

## Comentário do Autor

Na literatura tradicional é comum derivar o fator  $\gamma$  e apresentar a dilatação do tempo diretamente a partir das transformações de Lorentz. Considero este caminho pouco intuitivo e demasiado abstrato, pois não ajuda a visualizar o que realmente acontece.

Outra abordagem clássica é a experiência mental do “relógio de luz” de Einstein, onde um feixe reflete entre espelhos orientados perpendicularmente ao movimento. [13] Apesar de mais intuitiva, também apresenta limitações:

- Exige trabalhar em duas dimensões espaciais, enquanto aqui pretendemos começar com uma análise em apenas uma dimensão para simplificar.
- A experiência só funciona na orientação perpendicular ao movimento; se fosse na direção do movimento, o resultado correto dependeria de considerar previamente a contração do espaço. Assim, ao escolher a orientação “certa”, parte-se já de conhecimento futuro, correndo o risco de uma certa lógica circular se não for bem contextualizado.

Face a estas dificuldades, proponho uma experiência alternativa. A ideia central é simples: para comparar o ritmo do tempo entre referenciais, basta que um envie ao outro a duração de um segundo do seu próprio relógio, permitindo uma comparação direta.

Esta experiência resolve os problemas anteriores:

- É inteiramente unidimensional, sendo feita na mesma direção do movimento.
- Não exige considerar a contração do espaço, pois nenhuma distância é relevante na construção da experiência.

Nesta abordagem iremos denotar sempre o fator gama com a velocidade correspondente em subscrito,  $\gamma_v$ . Esta convenção permite distinguir facilmente diferentes fatores gama associados a diferentes velocidades, evitando potenciais ambiguidades.

Para investigar a fundo esta questão, podemos realizar a seguinte experiência mental com duas naves espaciais:

### Experiência da Sincronização

**Configuração da Experiência:** Imaginemos duas naves no espaço: a **nave A**, onde estamos, e a **nave B**, onde está o nosso amigo, que se afasta de nós a uma velocidade constante  $v$ .

Surge então a pergunta: será que um segundo no relógio do nosso amigo (referencial  $B$ ) corresponde exatamente a um segundo no nosso relógio (referencial  $A$ )?

E que melhor forma de esclarecer esta dúvida do que pedir ao nosso amigo que nos envie um segundo dele? Realizaremos então uma experiência simples:

1. O nosso amigo, na nave  $B$ , carrega uma grande lanterna, enquanto nós, na nave  $A$ , temos um grande relógio.
2. Ele enviará dois sinais de luz consecutivos, espaçados por um segundo no seu próprio

relógio.

- Nós, no referencial  $A$ , registaremos o tempo entre a chegada desses dois sinais de luz, usando o nosso grande relógio.

As figuras 2.5 e 2.8 ilustram a experiência do ponto de vista de cada referencial: no referencial  $A$ , vemos a nave  $B$  afastar-se a uma velocidade  $v$ , enquanto permanecemos em repouso. Já no referencial  $B$ , a situação é inversa: somos nós que nos afastamos a uma velocidade  $v$ , enquanto a nave  $B$  permanece em repouso.

O ponto crucial desta experiência é o seguinte: ao fazermos as contas para prever o tempo medido pelo nosso relógio, o valor obtido tem de ser o mesmo, independentemente do referencial em que realizamos os cálculos. Se o nosso relógio marcar 5 segundos entre os dois pulsos de luz, o nosso amigo, ao observar o nosso relógio, também verá esse mesmo número 5. É impossível que veja um valor diferente, como 6 ou 7, pois está a observar diretamente o número indicado no mostrador do nosso relógio.

### **Notação importante**

Iremos então considerar que o tempo poderá fluir a ritmos diferentes entre um referencial em repouso e outro em movimento. Neste caso, por cada segundo que passar no referencial em movimento (que se desloca a uma velocidade constante  $v$ ), passarão  $\gamma_v$  segundos no referencial em repouso — lê-se *gama de  $v$* .

De forma equivalente, por cada segundo que passa no referencial em repouso, apenas  $1/\gamma_v$  segundos decorrerão no referencial em movimento, tal como indicado na Tabela 2.3. Iremos designar esta quantidade  $\gamma_v$  por **Fator de Lorentz**, onde o subscrito  $v$  indica a velocidade para a qual o fator foi calculado.

Se, por exemplo, observarmos que a cada segundo que passa no referencial em movimento passam cinco segundos no nosso em repouso, então o valor do Fator de Lorentz seria  $\gamma_v = 5$ . Consequentemente, neste cenário por cada segundo que passasse no nosso referencial, passariam apenas  $\frac{1}{\gamma_v} = \frac{1}{5}$  segundos no referencial do nosso amigo em movimento.

Uma outra notação, que será usada nos cálculos, é definida na Figura 2.4.

<b>Repouso</b>	<b>Movimento</b>
$\gamma_v$	1
1	$1/\gamma_v$

**Figura 2.3:** Tabela do Fator de Lorentz.

$\textcircled{1}_A$  - Tempo medido pelo grande relógio visto no referencial A.

$\textcircled{1}_B$  - Tempo medido pelo grande relógio visto no referencial B.

**Figura 2.4:** Notação usada.

**O nosso objetivo será determinar o valor de  $\gamma_v$ .** Se o ritmo do tempo fosse idêntico em todos os referenciais, então teríamos simplesmente  $\gamma_v = 1$ .

Antes de avançarmos, vamos definir uma notação para representar os intervalos de tempo medidos para o mesmo fenómeno quando observado a partir de diferentes referenciais:

- $\Delta t$  — intervalo de tempo medido no referencial em repouso.
- $\Delta t'$  — intervalo de tempo medido no referencial em movimento com velocidade  $v$ .

Se  $\gamma_v \neq 1$ , é útil escrever uma equação que relate estes dois intervalos, permitindo compreender como o intervalo de tempo do mesmo fenómeno é percebido em diferentes referenciais:

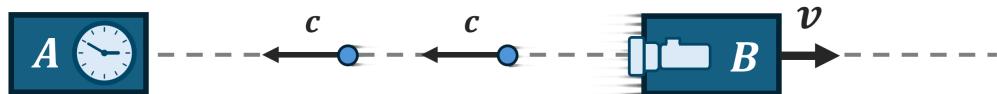
$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma_v}} \quad (2.2.1)$$

Esta equação diz-nos que cada segundo medido no referencial em repouso corresponde a  $\frac{1}{\gamma_v}$  segundos no referencial em movimento, tal como visto na Tabela 2.3. Assim, se um fenómeno demora  $\Delta t$  segundos em repouso, ele será observado como durando  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma_v}$  segundos no referencial em movimento.

Veremos então qual é o valor de  $\gamma_v$  e como ele depende da velocidade relativa  $v$  entre os referenciais. A estratégia, como já referido, baseia-se no facto de que ambos os referenciais devem concordar com o valor do grande relógio ( $\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_B$ ). Para isso, calculamos  $\mathbb{I}_A$  fazendo as contas no referencial  $A$  e depois  $\mathbb{I}_B$  no referencial  $B$ , podendo depois igualar os resultados e determinar  $\gamma_v$ .

### Referencial A

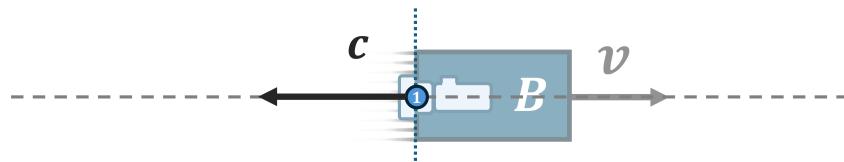
A experiência observada no referencial onde  $A$  está em repouso está ilustrada na Figura 2.5:



**Figura 2.5:** Experiência vista do Referencial  $A$ .

Neste momento, observamos a experiência a partir do referencial  $A$ . Como o grande relógio também se encontra em  $A$ , basta calcular o intervalo de tempo entre a chegada dos pulsos de luz, sem necessidade de qualquer conversão.

O primeiro pulso de luz é emitido pela lanterna em  $B$ , na direção indicada pelo tracejado vertical:

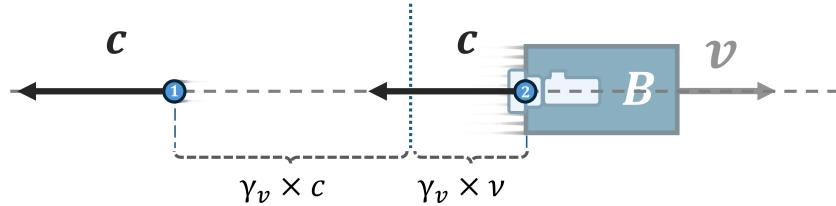


**Figura 2.6:** Situação inicial observada no Referencial  $A$ .

De acordo com o combinado, antes de produzir o segundo pulso, sabemos que o referencial  $B$  (o referencial que, para nós, está em movimento) aguardaria 1 segundo no seu relógio. Durante esse inter-

valo, no nosso referencial  $A$  (o referencial em repouso), decorreriam  $\gamma_v$  segundos, tal como apresentado na Tabela 2.3.

Ao final desses  $\gamma_v$  segundos, o primeiro pulso de luz teria-se afastado  $\gamma_v \times c$  metros para a esquerda em relação à posição inicial, enquanto a nave  $B$  teria-se deslocado  $\gamma_v \times v$  metros para a direita, como ilustrado na Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Situação após  $\gamma_v$  observada no Referencial A.

Ou seja, os pulsos de luz viajarão com uma distância de  $\gamma_v c + \gamma_v v$  entre si até chegarem à nave  $A$ .

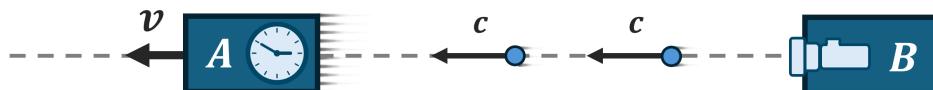
Logo, quando o primeiro pulso atingir o grande relógio no referencial  $A$ , o segundo percorrerá esta distância à velocidade  $c$ . Isto permite-nos calcular o intervalo de tempo entre os pulsos:

$$\textcircled{1}_A = \frac{\gamma_v c + \gamma_v v}{c} = \gamma_v \frac{c + v}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\textcircled{1}_A = \gamma_v \frac{c + v}{c}} \quad (2.2.2)$$

Obtivemos então o tempo medido pelo grande relógio, calculado no referencial  $A$  ( $\textcircled{1}_A$ ).

### Referencial B

A experiência observada no referencial  $B$  está ilustrada na figura abaixo. Na perspetiva do nosso amigo, é a nossa nave  $A$  que se afasta com velocidade  $v$ :



**Figura 2.8:** Situação vista do Referencial B.

No referencial  $B$ , os pulsos de luz são emitidos com um intervalo de 1 segundo no relógio do nosso amigo. Isto significa que, para ele, os pulsos estão separados por uma distância  $c$  (a velocidade da luz multiplicada pelo intervalo de 1 segundo). Então, quando o primeiro pulso colide com a nave  $A$ , o segundo ainda se encontra a uma distância  $c$ .

A partir da colisão do primeiro pulso com o grande relógio, este começa a cronometrar o tempo até que o segundo pulso colida. Como o segundo pulso aproxima-se da nave  $A$  à velocidade  $c$ , enquanto  $A$  se afasta com velocidade  $v$ , podemos determinar o tempo até à colisão usando o **Método do Tempo de Colisão**.



## **Caixa de Ferramentas:** Método do Tempo de Colisão

### Comentário do Autor

Para além das curiosidades, haverá também segmentos de **Caixa de Ferramentas** com explicações essenciais. Estes blocos fornecem ao leitor definições auto-contidas de conceitos-chave. Ao mesmo tempo, por estarem bem delimitados, podem ser facilmente ignorados por quem já domine o assunto.

No nosso caso, a **velocidade de convergência** entre o segundo pulso de luz e a nave  $A$  é  $c - v$ , já que o pulso se aproxima a  $c$  e  $A$  se afasta a  $v$ . Assim, o tempo até à colisão medido no referencial  $B$  é

$$t_{\text{colisão}} = \frac{\text{distância inicial}}{\text{velocidade de convergência}} = \frac{c}{c - v}. \quad (2.2.3)$$

Como o grande relógio encontra-se em  $A$ , que está em movimento relativo a  $B$ , precisamos de converter este tempo para o referencial  $A$ . Para cada segundo observado em  $B$ , o relógio em  $A$  marca apenas  $\frac{1}{\gamma_v}$  segundos (ver Tabela 2.3). Multiplicando  $t_{\text{colisão}}$  pelo fator  $\frac{1}{\gamma_v}$ , obtemos o tempo registado no grande relógio:

$$\textcircled{i}_B = \frac{1}{\gamma_v} \left( \frac{c}{c - v} \right) \quad (2.2.4)$$

Assim, obtivemos o tempo medido pelo grande relógio, desta vez calculado no referencial  $B$  ( $\textcircled{i}_B$ ).

### Juntando as peças

Finalmente, neste último passo, introduzimos o nosso elemento chave: o tempo registado pelo grande relógio deve ser o mesmo, independentemente do referencial usado para o calcular:

$$\textcircled{i}_A = \textcircled{i}_B. \quad (2.2.5)$$

Substituindo pelas expressões previamente obtidas, podemos isolar o fator  $\gamma_v$ :

$$\textcircled{i}_A = \textcircled{i}_B \implies \gamma_v \left( \frac{c + v}{c} \right) = \frac{1}{\gamma_v} \left( \frac{c}{c - v} \right) \implies \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.2.6)$$

Encontrámos assim a expressão que nos permite determinar o **Fator de Lorentz** em função da velocidade relativa entre referenciais. É importante notar que  $\gamma_v$  é sempre maior ou igual a 1: exatamente 1 quando  $v = 0$  e maior que 1 sempre que  $v \neq 0$ , já que a velocidade de qualquer referencial é sempre inferior à da luz.

## Limite Clássico

Observemos o comportamento do fator de Lorentz em situações específicas:

- Quando a velocidade do referencial comparado é 0 (repouso em relação a nós), o fator gama tem valor 1. Neste caso, a equivalência de tempo entre referenciais é exatamente 1 : 1, ou seja, o tempo decorre ao mesmo ritmo.
- Para velocidades típicas do quotidiano, muito baixas comparadas à velocidade da luz, o termo  $\frac{v^2}{c^2}$  é praticamente 0. Assim, o denominador é aproximadamente 1, o que implica  $\gamma_v \approx 1$  e uma equivalência de tempo entre referenciais muito próxima de 1 : 1.

Isto coincide com a nossa experiência do dia a dia, em que um fenómeno tem a mesma duração quer estejamos em repouso ou em movimento (a velocidades do quotidiano, ou seja, muito baixas em comparação com a velocidade da luz):

$$\boxed{\Delta t' \approx \Delta t} \quad \text{quando } v \ll c \quad (2.2.7)$$

Para ilustrar o quão imperceptível este efeito é no dia a dia, podemos imaginar o nosso amigo num comboio extremamente veloz, viajando a 600 km/h, enquanto nós permanecemos parados na estação. Ao realizar os cálculos, verificamos que, por cada hora que passa no nosso relógio, o relógio do nosso amigo atrasa-se apenas cerca de meio nanosegundo<sup>1</sup>. Na prática, seriam necessárias velocidades comparáveis à da luz para que surgissem diferenças temporais significativas.

### Comentário do Autor

Em todos os casos relevantes, haverá na abordagem um segmento chamado “Limite Clássico”, onde mostramos como os efeitos da teoria da relatividade, quando aplicados a velocidades do quotidiano, se tornam compatíveis com a experiência do dia a dia. Na maior parte das vezes, este segmento será oculto na tese, pois não difere significativamente da abordagem tradicional.

## Conclusão

Concluímos então que a passagem do tempo não é igual entre referenciais em movimento relativo e que depende diretamente da sua velocidade relativa. Observamos o tempo a passar mais devagar no referencial em movimento relativamente a nós — olharíamos para uma nave *hiperveloz* e veríamos como se tudo no seu interior se movesse em câmara lenta. Este fenómeno é precisamente a **dilatação do tempo**.

Obtivemos a expressão que relaciona os intervalos de tempo medidos nos dois referenciais que descrevem o mesmo fenómeno:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma_v}, \quad \text{onde} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.2.8)$$

<sup>1</sup>Mais precisamente, aproximadamente 0,0000000056 segundos.

Aqui,  $\Delta t$  representa o intervalo de tempo medido no referencial em repouso (isto é, o nosso), enquanto  $\Delta t'$  corresponde ao intervalo medido no referencial com velocidade  $v$  relativamente a nós.

Uma questão muito comum quando se fala de dilatação do tempo, e de outros fenómenos relativistas como a contração do espaço (que exploraremos na próxima secção), é que a velocidade relativa é simétrica.

Por exemplo, posso ver o meu amigo a mover-se com velocidade  $v$ , mas, pela simetria, no referencial dele sou eu que me movo com velocidade  $v$  no sentido contrário. De acordo com a dilatação do tempo, eu veria o tempo do meu amigo passar mais devagar — tudo em câmara lenta, incluindo o envelhecimento — mas, pelo mesmo raciocínio, ele veria o meu tempo passar mais devagar. Parece paradoxal: como é que ambos podem ver o outro envelhecer mais lentamente?

É exatamente esta lógica que conduz ao **Paradoxo dos Gêmeos** que iremos abordar no final deste capítulo. Se dois gémeos em movimento relativo vêem mutuamente que o outro envelhece mais devagar, quando se voltam a reunir, quem envelheceu de facto mais?

### 🔗 Generalização a 4D

### 🔗 Exercícios Resolvidos

#### 2.2.3 Contração de Espaço

Na secção anterior descobrimos que a passagem do tempo não é universal entre referenciais. Um passo natural é então questionar se o mesmo acontecerá com as medições espaciais: será que o comprimento que eu meço para a carruagem de um comboio em movimento é o mesmo que o meu amigo, que viaja dentro dela, mede?

É precisamente esse o tema desta secção, onde exploraremos as consequências da Relatividade na medição de comprimentos entre referenciais.

Quando o comprimento de um objeto é medido no seu próprio referencial de repouso, o valor obtido designa-se por **comprimento próprio** do objeto.

#### Comentário do Autor

Esta experiência irá ser ligeiramente diferente de métodos tradicionais, não porque seja uma melhor metodologia, mas sim para manter a mesma estrutura da experiência anterior, baseando-se na mesma ideia de grande lanterna e grande relógio, modificando apenas ligeiramente a forma como é feita. Desta vez, a nave que carrega a grande lanterna envia codificado nos pulsos de luz não a duração de um segundo seu, mas sim o comprimento da sua nave no seu referencial.

Consideremos então a seguinte experiência:

## Experiência da Distância

**Configuração da Experiência:** Nesta experiência continuaremos com a mesma configuração da experiência anterior, com duas naves no espaço: a nossa,  $A$ , e a do nosso amigo,  $B$ , que se afasta de nós a uma velocidade constante  $v$ . Porém, desta vez queremos que o nosso amigo nos transmita de alguma forma o comprimento da sua nave.

Para isso, a configuração da nave  $B$  é ligeiramente diferente: na traseira possui uma antena em vez de uma lanterna, e na frente um espelho. O procedimento da experiência é o seguinte:

1. O nosso amigo, na nave  $B$ , ativa a antena situada na traseira da nave, que emite dois feixes de luz, um em cada direção.
2. Um dos feixes dirige-se imediatamente para nós (nave  $A$ ), enquanto o outro percorre toda a extensão da nave  $B$ , colide com o espelho, é refletido e volta a percorrer o comprimento da nave antes de se dirigir finalmente para nós.
3. No referencial  $A$ , registaremos o tempo entre a chegada desses dois feixes de luz, utilizando o nosso grande relógio.

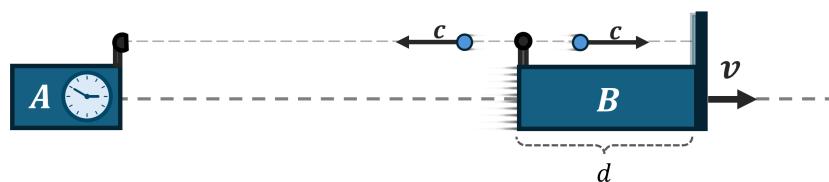
Mais uma vez, o ponto crucial desta experiência é que, ao fazermos os cálculos para prever o tempo medido pelo grande relógio, o valor obtido deve ser o mesmo, independentemente do referencial utilizado. Nesta experiência, mantemos a mesma notação —  $\odot_A$  e  $\odot_B$  — para o tempo medido pelo grande relógio visto nos dois referenciais.

A Figura 2.9 e a Figura 2.10 ilustram a experiência do ponto de vista dos referenciais  $A$  e  $B$ , respectivamente. Aqui  $d_0$  será comprimento próprio da nave  $B$  e  $d$  será o comprimento da nave  $B$  quando medido no referencial  $A$ .

**Nota:** É importante perceber porque é que os dois feixes de luz são emitidos pela mesma antena. Poderíamos pensar: “Porque não emitir, ao mesmo tempo, dois pulsos de luz — um na frente e outro na traseira da nave — para codificar diretamente o comprimento da nave?” Esta abordagem não funcionaria, pois, como vimos na secção **Simultaneidade de Eventos I**, esses dois eventos seriam simultâneos apenas no referencial do nosso amigo. Noutros referenciais, essa simultaneidade não se mantém, complicando toda a análise. Por isso, optamos por um único evento — o disparo de uma antena — que gerará os dois pulsos de luz.

### Referencial $A$

A experiência observada no referencial onde  $A$  está em repouso está ilustrada na figura abaixo:



**Figura 2.9:** Situação vista do Referencial  $A$ .

Iremos agora calcular o valor medido pelo grande relógio quando calculado no referencial  $A$  ( $\odot_A$ ). Precisamos de calcular a que distância estão os feixes entre si quando finalmente ambos se deslocam na mesma direção, isto é, após o feixe da direita refletir no espelho. Para tal obtemos o tempo que o feixe direito demora a chegar ao espelho; usando o método do tempo de colisão:

$$t_{\text{espelho}} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade de convergência}} = \frac{d}{c-v} \quad (2.2.9)$$

onde a velocidade de convergência é  $c-v$  porque, no referencial  $A$ , o espelho (fixo na nave  $B$ ) desloca-se com velocidade  $v$  na mesma direção que o feixe.

Durante este tempo ambos os feixes deslocaram-se (cada um para o seu lado) à velocidade da luz  $c$ . A distância percorrida por cada feixe é  $ct_{\text{espelho}}$ , logo a distância entre os dois feixes imediatamente após a reflexão é:

$$d_{\text{feixes}} = 2ct_{\text{espelho}} = 2d \frac{c}{c-v} \quad (2.2.10)$$

Agora que ambos os feixes se dirigem para  $A$ , sabemos que quando o primeiro colidir com o grande relógio o segundo encontra-se a uma distância  $d_{\text{feixes}}$ . Uma vez que este segundo feixe percorre essa distância à velocidade  $c$ , o tempo entre colisões medido pelo grande relógio é:

$$\odot_A = \frac{d_{\text{feixes}}}{c} = 2d \frac{c}{c(c-v)} = \frac{2d}{c-v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\odot_A = \frac{2d}{c-v}} \quad (2.2.11)$$

### Referencial $B$

A experiência observada no referencial onde  $B$  está em repouso está ilustrada na figura abaixo:



**Figura 2.10:** Situação vista do Referencial  $B$ .

Mais uma vez mediremos a distância entre os dois feixes imediatamente após o feixe da direita refletir no espelho. Nesta perspectiva o raciocínio é mais simples: como neste referencial o espelho está em repouso relativamente à lanterna, cada feixe percorreu a mesma distância  $d_0$  — cada um na sua direção — pelo que a separação total entre eles será de:

$$d_{\text{feixes}} = 2d_0 \quad (2.2.12)$$

Agora, com ambos os feixes a deslocarem-se em direção ao grande relógio, podemos determinar o intervalo de tempo entre as duas colisões. Quando o primeiro feixe atingir a nave  $A$ , que se move com velocidade  $v$ , o segundo estará a uma distância  $d_{\text{feixes}}$  do relógio. Aplicando o método do tempo de

colisão, o intervalo de tempo decorrido até à chegada do segundo feixe é dado por:

$$t_{\text{colisão}} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade de convergência}} = \frac{d_{\text{feixes}}}{c - v} = \frac{2d_0}{c - v}, \quad (2.2.13)$$

onde a velocidade de convergência  $c - v$  resulta do facto de o feixe se aproximar a  $c$  enquanto o grande relógio se afasta a  $v$ .

Relembreamos que o intervalo de tempo calculado acima corresponde ao observado no referencial do nosso amigo (referencial  $B$ ). No entanto, o grande relógio em  $A$  encontra-se em movimento relativo a  $B$ , e portanto marca o tempo a um ritmo diferente. Para determinar o intervalo medido pelo grande relógio, é necessário converter o tempo obtido para o referencial de  $A$  usando o fator de Lorentz  $\gamma_v$ :

$$\textcircled{1}_B = \frac{t_{\text{colisão}}}{\gamma_v} = \frac{2d_0}{\gamma_v(c - v)} \implies \boxed{\textcircled{1}_B = \frac{2d_0}{\gamma_v(c - v)}} \quad (2.2.14)$$

### Juntando as Peças

Finalmente, neste último passo, introduzimos o nosso elemento chave: o tempo registado pelo grande relógio deve ser o mesmo, independentemente do referencial usado para o calcular:

$$\textcircled{1}_A = \textcircled{1}_B. \quad (2.2.15)$$

Substituindo pelas expressões previamente obtidas, podemos isolar a distância própria da nave  $d_0$ :

$$\textcircled{1}_A = \textcircled{1}_B \implies \frac{2d}{c - v} = \frac{2d_0}{\gamma_v(c - v)} \implies \boxed{d_0 = \gamma_v d} \quad (2.2.16)$$

Obtemos então a expressão que nos permite determinar a **distância própria** da nave  $B$ ,  $d_0$ , em função da distância medida no referencial  $A$ ,  $d$ , e da velocidade relativa  $v$  entre os referenciais.

### Conclusão

Concluímos então que as medições no espaço também não são universais entre referenciais em movimento relativo, e que mais uma vez dependem diretamente da sua velocidade relativa. Iremos observar qualquer objeto com o seu comprimento contraído na direção em que se desloca, onde quanto maior for a velocidade maior será a deformação. Designamos este fenómeno de **contração do espaço**.

Obtivemos a expressão que relaciona as medições feitas por dois referenciais em movimento, sobre o comprimento:

$$d_0 = \gamma_v d \quad (2.2.17)$$

Onde  $d_0$  é comprimento próprio do objeto e  $d$  é comprimento do objeto quando medido por um referencial a uma velocidade relativa de  $v$  a este.

 **Límite Clássico**

 **Generalização a 4D**

 **Exercícios Resolvidos**

## 2.2.4 Simultaneidade de Eventos II

Na primeira secção sobre Simultaneidade de Eventos vimos que dois eventos que são simultâneos num dado referencial podem não o ser noutro. Existe, portanto, um desfasamento temporal entre eles. Este facto é fundamental: num referencial, quaisquer dois relógios podem estar perfeitamente sincronizados — marcando o mesmo segundo em simultâneo —, mas, devido a esse desfasamento, um observador em movimento relativo verá esses diferentes relógios marcar o mesmo segundo em instantes diferentes, parecendo assim dessincronizados. Uma questão central será então determinar qual o valor exato desse desfasamento.

### Comentário do Autor

Agora, possuindo já alguma maturidade quanto às consequências da Relatividade, podemos regressar à nossa primeira experiência mental: a simultaneidade de eventos. Desta vez, iremos abordá-la de forma quantitativa, o que nos permitirá calcular o desfasamento de relógios entre referenciais distintos — um passo crucial para a futura derivação das transformações de Lorentz.

### Experiência do Comboio II (Cronometrada)

**Configuração da Experiência:** Daremos continuidade à configuração da experiência do comboio apresentada em 2.2.1. Desta vez, focar-nos-emos exclusivamente no referencial  $B$ , que observa o comboio a mover-se com velocidade  $v$ . O nosso objetivo será analisar com maior detalhe o tempo necessário para os pulsos de luz percorrerem o seu trajeto e determinar o desfasamento temporal entre a lâmpada da esquerda (que acende primeiro) e a da direita (que acende por último).

Imaginemos, no referencial  $B$  que vê a carruagem em movimento, que o comprimento total do comboio é  $d$ . Assim, cada metade terá um comprimento de  $d/2$ , conforme ilustrado na Figura 2.11.

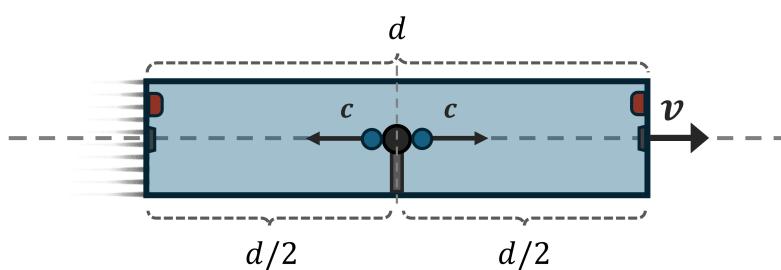


Figura 2.11: Referencial  $B$  - a carruagem move-se com velocidade  $v$

### Notações usadas:

$T_E$  - Tempo que o pulso de luz esquerdo demora a colidir com a parede esquerda.

$T_D$  - Tempo que o pulso de luz direito demora a colidir com a parede direita.

$\Delta T$  - Diferença temporal (*desfasamento*) entre o acender da lâmpada esquerda e da lâmpada direita.

Para obter  $T_E$  e  $T_D$ , utilizaremos novamente o **Método do Tempo de Colisão**.

- Para ambos os casos, a distância inicial a percorrer é  $d/2$ .
- Na colisão à esquerda, a velocidade de convergência é a soma das velocidades das duas partes:  $c + v$ , onde  $c$  é a velocidade do pulso esquerdo e  $v$  é a velocidade da parede esquerda.
- Na colisão à direita, a velocidade de convergência é a diferença entre as velocidades das duas partes:  $c - v$ , onde  $c$  é a velocidade do pulso direito e  $v$  é a velocidade da parede direita.

Calculando os tempos de colisão:

$$T_E = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{c+v} \right) \quad T_D = \frac{d}{2} \left( \frac{1}{c-v} \right) \quad (2.2.18)$$

O **desfasamento** representa o intervalo de tempo entre o acender da lâmpada da esquerda e o acender da lâmpada da direita.

Matematicamente, este desfasamento é simplesmente a diferença entre o tempo necessário para acender a lâmpada da direita ( $T_D$ ) e o tempo necessário para acender a lâmpada da esquerda ( $T_E$ ):

$$\square_T = T_D - T_E \quad (2.2.19)$$

Substituindo  $T_D$  e  $T_E$  e simplificando o resultado:

$$\begin{aligned} \square_T &= \frac{d}{2} \left( \frac{1}{c-v} \right) - \frac{d}{2} \left( \frac{1}{c+v} \right) \\ &= \frac{d}{2} \left( \frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) = \frac{d}{2} \left( \frac{c+v}{c^2-v^2} - \frac{c-v}{c^2-v^2} \right) \\ &= \frac{d}{2} \frac{(c+v) - (c-v)}{c^2-v^2} = \frac{dv}{c^2-v^2} = \frac{dv}{c^2} \gamma_v^2 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Obtivemos então o desfasamento temporal entre dois eventos que eram simultâneos no referencial  $A$  quando observados no referencial  $B$ , que se move relativamente a  $A$ .

Uma nota importante é que  $d$  não é a distância medida por  $B$  entre os acontecimentos, mas sim o comprimento da carruagem observado por  $B$  enquanto a carruagem se move. Este comprimento corresponde à distância entre os observadores de  $A$  que presenciam os eventos.

No referencial  $A$ , onde a carruagem está em repouso, o comprimento próprio da carruagem — ou seja, a distância entre os dois eventos — é dada por  $d_0 = \gamma_v d$ .

Assim, o desfasamento temporal pode ser reescrito como:

$$\square_T = \frac{dv}{c^2} \gamma_v^2 = \frac{d_0 v}{c^2} \gamma_v$$

(2.2.21)

## Conclusão

Se dois eventos acontecem simultaneamente num referencial, então, para outro referencial em mo-

vimento relativo com velocidade  $v$ , estes eventos terão um desfasamento temporal dado por:

$$\square_T = \frac{d_0 v}{c^2} \gamma_v \quad (2.2.22)$$

O tempo de desfasamento observado neste referencial aumenta com a distância  $d_0$  entre os acontecimentos no referencial onde eles são simultâneos e com a velocidade relativa  $v$  entre os referenciais.

Isto é muito importante para calcular a **dessincronização** dos relógios, como já tínhamos sugerido. Imaginemos a seguinte situação: no nosso referencial, temos dois relógios sincronizados a uma distância de 1 metro ( $d_0 = 1$ ). Se um amigo passar por nós à metade da velocidade da luz ( $v = \frac{1}{2}c$ ), ele veria os relógios desfasados no tempo por aproximadamente 0,6 segundos.

Aumentar a distância entre os relógios no referencial original (o nosso) para o dobro faria com que o desfasamento também dobrasse. Se mantivermos a distância original de 1 metro, mas aumentarmos a velocidade do nosso amigo para 99% da velocidade da luz, o desfasamento cresceria para aproximadamente 7 segundos!

Este conceito permite-nos caracterizar a quebra de simultaneidade de uma forma quantitativa e terá extrema importância numa das próximas secções, onde discutiremos as **Transformações de Lorentz**.

### 🔗 **Límite Clássico**

### 🔗 **Generalização a 4D**

### 🔗 **Exercícios Resolvidos**

## 🔗 **2.3 Gráficos de Espaço-Tempo**

### **Comentário do Autor**

Embora esta secção seja essencial para consolidar uma compreensão sólida do uso dos Gráficos de Espaço-Tempo, a abordagem proposta não se afasta significativamente da tradicional.

### 🔗 **2.3.1 Introdução a gráficos de Espaço-Tempo**

### 🔗 **Objetos em repouso e em movimento**

### 🔗 **Dependência do Referencial**

### 🔗 **2.3.2 Unidades do Sistema Internacional (SI)**

### **Comentário do Autor**

Nesta secção fazemos a transição das unidades que temos usado — baseadas em barras e ciclos — para o sistema internacional (SI).

### 2.3.3 Unidades Naturais

#### Comentário do Autor

Ao introduzirmos as unidades naturais, a intenção é utilizá-las ao longo de toda a abordagem. No entanto, nos exercícios serão incluídas conversões das fórmulas — apresentadas em unidades naturais — para o sistema internacional (*SI*). Embora a passagem de *SI* para unidades naturais seja normalmente mais simples, praticar o sentido inverso ajuda a consolidar a compreensão dimensional e a ganhar fluência nestas conversões.

### Redefinir a Unidade de distância

### 2.3.4 Cones de Luz

## 2.4 Transformações de Lorentz

Até aqui, as nossas experiências mentais mostraram-nos que o movimento pode distorcer distâncias, alterar o ritmo do tempo e até desfazer a ideia de simultaneidade entre referenciais em movimento relativo.

Surge então uma questão natural: como se traduzem esses efeitos na forma como registamos os eventos? De que modo se relacionam as coordenadas de um mesmo acontecimento quando medidas em diferentes referenciais?

#### Comentário do Autor

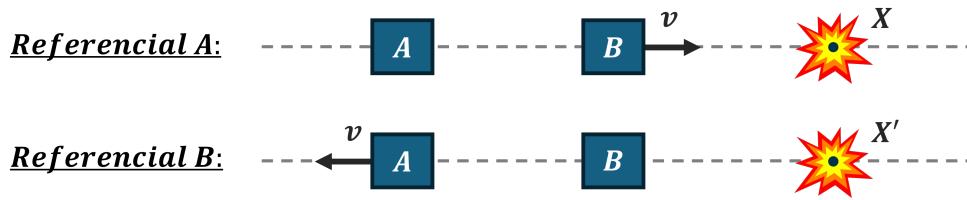
Uma das partes mais importantes na aprendizagem da Relatividade Restrita é compreender a origem das Transformações de Lorentz. A literatura tradicional tende a recorrer a métodos mais abstratos: muitas vezes assume que as equações têm a mesma forma das transformações de Galileu, mas com um fator adicional  $\gamma$  a ser determinado; ou então parte de grandezas invariantes (intervalo invariante entre eventos) e procura equações que as preservem.

Nesta abordagem proponho um caminho mais natural e sequencial: se as Transformações de Lorentz são equações que relacionam coordenadas de um mesmo evento em referenciais distintos, então podemos construí-las diretamente a partir dos efeitos que já estudámos.

Para isso, iremos combinar os resultados das três últimas experiências mentais numa derivação intuitiva, que nos fornecem os três ingredientes fundamentais: a dilatação do tempo, a contração do espaço e a dessincronização dos relógios.

### 2.4.1 Cenário Inicial

Imaginemos duas naves a viajar ao longo de uma linha reta no espaço: a nossa nave, designada por  $A$ , e a nave do nosso amigo, designada por  $B$ . Para a nave  $A$ , a nave  $B$  desloca-se com velocidade constante  $v$  na direção positiva; para a nave  $B$ , é a nave  $A$  que se desloca com a mesma velocidade constante  $v$  na direção negativa. A configuração descrita encontra-se ilustrada na Figura 2.12.



**Figura 2.12:** Configuração inicial vista dos referenciais A e B

Suponhamos que ocorre uma explosão pontual num instante e num ponto específicos do espaço. Esse evento será registado por ambas as naves, cada uma atribuindo-lhe as suas próprias coordenadas. Quando observado por *A*, chamaremos a esse acontecimento evento *X*; quando observado a partir de *B*, designá-lo-emos por evento *X'*. Mas como se relacionam essas duas descrições? De que modo diferem as coordenadas atribuídas por cada nave?

Para proceder ao registo do evento, cada nave precisa primeiro de construir o seu próprio sistema de coordenadas:

- **Referencial A** - Construído a partir da nossa posição no espaço (na nave *A*), e que chamaremos simplesmente de referencial *A*.
- **Referencial B** - Construído pelo nosso amigo (na nave *B*), que se encontra em movimento uniforme em relação a nós com velocidade *v*. Ele chamará ao seu sistema de referencial *B*.

### 2.4.2 Definição da Origem Espacial

Cada sistema de coordenadas define a sua origem espacial da forma mais natural possível:

- Para a nave *A*, a nossa posição é a origem:  $x = 0$ .
- Para a nave *B*, a posição do nosso amigo é a origem:  $x' = 0$ .

Para distinguir as coordenadas das duas descrições, todas as coordenadas em *B* serão assinaladas com um apóstrofo (').

### 2.4.3 Definição da Origem Temporal

Como as naves se movem apenas ao longo de uma linha reta, haverá um instante em que passam exatamente pelo mesmo ponto do espaço. Esse encontro será tomado como a origem temporal em ambas as descrições:

- Para *A*:  $t = 0$ .
- Para *B*:  $t' = 0$ .

## 2.4.4 Conversão de Coordenadas de um Evento

Imaginemos que o evento  $X$  foi registado pela nave  $A$  com coordenadas  $(t_X, x_X)$ :

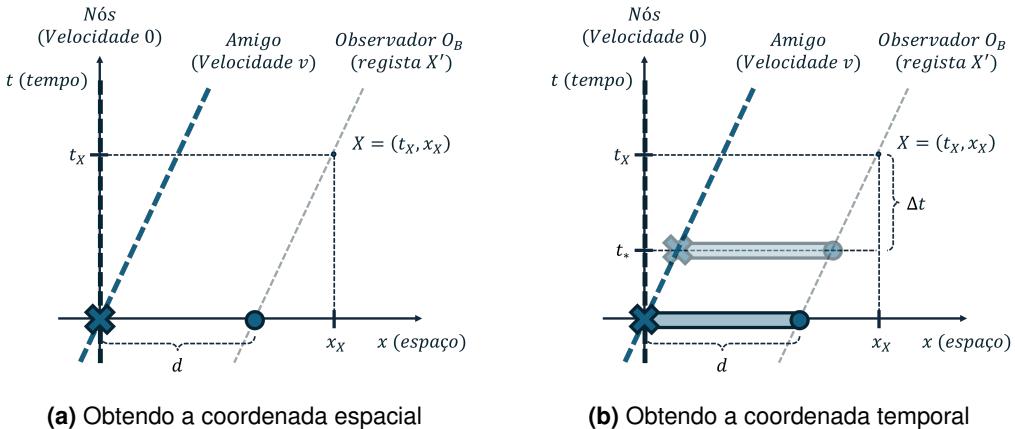
Isto indica que o observador de  $A$  que registou o evento  $X$ , observador esse que designaremos por  $O_A$ , encontra-se a  $x_X$  unidades de distância da origem espacial, e no instante do evento o seu relógio marcava  $t_X$  unidades de tempo (após a origem temporal).

Quais seriam então as coordenadas  $(t'_X, x'_X)$  do mesmo evento segundo a nave  $B$ ? Para responder, focamo-nos no observador  $O_B$  associado a  $B$ , que regista o evento como  $X'$ .

Então para o observador  $O_B$ :

- Qual é a sua distância  $x'_X$  à origem do referencial  $B$ ?
- Qual é o tempo  $t'_X$  indicado pelo seu relógio no momento do evento?

É importante reforçar que, embora ambos registem o mesmo evento,  $O_A$  e  $O_B$  são observadores distintos, cada um associado à sua própria nave (referencial).



**Figura 2.13:** Ilustração do cenário inicial no Referencial  $A$

Na Figura 2.13 temos o cenário visto pelo nosso referencial  $A$ : o evento  $X$  está assinalado e como esperado é registado pelo observador do nosso referencial  $A$ ,  $O_A$ , que está na posição  $x = x_X$  quando o seu relógio marca tempo  $t = t_X$ . As linhas de universo quer do nosso amigo quer de  $O_B$  também estão representadas, onde a cruz e o círculo mostram respetivamente as suas posições quando  $t = 0$ .

A estratégia para obter as coordenadas de  $X' = (t'_X, x'_X)$  começa por calcular primeiro a coordenada espacial e, só depois, a temporal, seguindo os seguintes passos:

- **Coordenada espacial ( $x'_X$ ):**

No referencial  $A$ , obtemos a distância  $d$  do nosso amigo, que é a origem espacial do referencial  $B$ , até ao observador  $O_B$ . Em seguida, convertemos essa distância  $d$  para a correspondente no referencial  $B$ , ou seja  $d_0$ , através do efeito de contração do espaço:

$$d_0 = \gamma_v d.$$

Esta será a distância de  $O_B$  à origem (nossa amiga) no referencial  $B$ , e, portanto, temos

$$x'_X = d_0. \quad (2.4.1)$$

- **Coordenada temporal ( $t'_X$ ):**

Ao determinar a coordenada temporal  $t'_X$  de um evento  $X$  no referencial  $B$ , não basta considerar apenas a dilatação do tempo. Isto porque, além da dilatação, existe o efeito da **dessincronização de relógios**.

Em  $t = 0$  no referencial  $A$ , tanto o nosso relógio como o do nosso amigo (origem do referencial  $B$ ) marcam 0 unidades de tempo. No entanto, devido à dessincronização de relógios, o relógio do observador  $O_B$  (que mede o evento  $X$  no referencial  $B$ ) encontra-se desfasado e não marca 0 unidades de tempo nesse instante.

Para levarmos isso em conta, seguimos os seguintes passos:

1. Determinar o instante  $t^*$  no referencial  $A$  em que o relógio de  $O_B$  marca 0 unidades de tempo.
2. Medir o intervalo de tempo  $\Delta t$  no referencial  $A$  entre  $t^*$  e o instante do evento  $X$ :

$$\Delta t = t_X - t^*. \quad (2.4.2)$$

3. Converter este intervalo para o referencial  $B$ , usando a dilatação do tempo:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma_v}. \quad (2.4.3)$$

Este  $\Delta t'$  corresponde ao tempo que passou no relógio de  $O_B$  desde que ele marcou 0 unidades de tempo até ao evento  $X'$ .

4. Finalmente, a coordenada temporal do evento  $X'$  no referencial  $B$  é:

$$t'_X = \Delta t'. \quad (2.4.4)$$

### Obtendo a coordenada espacial (Figura 2.13a)

Podemos medir a distância  $d$  entre  $O_B$  e o nosso amigo no instante  $t = 0$ . Uma forma é obter a posição  $x$  de  $O_B$  no instante  $t = 0$  e comparar com posição da origem do referencial  $B$  no instante  $t = 0$ , que é  $x = 0$ . Sabemos que  $O_B$  está na posição  $x_X$  no instante  $t_X$ , e que se move com o referencial  $B$  a velocidade  $v$ , logo

$$d = x_X - vt_X. \quad (2.4.5)$$

Convertemos essa distância para o referencial  $B$ , que será a distância que  $O_B$  está da sua origem, ou seja  $x'_X$ :

$$x'_X = d_0 = \gamma_v d = \gamma_v (x_X - vt_X). \quad (2.4.6)$$

Obtemos então a equação que calcula a coordenada espacial do evento  $X'$  em função das coordenadas do evento  $(t_x, x_X)$  no referencial  $A$ :

$$x'_X = \gamma_v (x_X - vt_X) \quad (2.4.7)$$

### **Obtendo a coordenada temporal (Figura 2.13b)**

Lembrando a equação do desfasamento  $\square_T = \frac{d_0 v}{c^2} \gamma_v$ , podemos calcular o desfasamento entre os relógios  $B$  e  $O_B$ , obtendo o valor de  $t^*$ :

$$t_* = \square_T = \frac{d_0 v}{c^2} \gamma_v = x'_X \frac{v \gamma_v}{c^2}. \quad (2.4.8)$$

Calculamos de seguida o intervalo de tempo decorrido deste instante  $t^*$  até ao instante do evento  $t_X$ , convertendo este intervalo para o referencial de  $O_B$  para saber que valor o relógio dele mede no instante do evento  $X'$ :

$$t'_X = \frac{\Delta t}{\gamma_v} = \frac{t_X - t_*}{\gamma_v} = \gamma_v \left( t_X - \frac{v}{c^2} x_X \right). \quad (2.4.9)$$

#### **Prova**

$$\begin{aligned} t'_X &= \frac{\Delta t}{\gamma_v} = \frac{t_X - t_*}{\gamma_v} = \frac{1}{\gamma_v} \left[ t_X - x'_X \frac{v \gamma_v}{c^2} \right] = \frac{1}{\gamma_v} \left[ t_X - (x_X - vt_X) \frac{v \gamma_v^2}{c^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\gamma_v} \left[ \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma_v^2 \right) t_X - \gamma_v^2 \frac{v}{c^2} x_X \right] = \frac{1}{\gamma_v} \left[ \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} + \frac{v^2}{c^2 - v^2} \cancel{\frac{v^2}{c^2}} \right) t_X - \gamma_v^2 \frac{v}{c^2} x_X \right] = \\ &= \frac{1}{\gamma_v} \left[ \left( \frac{c^2 - v^2 + v^2}{c^2 - v^2} \right) t_X - \gamma_v^2 \frac{v}{c^2} x_X \right] = \frac{1}{\cancel{\gamma_v}} \left( \gamma_v^2 t_X - \gamma_v^2 \frac{v}{c^2} x_X \right) = \\ &= \gamma_v \left( t_X - \frac{v}{c^2} x_X \right) \blacksquare \end{aligned}$$

Obtemos então a equação que calcula a coordenada temporal do evento  $X'$  em função das coordenadas do evento  $(t_X, x_X)$  no referencial  $A$ :

$$t'_X = \gamma_v \left( t_X - \frac{v}{c^2} x_X \right) \quad (2.4.10)$$

### **Juntando as peças**

Com ambas as componentes que acabámos de calcular, podemos construir as coordenadas do evento  $X' = (t'_X, x'_X)$  usando as coordenadas de  $X = (t_X, x_X)$ :

$$x'_X = \gamma_v (x_X - vt_X), \quad t'_X = \gamma_v \left( t_X - \frac{v}{c^2} x_X \right). \quad (2.4.11)$$

Se quisermos obter as relações na direção oposta, obtendo  $X$  através de  $X'$ , seria só repetir todo o processo substituindo as coordenadas  $(t_X, x_X)$  por  $(t'_X, x'_X)$  e vice-versa, usando desta vez a velocidade relativa  $-v$  (para o referencial  $B$  a nave  $A$  move-se com o mesmo valor de velocidade mas na direção oposta). Isto produziria as seguintes equações:

$$x_X = \gamma_v(x'_X + vt'_X), \quad t_X = \gamma_v \left( t'_X + \frac{v}{c^2} x'_X \right). \quad (2.4.12)$$

Podemos agora então juntar os dois conjuntos de relações e generalizar para um evento genérico, com coordenadas  $(t, x)$  e  $(t', x')$  em referenciais com um velocidade relativa  $v$  entre si:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Estas equações são as chamadas **Transformações de Lorentz**, escritas no caso particular em que o movimento ocorre ao longo de uma única direção (uma dimensão espacial).

#### **CURIOSIDADE:** Quem foi Hendrik Lorentz?

É importante notar que, neste caso unidimensional, assume-se que os dois referenciais foram sincronizados de modo que, no instante em que as suas origens se cruzam, ambos registam esse evento como tendo coordenadas  $(t, x) = (t', x') = (0, 0)$ .

Nos casos em que tal evento não coincide com estas origens, é sempre possível redefinir temporariamente as origens de cada referencial de modo a satisfazer esta condição, aplicar as transformações de Lorentz, e depois converter os resultados de volta para as coordenadas originais dos referenciais. Esta abordagem garante consistência sem perder generalidade ( [Exercício 2.4.3](#)).

#### **Límite Clássico**

#### **Generalização a 4D**

#### **Exercícios Resolvidos**

## 2.5 Soma Relativista de Velocidades

No inicio do documento vimos que a forma de somar velocidades de Galileu não está de acordo com a realidade: não respeita o Princípio da Invariância da Velocidade da Luz.

Nesta última etapa iremos ver duas abordagens diferentes que irão levar à mesma fórmula de somas de velocidades. Este será o novo método de somar velocidades na teoria da Relatividade de Einstein.

### Comentário do Autor

Chegamos agora ao ponto ideal para revisitar o problema inicial: o **Problema da Soma de Velocidades**. Todo o texto anterior foi construído como um crescendo até este momento; com os conceitos apresentados, o objetivo é agora encontrar a equação que relaciona velocidades medidas por referenciais em movimento relativo.

Nesta abordagem, decidi apresentar dois caminhos:

- **Via transformações de Lorentz:** Este é o culminar de todo o desenvolvimento até aqui, utilizando conversões entre os diferentes referenciais e técnicas de cálculo para determinar as velocidades. Trata-se de um método mais técnico e abstrato.
- **Via experiência mental:** Similar à realizada para a dilatação do tempo, oferece ao leitor um caminho mais intuitivo e prático para obter a equação das velocidades. Demonstra, de forma clara, que os resultados estão de acordo com as transformações de Lorentz.

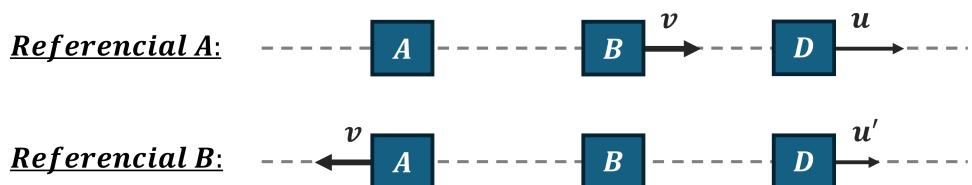
Posteriormente, veremos de forma explícita como este novo método resolve o problema da soma de velocidades — o que não surpreende, pois o modelo foi construído tendo a invariância da velocidade da luz como postulado.

#### 2.5.1 Cenário Inicial

Iremos analisar uma configuração com três objetos no espaço:  $A$ ,  $B$  e  $D$ .

- No **referencial  $A$** ,  $B$  afasta-se com velocidade  $v$  e  $D$  afasta-se com velocidade  $u$ .
- No **referencial  $B$** , é  $A$  que se afasta com velocidade  $v$ , enquanto  $D$  se afasta com velocidade  $u'$ .

Este cenário está ilustrado na Figura 2.14.



**Figura 2.14:** Configuração inicial vista dos referenciais  $A$  e  $B$

O objetivo será o seguinte: se eu, no referencial  $A$ , vejo um objeto a mover-se com velocidade  $u$ , que velocidade  $u'$  terá este objeto no referencial  $B$ ?

#### 2.5.2 Usando as transformações de Lorentz

#### 2.5.3 Usando a Experiência da Sincronização com vários Referenciais

Esta abordagem, com uma experiência semelhante à realizada na secção da Dilatação do Tempo, apesar de mais demorada, usa técnicas mais simples para chegar ao mesmo resultado.

**Configuração da Experiência:** A ideia será fazer uma nova experiência de sincronização adaptada para este novo cenário inicial:

1. Desta vez será a nave  $B$  que carregará o grande relógio, enquanto  $D$  carregará uma grande lanterna.
2.  $D$  enviará dois sinais de luz consecutivos, espaçados por um segundo no relógio dele.
3. No referencial  $B$ , irá ser registado o tempo entre a chegada desses dois sinais de luz usando o grande relógio.

As figuras 2.15 e 2.16 ilustram a experiência do ponto de vista de cada referencial: no referencial  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Mais uma vez, o ponto crucial desta experiência será o mesmo. Iremos calcular o tempo marcado pelo grande relógio em  $B$ , fazendo as contas no referencial  $A$  e no referencial  $B$ ; no final, ambos os valores terão que ser iguais.

### Referencial A

A experiência observada no referencial  $A$  está ilustrada na Figura 2.15:



**Figura 2.15:** Experiência no Referencial A

Usando o mesmo método da secção de dilatação do tempo, a distância entre pulsos de luz será de  $\gamma_u(c + u)$ , sendo a velocidade de convergência  $(c + v)$ . Dividindo a distância pela velocidade de convergência obtemos o tempo de colisão:  $t_{\text{colisão}} = \gamma_u \frac{c+u}{c+v}$ .

Uma vez que este tempo de colisão é medido no Referencial  $A$ , é preciso convertê-lo para o Referencial  $B$ , que se movimenta a velocidade  $v$ ; multiplicando o tempo de colisão por  $1/\gamma_v$  obtemos então o valor registado no grande relógio:

$$\textcircled{1}_A = \frac{\gamma_u}{\gamma_v} \frac{c+u}{c+v}. \quad (2.5.1)$$

### Referencial B

A experiência observada no referencial  $A$  está ilustrada na Figura 2.16:



**Figura 2.16:** Experiência no Referencial B

Usando a mesma lógica, neste caso para  $D$  com velocidade  $u'$ , os pulsos irão ser produzidos com uma distância inicial de  $\gamma_{u'}(c + u')$ . Quando primeiro pulso colidir com  $B$ , o segundo aproxima-se com

uma velocidade de convergência de  $c+0 = c$ , logo o tempo entre pulsos será igual ao tempo de colisão:

$$\textcircled{1}_B = \gamma_{u'} \frac{c+u'}{c}. \quad (2.5.2)$$

### Juntando as peças

Uma vez que ambas as previsões para o valor registado no grande relógio tem de ser iguais, temos:

$$\textcircled{1}_A = \textcircled{1}_B \implies \frac{\gamma_u}{\gamma_v} \frac{c+u}{c+v} = \gamma_{u'} \frac{c+u'}{c}. \quad (2.5.3)$$

Ou seja temos uma equação que relaciona as quantidades  $v$ ,  $u$  e  $u'$ . Como tal, podemos resolver para  $u$  ou  $u'$  em função das outras duas quantidades restantes (deixado como desafio ao leitor). Teremos então as fórmulas relativistas de soma de velocidades:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (2.5.4)$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad (2.5.5)$$

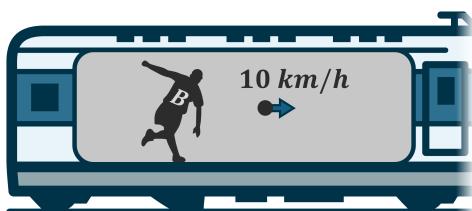
### Limite Clássico

### Generalização a 4D

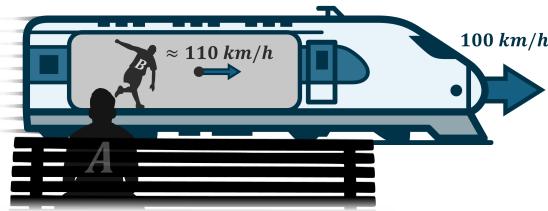
#### 2.5.4 Solução do Problema da Soma de Velocidades

Voltamos agora ao problema da soma de velocidades apresentado no início da abordagem. De acordo com Galileu, a luz que sai de uma lanterna ligada dentro de um comboio em movimento com velocidade  $v$  pareceria viajar a uma velocidade ainda maior para um observador no referencial da estação. No entanto, tal não é confirmado pela experiência: a luz parece sempre ter a mesma velocidade, independentemente do referencial onde é medida.

A Teoria da Relatividade acabou por revelar que a equação que relaciona velocidades entre referenciais é ligeiramente diferente daquela proposta por Galileu. Apesar de intuitiva, a fórmula galileana não estava correta. Mas então como seria o caso da bola dentro do comboio apresentado na Figura 1.3? Aplicando o novo método relativista de soma de velocidades, eis o resultado na Figura 2.17:



(a) Comboio visto de  $B$



(b) Comboio visto de  $A$

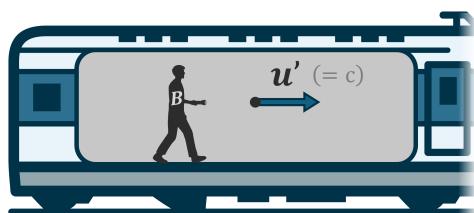
**Figura 2.17:** Ilustração da soma de velocidades relativista.

Desta vez, a velocidade da bola observada por  $A$  já não é exatamente 110 km/h, mas ligeiramente inferior<sup>2</sup>. Na prática, a diferença é tão pequena que usar o valor clássico de 110 km/h introduziria apenas um erro da ordem do tamanho de um átomo por hora — assumindo que a bola mantinha a sua velocidade constante.

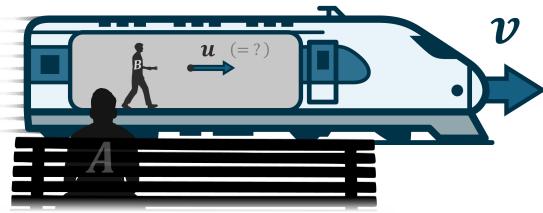
Tal como já vimos no limite clássico, esta proximidade entre os dois resultados deve-se às baixas velocidades envolvidas (tanto da bola como do comboio) quando comparadas com a velocidade da luz.

Com o novo método de soma de velocidades, podemos finalmente abordar o caso da **luz**. Considere-se o cenário da Figura 2.18:

- O **Referencial A**: o observador na estação.
- O **Referencial B**: o observador dentro do comboio.
- $u'$ : a velocidade da luz medida por  $B$ .
- $u$ : a velocidade da mesma luz medida por  $A$ .
- $v$ : a velocidade do comboio (para garantir que o resultado final é independente de  $v$ ).



(a) Comboio visto de  $B$



(b) Comboio visto de  $A$

**Figura 2.18:** Ilustração da soma de velocidades relativista no caso da luz.

Se  $B$ , ao ligar a lanterna, mede a velocidade da luz no seu referencial como  $u' = c$  (Figura 2.18a), então a velocidade dessa luz observada por  $A$  (Figura 2.18b) é:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c. \quad (2.5.6)$$

Ou seja, também no referencial  $A$  a velocidade da luz é observada como  $c$ , respeitando o **Princípio da Invariância da Velocidade da Luz**. Podemos até inverter o raciocínio: se  $A$  mede  $c$  e quisermos saber o valor medido por  $B$ , o resultado será novamente  $c$ .

Assim, encontramos a solução para o **Problema da Soma de Velocidades**, um dos primeiros indícios de que a estrutura do espaço e do tempo precisava de ser reformulada.

## Exercícios Resolvidos

<sup>2</sup>Cerca de 109,99999999999905 km/h.

## 2.6 Efeito de Doppler

### Comentário do Autor

O efeito Doppler é um fenómeno do quotidiano, especialmente interessante quando se trata de ondas luminosas, pois altera a sua cor aparente. Nesta secção, a abordagem consistiria numa experiência mental que conduz à dedução das equações relativísticas do efeito. O objetivo é mostrar, de forma intuitiva, uma das evidências da expansão do universo e preparar o leitor para o conceito de desvio gravitacional para o vermelho, que será explorado na secção seguinte para justificar a necessidade da relatividade geral.

## Efeito de Doppler Relativístico

## 2.7 Geometria de Minkowski

### Comentário do Autor

A presente secção introduz a transição conceptual da geometria euclidiana para a geometria de Minkowski, estrutura matemática que sustenta a formulação da Relatividade Restrita. Partindo dos postulados fundamentais da teoria e das transformações de Lorentz é construído de um novo modelo geométrico do espaço-tempo.

Explora-se, de forma progressiva, o papel das transformações elementares — translações, rotações e *boosts* — e a forma como estas modificam as coordenadas de um mesmo evento em diferentes referenciais inerciais. Esta análise culmina na introdução do **intervalo invariante**, uma quantidade que permanece constante independentemente do referencial escolhido. É introduzida a métrica de Minkowski e o conceito de vetores no espaço-tempo.

### 2.7.1 Intervalo Invariante

### 2.7.2 Vetores de Posição e Velocidade

### 2.7.3 Métrica de Minkowski

## 2.8 Coordenadas de Rindler

### Comentário do Autor

Na abordagem original, as coordenadas de Rindler [14] são introduzidas através de experiências mentais com referenciais acelerados, definição de aceleração própria constante e a respetiva infraestrutura matemática.

O seu valor pedagógico reside em mostrar que a Relatividade Restrita já descreve movimentos acelerados, contrariando a ideia de que se aplica apenas a referenciais inerciais. Isso permite analisar o paradoxo dos gémeos e outros casos realistas com aceleração.

Além disso, prepara o leitor para a Relatividade Geral, ao evidenciar que cada região do espaço-tempo pode ser localmente aproximada pela geometria de Minkowski. Assim, reforça-se que a Relatividade Restrita descreve completamente todos os fenómenos exceto a gravidade, mantendo validade local pelo Princípio da Equivalência.

### 🔗 2.8.1 Referenciais Acelerados

### 🔗 2.8.2 Horizonte de Rindler

## 🔗 2.9 Paradoxos

### Comentário do Autor

Ao explorar a Relatividade Restrita, surgem aparentes contradições que dão origem a diversos paradoxos, resultantes sobretudo das simetrias criadas pelo carácter relativo do movimento. Nesta secção decidi incluir três dos mais ilustrativos:

- **Paradoxo da Causalidade:** Relaciona-se com a ausência de uma simultaneidade universal, questionando se é possível que diferentes observadores discordem sobre a ordem temporal de dois eventos, aparentemente invertendo a relação de causa e efeito.
- **Paradoxo dos Gémeos:** Aborda a aparente quebra de simetria na dilatação do tempo, onde dois gémeos em movimento relativo envelhecem de forma diferente apesar de se moverem à mesma velocidade relativa, levantando questões sobre o que significa “passar o tempo”.
- **Paradoxo da Garagem:** Envolve um carro em alta velocidade que parece caber numa garagem mais pequena devido à contração do espaço, explorando as subtilezas da simultaneidade e da medição de comprimentos em movimento.

Esta secção é essencial para clarificar o que à primeira vista parecem inconsistências, mostrando que, ao contrário do que os paradoxos sugerem, a teoria é profundamente coerente e internamente consistente.

### 🔗 2.9.1 Paradoxo dos Gémeos

### 🔗 2.9.2 Paradoxo da Garagem

## 🔗 2.10 Quadrimomento e outros

### Comentário do Autor

Uma secção que irá explorar a unificação da energia e do momento num único objeto geométrico — o **quadrimomento** — esclarecendo a dinâmica relativista e as leis de conservação no espaço-tempo. Aqui apresentaremos uma derivação da famosa equação de equivalência massa-energia  $E = mc^2$ .

# 3

## Para Além da Relatividade Restrita

### Conteúdo

---

3.1	Princípio de Equivalência . . . . .	46
3.2	Forças de Maré . . . . .	48
3.3	Limitações da Relatividade Restrita . . . . .	48

---

A Teoria da Relatividade Restrita parecia completa: previa corretamente fenómenos observáveis, e lidava bem com velocidades e acelerações. No entanto, as tentativas de incluir a gravidade nesta teoria tornaram claras as suas limitações.

Este capítulo será breve e mostrará como a Relatividade Restrita se revelou insuficiente para incorporar a gravidade, abrindo caminho para a formulação da Relatividade Geral.

#### Comentário do Autor

Este capítulo serve como transição e motivação para a formulação de uma teoria mais geral: a da Relatividade Geral. Iremos identificar as limitações da Relatividade Restrita quando se consideram os efeitos da gravidade, mostrando como isso conduz à ideia de um universo curvo. Esta análise prepara o terreno para o capítulo seguinte, onde exploraremos as ferramentas matemáticas necessárias para descrever este novo cenário.

### 3.1 Princípio de Equivalência

Na relatividade restrita apenas os referenciais inerciais preservam a validade das leis da física, sendo nesse contexto todos equivalentes. Estar num referencial inercial é uma experiência indistinguível de estar em qualquer outro: não sentimos diferenças entre estar parados ou em movimento uniforme. Se viajarmos num comboio-bala japonês (o famoso *Shinkansen*), em movimento rápido mas suave, a sensação é a mesma de estar em repouso. Sem podermos olhar pela janela, não conseguimos distinguir se o comboio se encontra em movimento ou parado.

Já num referencial acelerado a situação é diferente: mesmo vendados, sentimos claramente quando um carro acelera, trava ou faz uma curva. Nestes casos as leis da física não se manifestam de forma simples, surgem forças aparentes e comportamentos inesperados.

Isto acontece porque as diferentes partes de um corpo não aceleram todas ao mesmo tempo. Quando um carro acelera, o banco move-se primeiro e empurra as nossas costas, que comprimem os tecidos vizinhos, que por sua vez transmitem o empurrão até todo o corpo acompanhar o carro. Esta compressão interna é precisamente a sensação física da aceleração. Se todas as partículas do corpo acelerassem de forma simultânea e uniforme, não haveria qualquer compressão nem sentiríamos aceleração.

A gravidade faz exatamente isto: acelera todas as partículas igualmente, sem distinção de posição ou massa. Por isso, quando apenas a gravidade atua, o efeito não é perceptível. Estar em queda livre é, para nós, indistinguível de estar num referencial inercial. Dentro de uma caixa fechada, não conseguiríamos distinguir se estamos a viajar a velocidade constante no espaço vazio ou a cair em direção à Terra. Uma maçã que flutua ao nosso lado poderia estar em ausência de gravidade ou simplesmente a cair connosco. Pelo contrário, quem está na superfície da Terra, aparentemente em repouso, encontra-se na verdade num referencial equivalente a um referencial acelerado: o chão exerce uma força que nos comprime de baixo para cima, tal como o banco do carro. Essa compressão é o que sentimos como “peso”.



(a) Aceleração no carro propaga-se



(b) Aceleração em queda livre é simultânea

**Figura 3.1:** Diferentes acelerações

Isto é o que chamamos de **princípio de equivalência**: um referencial em queda livre é, localmente, indistinguível de um referencial inercial. [12] Em termos práticos, isso significa que, se estivermos, por exemplo, dentro de um elevador em queda livre,<sup>1</sup> não há qualquer experiência que possamos realizar que nos permita determinar se estamos sujeitos a um campo gravitacional.

Um outro exemplo notável é a Estação Espacial Internacional (ISS), que orbita a Terra a cerca de 30 000 km/h. A ISS encontra-se permanentemente em queda livre, mas avança tão depressa que, ao cair em direção à Terra, a curvatura do planeta leva a que a superfície lhe “fuga” continuamente, resultando numa órbita estável. Dentro da estação parece que não existe gravidade (Figura 3.2a): objetos e pessoas flutuam, e sentimo-nos sem peso, como se estivéssemos no espaço profundo. Mas tudo isto é apenas ilusão. Na realidade, a gravidade na ISS é ainda cerca de 90% da que sentimos na superfície da Terra. A estação encontra-se apenas a uns 400 km de altitude — tão perto que, se a Terra tivesse o tamanho de uma bola de ténis, a órbita da ISS ficaria aproximadamente à altura do pelo da bola. Esta escala está representada na Figura 3.2b. A ideia comum de que “na ISS não há gravidade” está, portanto, errada: se não houvesse gravidade, a estação simplesmente seguiria em linha reta, afastando-se da Terra. A sensação de ausência de peso é, na realidade, um resultado direto do princípio de equivalência: como tudo dentro da ISS está em queda livre com a mesma aceleração, não há forças diferentes a comprimir-nos, e por isso sentimos como se a gravidade tivesse desaparecido.

O princípio de equivalência aplica-se apenas **localmente**. Isto significa que, olhando para regiões pequenas do espaço-tempo, o comportamento em queda livre é indistinguível do de um referencial inercial. Mas se considerarmos regiões maiores, aparecem variações que denunciam a presença da gravidade. O exemplo mais evidente são as **forças de maré**.

<sup>1</sup>Na realidade, para cumprir rigorosamente o requisito de validade local do princípio de equivalência, a região deveria ser infinitesimal. No entanto, na maioria dos casos, considerar a região de um elevador fornece uma boa aproximação.

<sup>2</sup>O tamanho da ISS não está à escala.



(a) Dentro da ISS



(b) Distância da ISS à superfície da Terra<sup>2</sup>

Figura 3.2: O princípio de Equivalência na ISS

## 3.2 Forças de Maré

### Comentário do Autor

Na secção anterior abordámos o princípio de equivalência, destacando que este é válido apenas localmente. Nesta secção, explicamos por que isso ocorre e mostramos como, mesmo num referencial em queda livre, é possível detetar a presença de um campo gravitacional ao considerarmos o referencial globalmente. Esta análise revela efeitos que diferem significativamente do esperado num referencial inercial, conhecidos como **forças de maré**. A secção aborda qualitativamente este conceito, recorrendo a ilustrações e explorando consequências como a existência de marés.

## 3.3 Limitações da Relatividade Restrita

### Comentário do Autor

Nesta secção final serão apresentadas experiências mentais em cenários gravitacionais que confrontam diretamente o princípio da equivalência com a relatividade restrita:

- **Desvio gravitacional para o vermelho:** Ilustra possíveis contradições ao combinar efeitos de Doppler com o princípio da equivalência.
- **Máquina de energia infinita:** Explora, de forma hipotética, como a gravidade poderia ser usada para gerar energia de forma cíclica, revelando limites da teoria.

Estes exemplos sugerem que o espaço-tempo não é plano, mas sim possui uma **curvatura**, que será explorada no próximo capítulo.

### 3.3.1 Desvio gravitacional para o vermelho

### 3.3.2 Máquina de Energia Infinita

### 3.3.3 Conclusão

# 4

## Ferramentas Matemáticas Necessárias

### Conteúdo

---

4.1	Variedades . . . . .	52
4.2	Coordenadas Locais . . . . .	61
4.3	Vetores . . . . .	61
4.4	Covetores . . . . .	64
4.5	Tensores . . . . .	64
4.6	Transporte Paralelo . . . . .	65
4.7	Derivada Covariante . . . . .	67
4.8	Geodésicas . . . . .	72
4.9	Métrica . . . . .	73
4.10	Curvatura . . . . .	74

---

Nesta secção vamos introduzir os conceitos matemáticos fundamentais para a formulação da Relatividade Geral. Tal como na Relatividade Restrita, o espaço-tempo tem quatro dimensões. A diferença crucial é que, enquanto no caso restrito o espaço-tempo é plano, aqui ele pode ser curvo — e ao longo deste capítulo veremos de forma concreta o que isso significa. É precisamente essa curvatura que está na origem de muitos efeitos surpreendentes e pouco intuitivos, que tornam a Relatividade Geral uma teoria única.

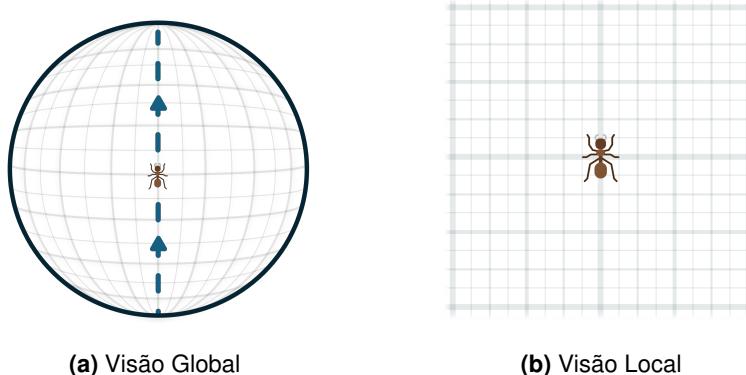
Até agora, sempre que pensámos em geometria, pensámos nela em espaços planos — ou seja, o palco onde tudo acontece é plano. Por exemplo, se quisermos representar um triângulo em 2D, usamos uma folha de papel. Este é o **mundo plano**, o mundo geométrico com o qual estamos mais familiarizados (também chamado formalmente de *espaço euclidiano*).

Mas o que quero dizer com “mundo plano” vai além do que normalmente se associa ao plano em duas dimensões. Uma reta é plana, mas uma circunferência (que chamamos de  $S^1$ ) é curva. Um plano é plano, claro, e uma esfera (a que chamamos  $S^2$ ) é curva. Nestes dois últimos casos conseguimos até ver a curvatura, porque curvam numa direção extra que ainda conseguimos visualizar — uma terceira dimensão.

Este mesmo conceito de curvatura pode ser até aplicado a espaços com mais dimensões. Um espaço de 3 dimensões, por exemplo, pode também ser curvado de várias formas, mas como não conseguimos ver uma quarta dimensão, é mais difícil de imaginar.

Para perceber esta ideia, é útil olhar para um exemplo mais simples: o caso bidimensional. Um espaço 2D pode ser curvado de muitas formas. Uma dessas formas é quando se curva de maneira a fechar-se sobre si mesmo — formando uma superfície esférica,  $S^2$ .

Imaginemos agora uma formiga 2D a viver nesta esfera (Figura 4.1). Localmente, à sua escala, o mundo parece plano, com regras familiares (Figura 4.1b). Mas se a formiga andar sempre em linha reta, eventualmente regressa ao ponto de partida (Figura 4.1a).



**Figura 4.1:** Mundo da formiga

Isto seria completamente estranho para ela: nunca virou, andou sempre em frente, mas voltou ao ponto inicial. Na sua perspetiva, o mundo é finito (pode ser totalmente percorrido), mas ao mesmo tempo ilimitado (não tem barreiras). Este comportamento não existe num plano: um espaço plano finito

tem de ser limitado (como um retângulo, por exemplo).

Para nós, seres tridimensionais, este fenómeno é fácil de entender: vemos o mundo da formiga como uma superfície curva — uma esfera 2D imersa em 3D. Mas a formiga, vivendo num mundo 2D, não consegue visualizar essa curvatura.

Agora podemos fazer a analogia inversa: e se o nosso espaço 3D também curvar sobre si, tal como o da formiga? Por exemplo, se formasse uma hiper-esfera (a que chamamos  $S^3$ ), andar sempre na mesma direção levaria, eventualmente, ao ponto de partida. O universo seria finito mas ilimitado — uma ideia que parece estranha porque, tal como a formiga, não conseguimos ver a dimensão extra onde essa curvatura ocorre.

Este é um exemplo importante: mesmo sem conseguirmos visualizar curvaturas em dimensões superiores, podemos detetar a curvatura através das propriedades do próprio espaço. Quando o comportamento de um espaço diverge daquilo que seria esperado num mundo plano, algo nos diz que estamos perante curvatura.

Neste texto vamos desenvolver ferramentas para explorar estes **mundos exóticos** — espaços com formas incomuns, curvatura e propriedades que desafiam a nossa intuição. Aprenderemos a descrevê-los matematicamente e a navegar neles: construir "mapas"(as chamadas cartas), identificar direções, fazer medições, definir distâncias, detetar curvatura e muito mais.

O estudo da geometria destes mundos, que podem ser analisados rigorosamente de forma matemática, é designado por **Geometria de Riemann**. [15]

### **CURIOSIDADE:** Quem foi Bernhard Riemann?

Todos estes mundos, que partilham estas características, serão formalmente designados por **Variedades**.

#### **Comentário do Autor**

Este capítulo apresenta a estrutura matemática necessária para compreender a Relatividade Geral (material de referência [16]. Os conceitos serão introduzidos de forma intuitiva, seguindo uma abordagem narrativa.

O fio condutor do capítulo pode ser descrito assim:

- Seremos exploradores de "mundos"— no sentido de locais ou espaços — e seremos responsáveis por cartografar todas as suas regiões.
- Como cartógrafos, focar-nos-emos em "mundos" que possam ser descritas por cartas em  $\mathbb{R}^n$ , que chamamos variedades topológicas. Restringir-nos-emos a casos em que as cartas se sobreponem suavemente, isto é, variedades diferenciáveis. Definiremos também curvas como os caminhos nestas variedades.
- As cartas serão os nossos olhos: é através delas que exploramos a variedade. Aprendere-mos a criar e interpretar coordenadas locais e a descrever mudanças de coordenadas entre

cartas.

- Definiremos vetores, que representam direções e intensidades, úteis para descrever, por exemplo, velocidades ao longo de uma curva.
- Introduziremos covetores, que funcionam como réguas da variedade, capazes de medir propriedades dos vetores.
- Com vetores e covetores, surgem os tensores, coleções que funcionam como máquinas: recebem vetores e covetores e produzem um escalar.
- A partir destas ferramentas, surge a questão: o que significa “andar em frente”? Isto leva à noção de transporte paralelo, que permite comparar direções em pontos diferentes.
- A derivada covariante mede quanto um objeto difere da sua versão transportada paralelamente.
- Com ela, definimos rigorosamente as geodésicas, os caminhos que correspondem a “andar sempre em frente”.
- A métrica é uma coleção de réguas (tensor de covetores) definidas localmente, que podem ser transportadas paralelamente para todos os pontos da variedade, mantendo orientação e comprimento.
- Finalmente, a curvatura descreve como o transporte paralelo altera direções ao longo da variedade.

Este guia servirá de fio condutor. O desafio será transformar esta narrativa em conceitos formais, mantendo paralelismos com o quotidiano para aproveitar a intuição natural. Cada secção explicará em detalhe as escolhas feitas e a motivação por detrás delas.

## 4.1 Variedades

Como referimos, seremos exploradores e cartógrafos destes mundos que chamaremos de **variedades**. Para compreender o que significa este conceito, precisamos antes de dar um passo atrás e pensar no que é, em termos matemáticos, “definir um mundo”.

Nesta introdução vamos dar uma visão rápida e intuitiva destes conceitos, deixando as definições formais e os detalhes rigorosos para secções seguintes.

Ora, para definir um mundo, não basta indicar todos os seus locais: precisamos também de saber quais estão perto uns dos outros. Em linguagem matemática, isto significa que não chega listar todos os pontos de um espaço — é necessário descrever a sua **estrutura de vizinhanças**. Sempre que temos um conjunto de pontos munido desta noção de proximidade, temos o que chamamos de **espaço topológico**.

### **Caixa de Ferramentas:** Espaço Topológico

Um espaço topológico é, de forma simplificada, um conjunto de pontos em que faz sentido falar de “pontos próximos” e de vizinhanças. Formalmente, isso é feito escolhendo uma **topologia**: uma classe especial de subconjuntos, chamados *abertos*, que codifica exatamente quais são as vizinhanças possíveis no nosso conjunto de pontos.

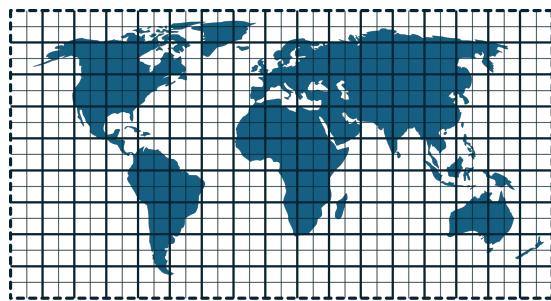
Mas uma **variedade** não é apenas um espaço topológico qualquer: é mais especial. De forma simplificada, uma variedade é um espaço que, localmente, “se parece” com um espaço plano  $\mathbb{R}^n$ .

Formalmente, esse conceito corresponde ao de **Variedade Topológica**: um espaço topológico em que cada ponto possui uma vizinhança que pode ser cartografada num aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Sendo o número  $n$  a **dimensão da variedade**.

Por exemplo, a Terra, vista como uma superfície esférica (Figura 4.2a), é uma variedade de dimensão 2, porque as suas vizinhanças podem ser representadas por cartas planas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  (Figura 4.2b). Se fossem necessárias 3 coordenadas para representar essas regiões, seria uma variedade de dimensão 3, e assim sucessivamente.



(a) Planeta Terra



(b) Projeção para  $\mathbb{R}^2$  (Cilíndrica)

**Figura 4.2:** Terra como variedade  $S^2$

É muito útil trabalharmos em mundos cujas vizinhanças possam ser sempre cartografadas, pois grande parte da nossa exploração será feita através destas cartas. Elas simplificam regiões destes mundos exóticos — muitos tão complexos e multidimensionais que nos são impossíveis de imaginar — para espaços planos (euclidianos), onde estamos habituados a trabalhar e a realizar cálculos matemáticos. Devemos pensar nestas cartas como os nossos olhos para a variedade: tal como os nossos próprios olhos captam e traduzem o mundo exterior para um formato que o cérebro consegue interpretar, as cartas traduzem a estrutura do espaço num formato que conseguimos analisar e compreender.

O nosso foco, porém, será num tipo de mundos ainda mais especial: uma subclasse de variedades topológicas chamada **variedades diferenciáveis**. Nestes espaços, não só podemos cartografar cada vizinhança em cartas, como também garantimos que, sempre que duas cartas se sobreponham, a transição de uma para outra é feita de forma *suave* (isto é, diferenciável). Noutras palavras, qualquer região que seja coberta por mais de uma carta mantém uma representação consistente: um caminho suave numa carta continua suave em qualquer outra que cubra a mesma região. Esta propriedade permite-

nos aplicar as ferramentas do cálculo — como derivadas e integrais — de forma consistente ao longo de toda a variedade.

Nas próximas secções iremos, então, definir de forma mais precisa os conceitos de variedades topológicas e diferenciáveis.

### 4.1.1 Variedade Topológica

Uma variedade topológica de dimensão  $n$  é, de forma simples, um espaço topológico em que todas as vizinhanças podem ser descritas através de cartas que as mapeiam para regiões de  $\mathbb{R}^n$ .<sup>1</sup> Em termos intuitivos, trata-se de um “mundo” onde qualquer pequena região pode ser cartografada numa região do espaço plano.

Denotaremos genericamente uma variedade por  $M$ . No entanto, em exemplos concretos, podemos usar notações específicas, como  $S^2$  para a esfera ou  $T^2$  para o toro (o famoso *donut*).

O próximo passo é tornar esta ideia mais precisa: precisamos de definir com rigor o que é exatamente uma carta e quais são as condições que uma representação deve cumprir para ser considerada válida.

#### O que é uma carta?

Uma **carta** de uma variedade topológica de dimensão  $n$  é um **mapa** que associa pontos de uma região  $U$  da variedade a pontos de uma região  $V$  em  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, é uma função (usaremos o termo mapa) que recebe um ponto do nosso “mundo” e indica qual o ponto correspondente na sua representação em coordenadas.

Devido a esta utilidade, é frequente que uma carta seja também designada por **sistema de coordenadas**.



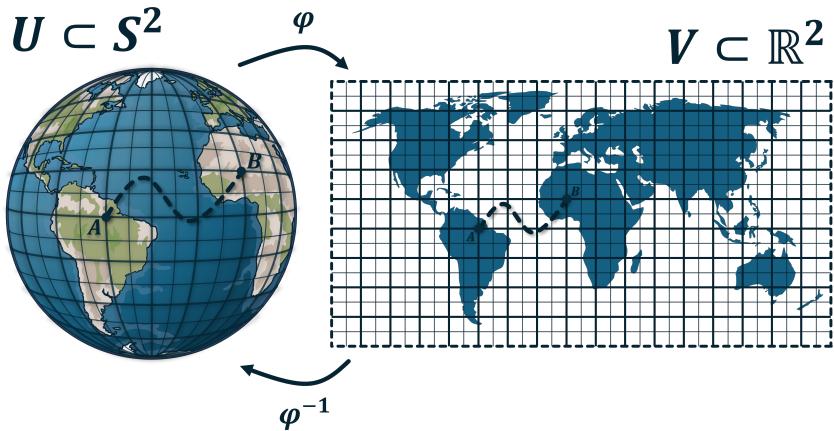
**Caixa de Ferramentas:** Mapa (no sentido de função)

Voltemos ao exemplo da Figura 4.2, onde tínhamos a variedade  $S^2$  ao lado da sua representação em  $\mathbb{R}^2$ . Tal correspondência é feita por uma carta, neste caso com o nome  $\varphi$ , onde, por exemplo, os pontos  $A$  e  $B$  da variedade são convertidos em pares de coordenadas:  $\varphi(A) = (a_1, a_2)$  e  $\varphi(B) = (b_1, b_2)$ , que permitem representá-los no plano euclidiano.

É importante realçar que uma carta não é a imagem resultante dessa representação, mas sim o próprio mapa — o processo de associação entre pontos. À imagem da carta no espaço euclidiano chamamos **imagem da carta**.

Também podemos considerar a carta inversa  $\varphi^{-1}$ , que associa pontos da imagem da carta aos seus correspondentes na variedade original.

<sup>1</sup> Para maior rigor, exige-se também que o espaço seja Hausdorff e possua uma base numerável. Não entraremos aqui nesses detalhes, mas estas condições servem para excluir espaços com comportamentos patológicos.



**Figura 4.3:** Homeomorfismo  $\varphi$  entre a superfície da Terra e a sua respetiva imagem

No entanto, uma carta não é um mapa qualquer: é um tipo especial de mapa, chamado **homeomorfismo**.

Um homeomorfismo  $\varphi$  é um mapa entre dois espaços topológicos, que associa pontos de uma vizinhança  $U$  de uma variedade  $M$  a pontos de uma vizinhança  $V$  em  $\mathbb{R}^n$ . Em notação formal:

$$\varphi : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n. \quad (4.1.1)$$

Este tipo de mapa deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $\varphi$  é bijetiva, isto é, existe uma correspondência um-para-um entre os pontos de  $U$  e  $V$ .

**Intuição:** Cada ponto de  $U$ , uma região da nossa variedade que queremos cartografar, corresponde a um único ponto na imagem da carta  $V$ . E vice-versa: cada ponto de  $V$  corresponde a um único ponto em  $U$ . A correspondência é perfeitamente definida, sem ambiguidades.

- $\varphi$  é contínua.

**Intuição:** Qualquer curva contínua em  $U$  permanece contínua quando mapeada pela carta  $\varphi$  em  $V$ . Resumindo: um caminho contínuo na região do mundo que estamos a cartografar é um caminho contínuo na imagem da carta.

- $\varphi^{-1}$  é contínua.

**Intuição:** Da mesma forma, o inverso da carta  $\varphi^{-1}$ , que leva pontos de  $V$  de volta para  $U$ , também preserva a continuidade. Resumindo: um caminho contínuo na imagem da carta é um caminho contínuo na região do mundo que estamos a cartografar.

### Comentário do Autor

Ao longo desta abordagem, haverá momentos em que certos conceitos ou propriedades terão de ser definidos. Sempre que possível, o objetivo será justificar essas definições através de uma motivação clara, recorrendo a blocos de intuição.

Uma nota importante é que, por vezes, não é possível representar uma variedade na sua totalidade através de uma única carta, sendo necessário recorrer a várias cartas para garantir que todas as regiões são devidamente cartografadas.

Por exemplo, no caso da Terra ilustrado na Figura 4.3, poderíamos pensar que a região  $U$  descrita pela carta  $\varphi$  corresponde à variedade  $S^2$  inteira. No entanto, essa carta cobre apenas uma parte da superfície. De facto, não existe nenhuma carta única capaz de descrever toda a variedade  $S^2$  de uma só vez — são necessárias, pelo menos, duas cartas para o fazer.

Muitos poderiam dizer: “Mas parece que toda a Terra está representada naquele mapa!”. Contudo, veremos que há sempre alguns pontos que não podem ser incluídos na mesma carta  $\varphi$ . Para perceber isso, precisamos de entender como  $\varphi$  traduz os pontos de uma região de  $S^2$  para uma região de  $\mathbb{R}^2$ . No caso desta carta, tal correspondência é obtida através da **projeção cilíndrica**.

#### CURIOSIDADE: O que é uma projeção cilíndrica da Terra?

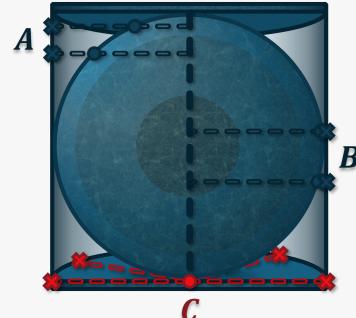
Uma projeção cilíndrica da Terra é, no fundo, uma forma de representar a superfície esférica do planeta num plano.

A ideia é simples: imaginamos a Terra colocada dentro de um tubo cilíndrico (sem tampa nem fundo), de tal modo que o cilindro seja justo e tenha a mesma altura que a Terra, como se mostra na Figura 4.4a. Esse cilindro será a nossa tela, onde vamos “gravar” os pontos do globo.

Para projetar um local, basta imaginar que um raio de luz sai perpendicularmente ao eixo central do tubo, atravessa o ponto em questão da Terra e marca a sua posição no cilindro (Figura 4.4b). Se repetirmos este processo para muitos pontos, o cilindro fica preenchido com a informação da esfera. Depois, é só cortar o tubo e desenrolá-lo para obter a imagem da carta resultante.



(a) Terra inscrita num cilindro



(b) Processo da projeção cilíndrica

**Figura 4.4:** Como obter a projeção cilíndrica de  $S^2$

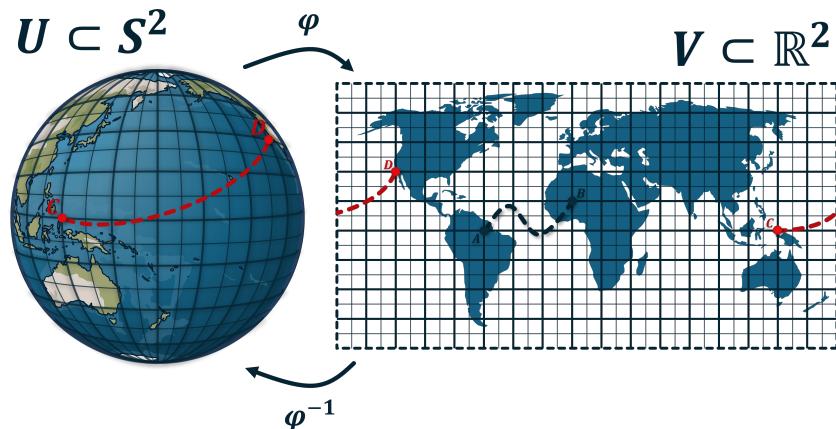
Na Figura 4.4a já estão representados os paralelos e meridianos projetados no tubo, formando uma espécie de grelha.

Note-se, no entanto, que esta técnica introduz distorções: por exemplo, na região central (zona  $B$  da Figura 4.4b) dois pontos no mesmo meridiano mantêm aproximadamente a distância relativa após a projeção; mas perto dos polos (zona  $A$ ), dois pontos à mesma distância real acabam projetados muito próximos um do outro, evidenciando a deformação provocada pela projeção cilíndrica.

Podemos ver uma das razões pelas quais esta carta não consegue descrever todos os pontos de  $S^2$ : o ponto  $C$  da Figura 4.4b, o polo sul, usando a mesma técnica de projeção, seria mapeado para múltiplos pontos do tubo cilíndrico. Isto significaria que um ponto da variedade seria enviado para vários pontos na imagem da carta, quebrando a bijetividade de  $\varphi$  e tornando a carta inválida. Por isso, a carta não pode contemplar os polos da Terra.

Outros conflitos surgem ao cortar o tubo, operação necessária para achatar a superfície em  $\mathbb{R}^2$ . Ao fazê-lo, caminhos contínuos na variedade deixam de ser contínuos na imagem da carta.

Se virarmos o globo ao contrário (Figura 4.5), observamos um exemplo: uma curva contínua na variedade que liga os pontos  $C$  e  $D$  perde a continuidade quando representada na região  $V \subset \mathbb{R}^2$ .



**Figura 4.5:**  $U = S^2$  implicaria perda de continuidade da carta  $\varphi$

Deste modo,  $\varphi$  deixaria de ser uma carta válida. É necessário escolher uma região  $U \subset S^2$  que respeite todas as propriedades do homeomorfismo. A solução consiste em retirar os pontos problemáticos.

O domínio  $U$  da carta  $\varphi$  deixa de ser a variedade  $S^2$  na sua totalidade, excluindo os dois polos e um meridiano no Pacífico (Figura 4.6).

Com este novo domínio, a incompatibilidade dos polos ser mapeada para múltiplos pontos desaparece. Também o caminho de  $C$  a  $D$  deixa de ser contínuo em  $U$ , resolvendo o outro problema. Assim, todas as propriedades do homeomorfismo são satisfeitas, e a carta  $\varphi$  torna-se válida.

Para cobrir os pontos restantes de  $S^2$ , seria necessária outra carta,  $\psi$ , garantindo que todas as regiões da variedade ficam devidamente representadas.



**Figura 4.6:** Domínio  $U$  para a carta  $\varphi$

### Carta Local

Uma **carta local** é simplesmente o par formado por uma região  $U$  da variedade e a carta  $\varphi$  que a descreve, escrito como  $(U, \varphi)$ . Podemos pensar assim: primeiro escolhemos a zona  $U$  do “mundo” que queremos cartografar, e depois decidimos qual é a carta  $\varphi$  que vamos usar para a representar. O par  $(U, \varphi)$  diz-nos então duas coisas em simultâneo: para onde estamos a olhar e qual é a forma de traduzir essa parte da variedade para um espaço plano.

Mais uma vez, uma carta local  $(U, \varphi)$  é frequentemente designada por um **sistema de coordenadas** na região  $U$  na variedade.

### Atlas

Podemos agora criar um Atlas do nosso mundo exótico: é o sítio onde reunimos todas as nossas cartas, cada uma bem identificada com a região da variedade que descreve. Em termos simples, um atlas é apenas uma coleção de cartas locais  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  que, juntas, permitem navegar por todo o nosso mundo. Aqui, o índice  $\alpha$  serve apenas para distinguir cada região e a respetiva carta — é a forma genérica de escrever uma carta local.

Uma condição essencial para que um conjunto de cartas locais forme um atlas é que a união de todas as regiões  $U_\alpha$  cubra a variedade inteira. Em outras palavras: não importa onde nos encontremos, haverá sempre pelo menos uma carta que descreve a vizinhança desse ponto. Pode até acontecer que diferentes cartas mapeiem a mesma região, oferecendo perspetivas distintas. Matematicamente:

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M. \quad (4.1.2)$$

A notação habitual para um atlas é  $\mathcal{A}$ , sendo definido como:

$$\mathcal{A} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}. \quad (4.1.3)$$

Aqui,  $\mathcal{A}$  é simplesmente o conjunto de índices necessário para identificar todas as cartas que compõem o atlas.

### 4.1.2 Variedade Diferenciável

Uma **Variedade Diferenciável** (ou Variedade Suave) de dimensão  $n$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  equipada com um **atlas diferenciável maximal**  $\mathcal{A}$ .

Exploraremos o que queremos dizer por atlas diferenciável.

#### Atlas Diferenciável

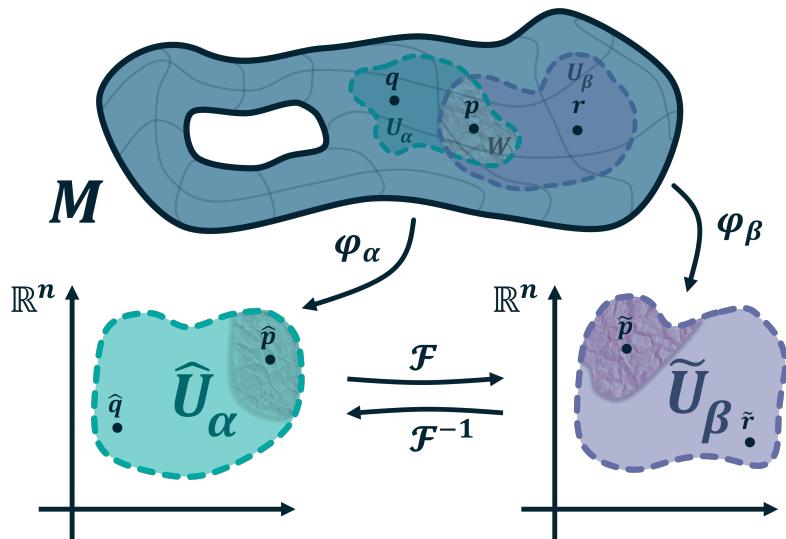
Um **atlas diferenciável** é um atlas cujas cartas locais são todas **compatíveis** entre si, ou seja, sempre que duas cartas se sobrepõem, a transição entre os seus sistemas de coordenadas é suave ( $C^\infty$ ).

Para percebermos melhor o conceito de compatibilidade, consideremos duas cartas locais  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  numa variedade  $M$  de dimensão  $n$ . Haverá dois cenários possíveis:

- Se  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  não se sobrepõem, ou seja  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ , então não há conflito entre elas: são automaticamente compatíveis.
- Se, pelo contrário,  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  se sobrepõem numa região  $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  (como ilustrado na Figura 4.7), então cada ponto  $p \in W$  pode ser descrito por dois sistemas de coordenadas diferentes:

$$\hat{p} = \varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{p} = \varphi_\beta(p) \in \mathbb{R}^n \quad (4.1.4)$$

Ou seja,  $p$  terá coordenadas  $\hat{p}$  na imagem de  $\varphi_\alpha$  e coordenadas  $\tilde{p}$  na imagem de  $\varphi_\beta$ .



**Figura 4.7:** Sobreposição de duas cartas locais.

Para passar de uma perspetiva a outra, definimos uma função de mudança de coordenadas na

região de sobreposição  $W = U_\alpha \cap U_\beta$ :

$$\mathcal{F} : \varphi_\alpha(W) \rightarrow \varphi_\beta(W), \quad \mathcal{F} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}. \quad (4.1.5)$$

Vamos explicar com calma o que isto significa:

- $\varphi_\alpha(W)$  é a representação em  $\mathbb{R}^n$  da região  $W$  da variedade vista através da carta  $\varphi_\alpha$ . Ou seja, são todas as coordenadas  $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$  correspondentes a pontos  $p \in W$ .
- De forma equivalente,  $\varphi_\beta(W)$  é a representação da mesma região  $W$  agora através da carta  $\varphi_\beta$ , resultando nas coordenadas  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ .
- A função  $\mathcal{F}$  toma um ponto  $\hat{p} \in \varphi_\alpha(W)$  e devolve o mesmo ponto representado no sistema de coordenadas da carta  $\varphi_\beta$ , ou seja  $\mathcal{F}(\hat{p}) = \tilde{p} \in \varphi_\beta(W)$ .
- Intuitivamente,  $\mathcal{F}(\hat{p})$  faz duas coisas: primeiro leva  $\hat{p}$  de volta à variedade,  $p = \varphi_\alpha^{-1}(\hat{p})$ , e depois aplica a carta  $\varphi_\beta$  para obter as novas coordenadas  $\tilde{p} = \varphi_\beta(p)$ .

De forma análoga, podemos definir a função inversa que traduz coordenadas nestas regiões mas no sentido oposto, de  $\varphi_\beta(W)$  para de  $\varphi_\alpha(W)$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : \varphi_\beta(W) \rightarrow \varphi_\alpha(W), \quad \mathcal{F}^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Teremos então que  $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{p}) = \hat{p}$ , para qualquer ponto  $p \in W$ .

Dizemos que as duas cartas são **compatíveis** se estas funções de mudança de coordenadas,  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}^{-1}$ , forem suaves ( $C^\infty$ ).

**Intuição:** A compatibilidade entre duas cartas garante que, por exemplo, caminhos suaves numa carta (uma certa perspectiva) também serão suaves na outra, sem criar víncos. Isto assegura que a mudança de uma perspectiva para outra não distorce de forma brusca a forma ou a geometria local da variedade.

Um atlas é dito **maximal** se contiver todas as cartas locais compatíveis entre si. Em outras palavras, se existir uma carta compatível com todas as cartas do atlas, essa carta deve pertencer ao atlas, tornando-o, nesse sentido, “completo”.

Note-se que podem existir diferentes atlases maximais sobre a mesma variedade que não compartilham cartas entre si, pois as cartas de um podem não ser compatíveis com as do outro.

Deste ponto do texto em diante iremos explorar apenas variedades diferenciáveis, referindo-as por apenas **variedades**.

## ☞ Exercícios Resolvidos

### ☞ 4.1.3 Curvas

## 4.2 Coordenadas Locais

### Comentário do Autor

Como podemos expressar uma variedade em coordenadas locais? Este é o objetivo desta secção: construir, passo a passo, a intuição necessária para descrever uma variedade usando coordenadas, através de exemplos familiares do dia a dia.

Começaremos por analisar o espaço  $\mathbb{R}^2$  sob duas perspetivas diferentes — as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares —, um cenário simples e intuitivo que nos permitirá introduzir gradualmente os conceitos fundamentais.

Abordaremos as diferentes notações associadas a cada carta usada para representar uma região local da variedade:

- Usaremos o símbolo  $\hat{\cdot}$  para referir que determinado objeto é relativo à carta genérica  $\varphi$  (principal).
- Usaremos o símbolo  $\tilde{\cdot}$  para referir que determinado objeto é relativo à carta genérica  $\psi$  (secundária).

Aprenderemos também a expressar, em coordenadas locais, objetos como pontos, curvas, mapas e funções escalares. Por fim, veremos como estas expressões se transformam quando mudamos de sistema de coordenadas (isto é, de carta).

## 4.3 Vetores

Nas secções anteriores criámos estes novos mundos exóticos – as variedades. Construímos cartas que nos permitem observá-los e navegar sobre a sua superfície, e até desenhar caminhos (curvas). Falta, no entanto, algo essencial: algo que nos permita caracterizar a velocidade com que nos deslocamos ao longo da variedade — o conceito de **vetor**.

Os **vetores** serão precisamente os objetos que captam esta noção de direção e intensidade em qualquer ponto da variedade.

Uma forma intuitiva de introduzir esta ideia é através de **funções escalares** definidas na variedade. Uma função escalar (ou campo escalar) é uma aplicação

$$f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.3.1)$$

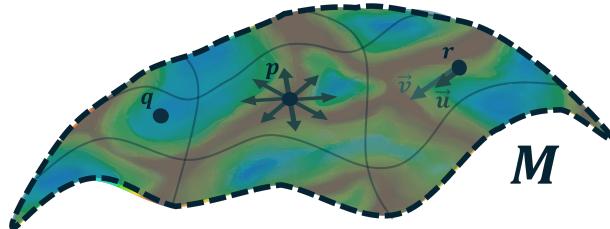
isto é, atribui a cada ponto de uma região  $U$  da variedade (não precisa de ser toda a variedade) um número real.

Um exemplo seria uma função que, a cada ponto do nosso mundo exótico, associa a **temperatura** nesse ponto, ilustrada na Figura 4.8. Assim, à medida que percorremos a variedade, a temperatura vai variando.

Começando numa certa posição, a variação deste valor de temperatura dependerá da nossa velocidade:

- **Na direção** – haverá direções em que a temperatura aumenta, outras em que permanece constante e outras em que diminui.
- **Na intensidade** – para uma mesma direção, a variação da temperatura também depende da intensidade da nossa velocidade. Por exemplo, se ao andarmos numa direção observarmos que a temperatura varia a um ritmo de  $4^\circ$  por segundo, então, se corrermos ao dobro da velocidade, a variação será também o dobro, passando a  $8^\circ$  por segundo.

É precisamente esta noção de “como uma função varia consoante a velocidade com que nos deslocamos” que irá motivar a definição formal de vetor.



**Figura 4.8:** Visualização da função de temperatura sobre a variedade  $M$

### 4.3.1 Definição Abstrata

Uma forma de compreender o conceito de vetor numa variedade é vê-lo como um operador. Já percebemos, intuitivamente, que estando num ponto  $p$ , diferentes direções e intensidades de movimento (ou “velocidades”) produzem diferentes variações numa função escalar — por exemplo, na temperatura  $f$  medida ao longo da superfície. Assim, podemos pensar num vetor  $v$  não apenas como uma seta desenhada na variedade, mas como algo que, estando em  $p$ , nos diz *como* e *quanto* uma função escalar varia quando nos deslocamos infinitesimalmente naquela direção àquela intensidade.

Em termos formais, dizemos que um vetor em  $p$  é um operador que atua sobre funções escalares diferenciáveis, devolvendo a taxa de variação dessa função na direção e intensidade do vetor — sendo essencialmente uma **derivada direcional**:

$$\dot{c}(0) : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.3.2)$$

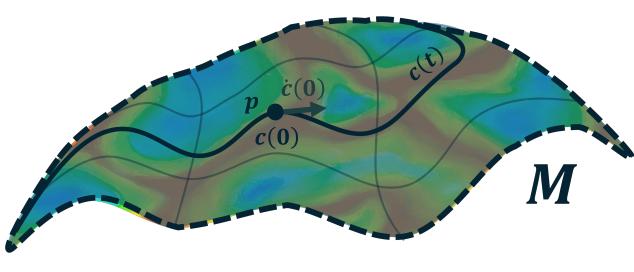
Se considerarmos uma curva  $c(t)$  que passa pelo ponto  $p$  quando  $t = 0$ , então o vetor tangente à curva nesse ponto é o operador que age sobre funções  $f \in C^\infty(U)$  da seguinte forma:

$$\dot{c}(0) \cdot f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t)) \quad (4.3.3)$$

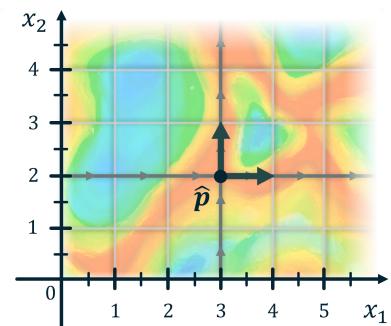
Esta expressão define, de forma abstrata, o que é um vetor: um operador de derivação que mede a variação de funções escalares ao longo de curvas que passam por  $p$ .

O espaço tangente num ponto de uma variedade é o conjunto de todos os vetores associados a esse ponto. Denotamo-lo por  $T_p M$ , onde  $p$  indica o ponto da variedade a que os vetores pertencem e  $M$  é o nome da própria variedade.

Na próxima subsecção, iremos reproduzir o mesmo raciocínio em coordenadas locais (Figura 4.9b), permitindo-nos expressar um vetor na sua forma local.



(a) Variedade  $M$  com um caminho representado



(b) Vizinhança de  $p$  em coordenadas locais

**Figura 4.9:** Vetores na Variedade  $M$

### 4.3.2 Forma Local

**Caixa de Ferramentas:** Notação de Einstein

### 4.3.3 Mudança de Coordenadas

### 4.3.4 Contravariante vs. Covariante

### 4.3.5 Campo Vetorial

## 4.4 Covetores

### Comentário do Autor

Os covetores podem ser vistos como as réguas da variedade — são os objetos que nos permitem “ler” ou medir a informação contida nos vetores. O objetivo desta secção é compreender intuitivamente o seu significado, recorrendo a exemplos concretos em espaços euclidianos e a algumas analogias. Em duas dimensões, por exemplo, podemos imaginá-los como conjuntos de retas orientadas que, ao atuarem sobre o espaço tangente, permitem medir os vetores, revelando, por exemplo, quais seriam as suas componentes num determinado sistema de coordenadas.

### 4.4.1 Forma Local

 **Caixa de Ferramentas:** Delta de Kronecker ( $\delta$ )

### 4.4.2 Mudança de Coordenadas

### 4.4.3 Campo de Covetores

## 4.5 Tensores

### Comentário do Autor

A primeira vez que me deparei com tensores a sua motivação foi praticamente inexistente, tendo sido definidos como quaisquer objetos geométricos que seguissem determinadas regras de mudança de coordenadas. Nesta secção, o objetivo é construir sobre a estrutura das últimas duas secções: vetores e covetores, construindo uma máquina que realiza cálculos usando estas “setas” e “réguas” da variedade. A intenção é ser uma abordagem progressiva começando por tensores mais simples, introduzindo o produto tensorial e abordando a sua formulação local.

### 4.5.1 Forma Local

### 4.5.2 Produto Tensorial

### 4.5.3 Mudança de Coordenadas

### 4.5.4 Campo Tensorial

## 4.6 Transporte Paralelo

Até agora, no nosso mundo exótico — a variedade — já construímos várias ferramentas: sabemos descrever regiões com sistemas de coordenadas, falar de direções com vetores, de medidas com covetores e até montar máquinas mais complexas como tensores. Também já conseguimos definir o que significa percorrer um caminho sobre a variedade — aquilo a que chamamos uma curva.

Mas agora surge uma pergunta natural: imaginemos que estou num ponto da variedade e quero começar a caminhar de forma a manter a minha velocidade: sempre andando na mesma direção e a um ritmo constante, que percurso (curva) devo fazer na variedade?

Este será um tema que irá moldar estas 3 próximas secções: *Transporte Paralelo, Derivada Covariante* e finalmente *Geodésicas*.

### Comentário do Autor

Nesta secção apresento uma abordagem diferente da forma clássica de introduzir o tema. Tradicionalmente, começa-se pela definição da derivada covariante através de uma lista de propriedades e depois se define o transporte paralelo como o transporte que a anula. Para mim, esta ordem está invertida: torna o conceito abstrato e pouco intuitivo, perdendo o sentido geométrico essencial.

O meu plano segue uma sequência mais natural e motivada:

- Começamos pelo **transporte paralelo**, explicando o que ele representa e porque é uma escolha.
- Listamos as propriedades intuitivas que este deve ter ao atuar sobre escalares, vetores, covetores e tensores.
- Introduzimos a **derivada covariante** como analogia à derivada direcional no espaço euclidiano: comparamos vetores em pontos diferentes transportando-os paralelamente antes de medir a variação infinitesimal. Todas as propriedades da derivada covariante podem ser derivadas através das propriedades do transporte paralelo.
- Esta lógica permite definir de forma clara e motivada a derivada covariante para os objetos geométricos mencionados, resultando na representação local conhecida.

Esta abordagem, mais sequencial e intuitiva, torna mais fácil para o leitor seguir toda a formulação matemática.

Andar sempre “em frente” a um ritmo constante significa manter o nosso vetor da velocidade constante enquanto nos movemos. Mas isto levanta logo um problema: como é que sabemos, ao chegar a um novo ponto, qual o vetor que representa o vetor de velocidade que eu tínhamos inicialmente?

Recordemos que numa variedade cada ponto tem o seu próprio espaço tangente, e não há uma forma natural de comparar diretamente vetores em pontos diferentes. Não podemos simplesmente “arrastar” fisicamente o vetor ao longo do caminho, porque ele está preso ao espaço tangente onde

nasceu.

Esta secção terá como foco resolver exatamente este problema: como podemos “transportar” um vetor ao longo de uma curva, de forma a manter a sua direção e intensidade, para o podermos usar sempre como referência?

O que faremos é o seguinte: ao longo do caminho, escolhemos, em cada ponto, um vetor que represente a mesma direção e intensidade que o vetor original. A esta escolha sistemática de vetores em todos os pontos ao longo de uma curva – representantes do vetor original – é o que chamamos de **transporte paralelo**.

É importante perceber que **esta escolha é nossa** — não é algo que vem automaticamente com a variedade. Somos nós que decidimos o que significa “manter a direção” e intensidade. Uma vez escolhida essa regra para a variedade, dizemos que um vetor foi transportado paralelamente de  $A$  para  $B$  ao longo de um caminho se o vetor final em  $B$  resulta da aplicação dessa regra ao longo de todo o percurso. Há muitas formas possíveis de definir o que significa “transportar paralelamente” — e diferentes escolhas resultam em comportamentos diferentes.

#### 4.6.1 Definição

Embora o transporte paralelo de vetores seja a motivação inicial desta secção, é igualmente importante aprendermos a transportar paralelamente outros objetos geométricos — começaremos por escalares, seguindo para vetores e depois covetores — até chegarmos à formulação geral do transporte paralelo de um tensor.

Quando formos transportar um objeto geométrico ao longo de uma curva  $c$ , do ponto  $c(a)$  para o ponto  $c(b)$ , iremos usar a notação:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(\square). \quad (4.6.1)$$

Aqui:

- $\mathcal{P}$  indica que se trata de um transporte paralelo;
- O sobreescrito  $c$  indica a curva utilizada;
- O subscrito  $a \rightarrow b$  indica que começamos em  $c(a)$  e terminamos em  $c(b)$ ;
- O símbolo  $\square$  representa o objeto geométrico da variedade  $M$  que iremos transportar paralelamente.

Iremos usar esta mesma notação para os operadores de transporte paralelo de todos os objetos geométricos mencionados, sendo que as ambiguidades quanto ao operador a que nos referimos serão esclarecidas pelo contexto.

Ao longo do Anexo A (devido às limitações de espaço), iremos especificar os operadores de transporte paralelo para cada tipo de objeto geométrico, definindo as propriedades que estes operadores deverão ter. Estas propriedades serão motivadas à medida que são apresentadas.

## 4.7 Derivada Covariante

Na secção de vetores aprendemos a calcular a taxa de variação de funções escalares ao longo da variedade consoante uma direção e intensidade, ou seja, a derivada direcional. Por exemplo, para uma função temperatura  $f$ , que associa um número real a cada ponto da variedade  $M$ , podemos calcular a derivada direcional aplicando um vetor  $v$  com a direção e intensidade desejadas, escrevendo  $v \cdot f$ . Isto é possível porque, ao deslocarmo-nos numa certa direção, podemos sempre comparar a nova temperatura com a temperatura inicial.

Agora, imaginemos um campo vetorial  $Y$ , em que cada vetor representa a velocidade do vento num ponto da variedade. Perguntamo-nos: como varia a velocidade do vento ao movermo-nos numa dada direção? Ao contrário do caso escalar, não podemos comparar diretamente vetores em pontos diferentes, tornando impossível calcular a derivada direcional da mesma forma.

É aqui que entra o transporte paralelo: ele permite transportar, passo a passo, um vetor (ou qualquer tensor) da forma "mais direitinha possível", de modo a mantermos connosco sempre uma referência do seu valor original. No nosso exemplo, a cada passo movemo-nos para um novo espaço tangente, mas temos não só o vetor que indica a nova velocidade do vento, como também o vetor do ponto inicial, transportado paralelamente, para comparação.

Esta ideia serve de base para definir um novo tipo de derivada direcional, adaptada a campos de objetos geométricos (vetores, covetores, tensores): a **Derivada Covariante**.

### Comentário do Autor

Esta abordagem é mais intuitiva que a da literatura tradicional, pois baseia-se diretamente no transporte paralelo, trazendo até a possibilidade de formular a derivada covariante de forma abstrata. Embora a notação possa ser (bastante) pesada em algumas derivações, o método fornece uma intuição clara do que significa "derivar" um campo tensorial em variedades.

### 4.7.1 Definição Abstrata

Queremos criar um operador capaz de calcular a taxa de variação de campos geométricos num ponto da variedade, em função de uma direção e intensidade. Este operador baseia-se no transporte paralelo para comparar objetos em diferentes pontos.

A derivada covariante num ponto  $p$  recebe então como parâmetros:

- Um vetor  $v \in T_p M$ , indicando a direção da derivada;
- Um campo tensorial  $T$ , que é o objeto geométrico a derivar.

O resultado é um tensor em  $p$  que caracteriza a taxa de variação de  $T$  nessa direção:

$$\nabla : T_p M \times \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \rightarrow T_p^{(r,s)} M, \quad \nabla_v T := \nabla(v, T). \quad (4.7.1)$$

De forma análoga à derivada direcional, podemos imaginar “andar” um intervalo infinitesimal  $h$  na direção do vetor  $v$  a partir de  $p$ . A derivada covariante compara então o tensor no ponto  $c(h)$  com o tensor transportado paralelamente desde  $p$ :

$$\nabla_v T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)})}{h}, \quad (4.7.2)$$

onde  $c$  é uma curva com  $c(0) = p$  e  $\dot{c}(0) = v$ .

Podemos generalizar esta definição substituindo o vetor  $v$  por um campo vetorial  $X$ , permitindo derivar  $T$  em diferentes direções em cada ponto da variedade. O resultado é outro campo tensorial, dado por

$$(\nabla_X T)_p = \nabla_{X_p} T \quad (4.7.3)$$

Assim, a derivada covariante generalizada recebe:

- Um campo vetorial  $X$ , indicando a direção da derivada em cada ponto;
- Um campo tensorial  $T$ , o objeto a derivar.

O resultado é um campo tensorial que representa a variação infinitesimal de  $T$  em cada ponto, na direção definida por  $X$ :

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{T}^{(r,s)}(M) \rightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(M). \quad (4.7.4)$$

Esta definição abstrata fornece uma intuição geométrica clara: a derivada covariante mede como um campo tensorial “muda” ao percorrer a variedade, respeitando a forma natural de transportar os objetos geométricos – o transporte paralelo.

Embora útil para intuição, esta formulação não é prática para cálculos explícitos, sendo geralmente preferível trabalhar com a sua forma local.

A partir desta definição abstrata e das propriedades do transporte paralelo, podemos agora deduzir algumas das propriedades fundamentais da derivada covariante.

## 4.7.2 Propriedades

Sejam  $X, Y, Z$  campos vetoriais,  $T$  e  $S$  campos tensoriais e  $f$  e  $g$  funções escalares. Valem as seguintes propriedades:

### 1. Linearidade no campo derivado:

$$\nabla_X (T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S. \quad (4.7.5)$$

#### Prova

Como o transporte paralelo é linear no vetor transportado, temos:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(T + S) = \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(T) + \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(S).$$

Ao avaliarmos o campo tensorial  $\nabla_X(T + S)$  num ponto genérico  $p \in M$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X(T + S))_p &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T + S)_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c((T + S)_{c(0)})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} + S_{c(h)} - (\mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)}) + \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)}))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)})}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h} \\
&= (\nabla_X T)_p + (\nabla_X S)_p.
\end{aligned}$$

Como esta igualdade é válida para todo o ponto  $p \in M$ , concluímos que:

$$\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S. \quad \blacksquare$$

## 2. Derivar funções escalares

$$\nabla_X f = X \cdot f. \quad (4.7.6)$$



**Prova**

## 3. Interação com o Produto Tensorial

$$\nabla_X(T \otimes S) = T \otimes (\nabla_X S) + (\nabla_X T) \otimes S \quad (4.7.7)$$

### Prova

Temos do transporte paralelo de tensores:

$$\mathcal{P}_{s \rightarrow t}^c(T \otimes S) = \mathcal{P}_{s \rightarrow t}^c(T) \otimes \mathcal{P}_{s \rightarrow t}^c(S).$$

Ao avaliarmos o campo tensorial  $\nabla_X(T \otimes S)$  num ponto genérico  $p \in M$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X(T \otimes S))_p &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T \otimes S)_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c((T \otimes S)_{c(0)})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} \otimes S_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)} \otimes S_{c(0)})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} \otimes S_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)}) \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} \otimes S_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)}) \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\left( T_{c(h)} \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)}) - T_{c(h)} \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)}) \right)}^{=0} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} \otimes S_{c(h)} - T_{c(h)} \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h} \\
& + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{c(h)} \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)}) - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)}) \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} T_{c(h)} \otimes \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)})}{h} \right) \\
& + \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{T_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(T_{c(0)})}{h} \right) \otimes \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(S_{c(0)}) \\
& = T_{c(0)} \otimes (\nabla_X S)_{c(0)} + (\nabla_X T)_{c(0)} \otimes \mathcal{P}_{0 \rightarrow 0}^c(S_{c(0)}) \\
& = T_p \otimes (\nabla_X S)_p + (\nabla_X T)_p \otimes S_p
\end{aligned}$$

Como esta igualdade é válida para todo o ponto  $p \in M$ , concluímos que:

$$\nabla_X(T \otimes S) = T \otimes (\nabla_X S) + (\nabla_X T) \otimes S. \quad \blacksquare$$

### 4.7.3 Em coordenadas locais

Sabemos então que a derivada covariante de um campo tensorial gera outro campo tensorial. Podemos escrever as componentes do campo resultante quando visto em coordenadas locais.

#### Para um Campo Vetorial

Para um certa carta local  $(U, \varphi)$ :

$$\nabla_X Y = (X \cdot Y^i + X^j Y^k \Gamma_{jk}^i) \partial_i, \quad (4.7.8)$$

onde  $\Gamma_{jk}^i$  são certas funções associadas a  $\nabla$  e às coordenadas locais, chamadas os **Símbolos de Christoffel**.

Ou seja, a derivada covariante do campo vetorial  $Y$  na direção  $X$  produz o campo vetorial descrito acima em coordenadas locais.

 **Prova**

#### Para um Campo de Covetores

$$\nabla_X \mathcal{W} = (X \cdot \mathcal{W}_i - X^j \mathcal{W}_k \Gamma_{ji}^k) dx^i. \quad (4.7.9)$$

## Prova

Para um certa carta local  $(U, \varphi)$  onde  $p \in U$ :

$$X = X^j \partial_j, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_k dx^k.$$

Podemos repetir os mesmos passos feitos para o campo vetorial em  $X$ , obtendo:

$$\nabla_X \mathcal{W} = (X \cdot \mathcal{W}_k) dx^k + X^j \mathcal{W}_k \nabla_{\partial_j} dx^k.$$

Aqui

$$\nabla_{\partial_j} dx^k = \Theta_{j i}^k dx^i,$$

e podemos provar que  $\Theta_{j i}^k = -\Gamma_{j i}^k$ :

$$\begin{aligned} \Theta_{j i}^k &= (\nabla_{\partial_j} dx^k)(\partial_i) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{dx^k|_{c(h)} - \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(dx^k|_{c(0)})}{h} \right) \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}) \right) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dx^k|_{c(h)} \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}) \right) - \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(dx^k|_{c(0)}) \right) \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}) \right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dx^k|_{c(h)} \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}) \right) - dx^k|_{c(0)} \left( \partial_i|_{c(0)} \right)}{h} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dx^k|_{c(h)} \left( \partial_i|_{c(h)} \right) - dx^k|_{c(0)} \left( \mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}) \right)}{h} = \\ &= - dx^k|_{c(0)} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\partial_i|_{c(h)}) - (\mathcal{P}_{0 \rightarrow h}^c(\partial_i|_{c(0)}))}{h} \right) = \\ &= - dx^k(\nabla_{\partial_j} \partial_i) = \\ &= -\Gamma_{j i}^k. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\nabla_{\partial_j} dx^k = -\Gamma_{j i}^k dx^i.$$

Concluindo,

$$\begin{aligned} \nabla_X \mathcal{W} &= (X \cdot \mathcal{W}_k) dx^k + X^j \mathcal{W}_k \nabla_{\partial_j} dx^k = \\ &= (X \cdot \mathcal{W}_i) dx^i - X^j \mathcal{W}_k \Gamma_{j i}^k dx^i = \\ &= (X \cdot \mathcal{W}_i - X^j \mathcal{W}_k \Gamma_{j i}^k) dx^i. \blacksquare \end{aligned}$$

## 🔗 Para um Campo Tensorial

### Comentário do Autor

Aqui usaremos a propriedade  $\nabla_X(T \otimes S) = T \otimes (\nabla_X S) + (\nabla_X T) \otimes S$  para escrever a derivada covariante de um tensor do tipo  $(r, s)$  em coordenadas locais. Será dado como exemplo um tensor do tipo  $(1, 1)$ .

## 🔗 4.7.4 Transporte Paralelo

## 4.8 Geodésicas

Podemos agora procurar as curvas que *nunca viram*, aquelas que mantêm sempre a mesma direção – as que, em espaços euclidianos, chamamos de **retas**. Num espaço mais geral, ou seja, numa variedade diferenciável, estas curvas recebem o nome de **geodésicas**.

Na verdade, uma geodésica não é apenas uma curva que segue sem virar: é também uma curva percorrida a um **ritmo constante**. Em cada ponto, o vetor velocidade  $\dot{c}$  mantém não só a sua direção, mas também a sua intensidade.

Para que isso aconteça, o vetor velocidade tem de ser transportado paralelamente a cada passo do caminho. A ferramenta que nos permite verificar se isso acontece é a **derivada covariante**, que mede exatamente o desvio entre um vetor e o seu transporte paralelo.

Assim, em cada ponto  $c(t)$  da nossa curva, ao avançarmos na direção da velocidade  $\dot{c}$ , queremos que o vetor de velocidade  $\dot{c}$  seja transportado de modo a que esse desvio seja nulo. Dessa forma, garantimos que o vetor no passo seguinte mantém exatamente a mesma direção e a mesma intensidade do anterior. Matematicamente:

$$(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})_{c(t)} = \nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0. \quad (4.8.1)$$

Esta é, portanto, a condição fundamental que define uma geodésica.

### 4.8.1 Em coordenadas locais

Em coordenadas locais, é habitual usar as próprias coordenadas para nomear as componentes da curva. Por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$ , escrevemos:

$$c(t) = (x(t), y(t)), \quad (4.8.2)$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  representam as componentes da curva ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ .

De forma análoga, numa variedade  $n$ -dimensional com coordenadas locais  $(x^1, \dots, x^n)$ , podemos escrever:

$$\hat{c}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad (4.8.3)$$

onde cada função  $x^i(t)$  representa a  $i$ -ésima componente da curva na carta escolhida.

Podemos então escrever, em coordenadas locais, as condições que determinam se uma curva  $c$  é uma geodésica:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \Gamma_{jk}^i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (4.8.4)$$

A estas equações chamamos as **equações geodésicas**.

### Prova

## Exercícios Resolvidos

### 4.9 Métrica

#### Comentário do Autor

Um dos passos mais importantes será criar uma ferramenta  $g$  que nos permita fazer medições na nossa variedade: distâncias, ângulos, áreas, volumes... Chamaremos a esta ferramenta de **métrica**, e será o foco desta secção.

Iremos abordar este conceito de forma ligeiramente diferente do método tradicional: imaginemos que nos encontramos num ponto da variedade e queremos construir esta ferramenta de medição a partir do zero. Inspirada no produto interno ortonormal cartesiano, a métrica permitirá medir vetores no ponto considerado. Para isso, podemos montar, nesse ponto, uma coleção de régulas — formalmente, um tensor — configuradas de forma a extrair as componentes de uma base ortonormal dos vetores em questão e calcular o produto interno.

Depois de montada, podemos transportar paralelamente esta coleção de covetores para todos os pontos da variedade, garantindo que a nossa ferramenta de medição se mantém consistente. Ao longo desta secção exploraremos também outros conceitos relacionados, como compatibilidade com a métrica, torsão e comprimento de curvas, sempre através de uma abordagem intuitiva e visual.

### 🔗 4.9.1 Compatibilidade com a Métrica

### 🔗 4.9.2 Torsão

### 🔗 4.9.3 Inversa da Métrica

### 🔗 4.9.4 Conexão Levi Civita

### 🔗 4.9.5 Comprimento de uma Curva

#### Comentário do Autor

Aqui será usado o método tradicional para introduzir o conceito de comprimento de uma curva usando a métrica, acompanhado da intuição que o motiva: o vetor tangente à curva será interpretado como vetor velocidade, e o parâmetro da curva como tempo. Através de passinhos infinitesimais, será possível calcular o comprimento da curva.

Nesta subsecção será apresentada a formulação do conceito em coordenadas locais, seguida de uma introdução às equações de Euler–Lagrange, culminando na demonstração de como a conexão de Levi-Civita gera geodésicas que minimizam o comprimento da curva.

### 🔗 4.9.6 A métrica como ponte entre vetores e covetores

## 🔗 4.10 Curvatura

#### Comentário do Autor

Após realizarmos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada ele poderá não regressar exatamente com a mesma direção com que partiu. Mesmo tendo mantido o seu comprimento constante durante todo o percurso, o vetor final pode surgir “rodado” em relação ao inicial.

A **curvatura** será então introduzida como o efeito resultante desse desvio: ela mede quanto e de que forma o transporte paralelo ao longo de um circuito fechado falha em devolver o vetor à sua orientação original. Em espaços planos esse desvio é nulo, mas em variedades curvas ele traduz precisamente a presença de curvatura geométrica.

### 🔗 4.10.1 Tensor de Curvatura de Riemann

### 🔗 4.10.2 Tensor de Ricci

### 🔗 4.10.3 Escalar de Ricci

# 5

## Relatividade Geral

### Conteúdo

---

5.1	Curvatura no espaço-tempo	76
5.2	Equações de Campo de Einstein	76
5.3	Métrica de Schwarzschild	76
5.4	Buracos Negros	76
5.5	Ondas Gravitacionais	76
5.6	Cosmologia	76

---

A Relatividade Restrita, embora extremamente bem-sucedida, não consegue explicar o efeito da gravidade sobre o movimento dos corpos. Para incluir a gravidade de forma consistente, é necessário expandir a teoria, adotando um modelo em que a presença de massa e energia influencia diretamente a geometria do espaço-tempo.

Neste capítulo iremos mostrar como os conceitos que aprendemos até agora se organizam para formar a Relatividade Geral. O espaço-tempo passa a ser visto como uma variedade com curvatura. Pelo princípio da equivalência, sabemos que, localmente, o espaço-tempo é equivalente a um espaço plano de Minkowski, onde a Relatividade Restrita continua válida.

Exploraremos a importância da métrica do espaço-tempo, e de que forma ela difere de uma métrica Riemanniana clássica. A partir da métrica, seremos capazes de calcular as geodésicas, que determinam as trajetórias de corpos em movimento livre. Para isso, introduziremos as Equações de Campo de Einstein, que relacionam a distribuição de matéria e energia com a curvatura do espaço-tempo, permitindo determinar a métrica em cada situação.

Com estas ferramentas, estaremos preparados para analisar modelos que descrevem o espaço-tempo ao redor de planetas, estrelas e buracos negros, e também para compreender fenômenos como ondas gravitacionais e a cosmologia.

## 🔗 **5.1 Curvatura no espaço-tempo**

### 🔗 **5.1.1 Espaço-tempo como variedade**

### 🔗 **5.1.2 Métrica do espaço-tempo**

### 🔗 **5.1.3 Geodésicas no espaço-tempo**

## 🔗 **5.2 Equações de Campo de Einstein**

### 🔗 **5.2.1 Soluções das Equações de Campo de Einstein**

## 🔗 **5.3 Métrica de Schwarzschild**

## 🔗 **5.4 Buracos Negros**

## 🔗 **5.5 Ondas Gravitacionais**

## 🔗 **5.6 Cosmologia**

# 6

## Conclusão da Tese

### Conteúdo

---

6.1 Objetivo Principal . . . . .	78
6.2 Síntese do Trabalho Desenvolvido . . . . .	78
6.3 Contributo e Relevância . . . . .	79
6.4 Limitações do Estudo . . . . .	79
6.5 Perspetivas Futuras . . . . .	80

---

Nesta conclusão procuro reunir as ideias centrais desenvolvidas ao longo desta dissertação, salientar o contributo original do trabalho, bem como apontar as suas limitações e possíveis caminhos para desenvolvimentos futuros. O objetivo não é repetir exaustivamente o que já foi exposto, mas antes oferecer uma visão de conjunto que clarifique o alcance e a relevância desta abordagem.

## 6.1 Objetivo Principal

O objetivo fundamental desta dissertação foi a exposição e análise parcial de uma abordagem didática e auto-contida sobre a teoria da relatividade — restrita e geral — escrita em português e orientada para estudantes universitários com formação básica em cálculo. Este trabalho procurou colmatar uma lacuna sentida na literatura disponível em língua portuguesa: a ausência de um material acessível, rigoroso e ao mesmo tempo narrativo, que guie o leitor passo a passo desde conceitos elementares até aos fundamentos geométricos da relatividade geral.

Pretendeu-se também introduzir uma abordagem pedagógica distinta, em que cada conceito é apresentado primeiro pela intuição, por exemplo geométrica, e só depois formalizado matematicamente. Assim, o texto não se limita a expor resultados, mas acompanha o raciocínio que conduz à sua formulação.

## 6.2 Síntese do Trabalho Desenvolvido

Ao longo da dissertação, fomos seguindo a estrutura da abordagem integral, fazendo a adaptação necessária às limitações relativas ao número de páginas.

No **Capítulo 1**, partimos da física clássica e analisámos a experiência que demonstrou a invariância da velocidade da luz. Verificámos que este resultado era incompatível com o modelo de Galileu aceite na altura, originando o problema da soma de velocidades. Este foi o nosso primeiro passo em direção à Relatividade Restrita, uma teoria que propõe um novo modelo capaz de resolver esse conflito.

No **Capítulo 2**, começámos a construir essa teoria com base no princípio da invariância da velocidade da luz, desenvolvendo a estrutura necessária de referenciais — definindo como medir o tempo e o espaço, e como identificar eventos. Em seguida, explorámos as consequências profundas dessa teoria, como a quebra da simultaneidade universal, a dilatação do tempo e a contração do espaço.

Com base nestes resultados, avançámos para compreender como o mesmo evento é registado em diferentes referenciais em movimento uniforme, derivando assim as transformações de Lorentz. Por fim, deduzimos a nova lei de adição de velocidades que respeita a invariância da velocidade da luz.

No **Capítulo 3**, abordámos o papel da gravidade no contexto da Relatividade Restrita. Este capítulo é um passo essencial para justificar a necessidade de uma teoria mais geral — a Relatividade Geral — e a introdução da matemática capaz de descrever espaços curvos.

Finalmente, no **Capítulo 4**, tornámo-nos exploradores de mundos: introduzimos o conceito de variedade e as suas representações através de cartas locais, apresentámos a noção de direção com

vetores, e desenvolvemos a ideia de transporte paralelo. A partir das suas propriedades esperadas, construímos o conceito de transporte paralelo de forma rigorosa e, posteriormente, generalizámo-lo numa derivada direcional adaptada a tensores gerais.

Estas são as peças fundamentais para a construção da teoria da Relatividade Geral, esboçada no **Capítulo 5**.

### 6.3 Contributo e Relevância

O contributo mais relevante desta dissertação é de natureza **pedagógica**. Propõe uma apresentação sequencial, rigorosa e intuitiva da Relatividade Geral, em português, pensada para estudantes que contactam com o tema pela primeira vez.

Entre os principais contributos da abordagem desenvolvida, destacam-se:

- A formulação de uma experiência intuitiva de dilatação do tempo (partilha da duração de 1 segundo entre referenciais), concebida de modo a poder ser realizada na direção do movimento, permitindo a sua descrição num cenário unidimensional.
- O desenvolvimento de uma narrativa concisa e intencional, que introduz o conceito de variedade de forma intuitiva e progressiva.
- A reestruturação da introdução da derivada covariante, partindo do conceito de transporte paralelo, construído a partir de propriedades intuitivas, o que permite formular a derivada covariante de modo a preservar uma visualização geométrica clara deste operador.

Estas escolhas tornam as motivações dos conceitos mais naturais e fáceis de visualizar. No entanto, algumas destas ideias, que podem parecer triviais numa explicação informal, revelam-se mais exigentes na sua formulação matemática. Ainda assim, acredito que, no futuro, será possível otimizar esta abordagem para que todas as ideias centrais tenham também uma expressão matemática simples e acessível.

Do ponto de vista da comunidade científica de língua portuguesa, este trabalho representa um passo relevante no sentido de tornar mais acessível uma das teorias centrais da física moderna, reduzindo a dependência quase exclusiva de bibliografia em inglês.

Por fim, o carácter narrativo e exploratório distingue este texto dos manuais tradicionais: em vez de ser uma mera compilação técnica, constitui uma tentativa de reconstruir o próprio percurso do pensamento, tornando a experiência de aprendizagem mais próxima de uma descoberta partilhada.

### 6.4 Limitações do Estudo

Apesar do esforço de abrangência, procurando reproduzir o máximo possível da abordagem pretendida, esta dissertação acaba por permanecer relativamente incompleta, em grande parte devido à limitação

de páginas. Vários tópicos relevantes ficaram de fora, quer por restrição de espaço, quer por opção pedagógica. Outros acabaram por não ser incluídos por falta de uma formulação que me parecesse suficientemente satisfatória. Entre estes últimos, destacam-se:

- **Relatividade Restrita:** O quadrimomento e a introdução da energia.
- **Ferramentas matemáticas necessárias:** A condição de torsão nula da conexão de Levi-Civita e o conceito de curvatura.
- **Relatividade Geral:** A maioria dos tópicos— por exemplo, as Equações de Einstein e a métrica de Schwarzschild, excetuando a introdução e a ligação com a matemática discutida no capítulo anterior.

O restante conteúdo foi omitido por limitação de espaço. Assim, o foco desta dissertação centrou-se em melhorar a transição até à Relatividade Geral, privilegiando uma construção intuitiva que motivasse os conceitos fundamentais.

## 6.5 Perspetivas Futuras

O trabalho aqui apresentado pode servir de base a múltiplos desenvolvimentos. Entre as perspetivas possíveis na sua continuação destacam-se:

- A inclusão dos tópicos omitidos devido às limitações de páginas;
- O desenvolvimento de uma abordagem intuitiva que cubra os restantes temas;
- A elaboração das ferramentas auxiliares ao longo da leitura, como exercícios resolvidos, curiosidades, caixas de ferramentas e ilustrações apelativas;
- A inclusão de tópicos avançados, como ondas gravitacionais ou soluções mais complexas das equações de Einstein;
- A evolução natural deste texto para um manual didático mais alargado, acessível à comunidade académica de língua portuguesa;
- A criação de materiais complementares, como vídeos de apoio, que permitam uma exposição mais dinâmica dos conteúdos.

A intenção seria, ao longo destes passos, pôr também a abordagem à prova, com *feedback* real por parte do corpo estudantil, ou até mesmo de pessoas sem qualquer familiaridade com os tópicos aqui tratados. O texto poderia assim ir sendo moldado com o tempo, amadurecendo naturalmente, sem pressa — como um vinho em barril.

Em última análise, se a relatividade geral nos mostrou que o espaço e o tempo são entidades dinâmicas, também a forma de ensinar ciência deve ser flexível e adaptativa. Este trabalho procura dar um passo nesse sentido, demonstrando que é possível aproximar a matemática abstrata da intuição humana sem abdicar do rigor da teoria.

# Bibliografia

- [1] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009, livro de referência. Aborda a construção de referenciais físicos como redes de observadores equipados com réguas e relógios sincronizados, seguindo o procedimento de sincronização de Einstein.
- [2] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: The University of Chicago Press, 1984, obra de referência na formulação rigorosa da Relatividade Geral, utilizada como base de comparação com a abordagem tradicional.
- [3] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2004, um livro de texto moderno de Relatividade Geral focado numa abordagem pedagógica.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973, referência monumental para a Relatividade Geral, com uma discussão aprofundada da equação geodésica como o caminho de movimento livre.
- [5] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford, England: Oxford University Press, 1992, livro de carácter didático sobre Relatividade Geral, usado para comparar a presente abordagem com a literatura tradicional.
- [6] J. Natário, "Relatividade geral sem cálculo: Uma introdução concisa à geometria da relatividade," january 2019, documento não publicado, usado como referência para ideias sobre relatividade restrita e transição para relatividade geral; inspiração para a abordagem intuitiva adotada no texto.
- [7] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford: Clarendon Press, 1873, vol. 1, a obra fundamental de Maxwell que unifica eletricidade e magnetismo e apresenta as suas famosas equações.
- [8] L. K. W. Thomson), "Nineteenth-century clouds over the dynamical theory of heat and light," *Philosophical Magazine*, vol. 2, no. 7, pp. 1–40, 1901, a famosa palestra onde Lord Kelvin descreve o estado da física como largamente completo, exceto por "duas nuvens"(o problema do éter e o da catástrofe ultravioleta) que acabariam por revolucionar a ciência.

- [9] A. A. Michelson and E. W. Morley, "On the relative motion of the earth and the luminiferous ether," *American Journal of Science*, vol. 34, no. 203, pp. 1–13, 1887, experiência célebre que refutou a existência do éter luminífero. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2475/ajs.s3-34.203.333>
- [10] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Harlow, England: Pearson, 2013, discussão sobre as equações de Maxwell e a constância da velocidade da luz no vácuo.
- [11] G. Galilei, *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*, 1632, obra seminal onde Galileu discute o movimento e estabelece o princípio da relatividade, hoje conhecido como Relatividade de Galileu.
- [12] A. Einstein, *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*. Lisboa: Gradiva, 2001, livro de popularização de Einstein onde apresenta experiências mentais clássicas, como a do comboio e do elevador, para explicar a relatividade da simultaneidade e o Princípio de Equivalência.
- [13] E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*, 2nd ed. New York: W. H. Freeman, 1992, um livro de texto canônico que utiliza extensivamente a experiência mental do "relógio de luz" para derivar a dilatação do tempo.
- [14] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2006, obra de referência que introduz e analisa em detalhe os referenciais acelerados e as coordenadas de Rindler.
- [15] B. Riemann, "Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen," 1854, a palestra de habilitação de Riemann (publicada em 1868) que lançou as bases da geometria diferencial e dos espaços curvos de n-dimensões (variedades).
- [16] L. Godinho and J. Natário, *An Introduction to Riemannian Geometry: With Applications to Mechanics and Relativity*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2014, consultado como referência para todo o tema de geometria riemanniana; definições rigorosas de variedades, curvas e tensores foram guiadas por este livro, enquanto a apresentação intuitiva é de autoria própria.

# A

## **Transporte Paralelo de Objetos Geométricos**

## A.1 Transporte Paralelo de Escalares

Este operador toma num escalar real definido no ponto  $c(a)$  e devolve, no ponto  $c(b)$ , o mesmo escalar, de forma a representar o valor original. Matematicamente:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.1})$$

Ao contrário de vetores ou covetores, que estão associados a pontos específicos da variedade, um escalar não depende da posição na curva: qualquer escalar definido em  $c(a)$  pode ser considerado em  $c(b)$ . Assim, o transporte paralelo de um escalar é o mais simples dos casos: consiste apenas em mantê-lo constante. Para um escalar  $\lambda$ , temos:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(\lambda) = \lambda. \quad (\text{A.1.2})$$

**Intuição:** Transportar um escalar ao longo da variedade, de modo a alterá-lo o mínimo possível, significa simplesmente mantê-lo constante.

## A.2 Transporte Paralelo de Vetores

Este operador toma num vetor definido no espaço tangente  $T_{c(a)}M$  e devolve o seu vetor representante do espaço tangente  $T_{c(b)}M$ . Matematicamente:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c : T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M. \quad (\text{A.2.1})$$

Tentar caracterizar o operador do transporte paralelo será bastante mais complexo do que no caso escalar. Iremos listar 4 propriedades essenciais que fará sentido o transporte paralelo de vetores ter:

### 1. É linear

O transporte paralelo de um vetor é linear no vetor. Para quaisquer vetores  $u, v$  e escalares  $\lambda, k$ :

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(\lambda v + k u) = \lambda \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(v) + k \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(u)$$

**Intuição:** Um vetor  $v$  pode ser decomposto numa base, sendo uma combinação linear de vetores da base. Imaginemos então que criamos uma estrutura que contém o vetor  $v$  e a combinação de vetores da base que somam  $v$ , toda montada com os vetores aplicados uns a seguir aos outros de acordo com a regra do paralelogramo.

Se o operador  $\mathcal{P}$  não altera a direção de vetores então esta estrutura não se deveria partir. Se se partisse seria estranho, quem carregasse esta estrutura de forma paralela iria ver para os vetores separarem-se e deixarem de estarem ligados uns aos outros, sugerindo que não teria sido mantida uma direção constante no seu transporte.

## 2. É bijetivo

É associação um para um entre os dois espaços tangentes (vetoriais). Ou seja obedece a dois critérios:

### I. É injetivo

Não existem vetores diferentes que ao serem paralelamente transportados produzam o mesmo vetor. Por outras palavras, se o vetor final do transporte paralelo de dois vetores é igual então é porque os vetores iniciais também eram iguais:

$$\forall u, v \in T_{c(a)}M, \quad \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(u) = \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(v) \implies u = v. \quad (\text{A.2.2})$$

**Intuição:** Ao transportar dois vetores diferentes, ou seja, vetores com direções diferentes, de forma a que a direção deles seja preservada, teremos que no fim também terão que ter direções diferentes, logo não poderiam resultar no mesmo vetor.

### II. É sobrejetivo

Qualquer vetor no espaço tangente final é resultado de um transporte paralelo de um vetor do espaço tangente inicial:

$$\forall w \in T_{c(b)}M, \exists u \in T_{c(a)}M : \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(u) = w. \quad (\text{A.2.3})$$

**Intuição:** Imaginemos uma estrutura no ponto inicial que tem vetores que apontam em todas as direções; ao mover essa estrutura paralelamente para o espaço tangente final todas as direções têm que ser contempladas.

★ Como é bijetivo terá sempre uma inversa bem definida, sendo possível defini-lo na

direção inversa, ou seja  $(\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c)^{-1}$ .<sup>a</sup>

**Intuição:** Isto faz sentido porque, para qualquer transporte paralelo, existe sempre uma forma de recuperar o vetor original percorrendo a mesma curva no sentido inverso até ao ponto inicial.

<sup>a</sup>É possível provar que a inversa de qualquer transporte paralelo  $(\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c)^{-1}$  pode ser expressa como um transporte paralelo ao longo da mesma curva, mas no sentido inverso. Assim, esta operação inversa satisfaz também todas as propriedades desta lista.

### 3. É independente da velocidade

Imaginemos duas curvas  $c$  e  $\gamma$  que percorrem a mesma imagem na variedade — isto é, traçam exatamente o mesmo caminho. Suponhamos agora que uma é percorrida a um ritmo diferente da outra. O transporte paralelo entre dois pontos será o mesmo em ambas, independentemente da velocidade com que o trajeto é percorrido. Formalmente:

$$c(t) = \gamma(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(v) = \mathcal{P}_{\lambda a \rightarrow \lambda b}^\gamma(v). \quad (\text{A.2.4})$$

Se  $c(t) = \gamma(\lambda t)$ , ir de  $t = a$  a  $t = b$  em  $c$  corresponde a percorrer o mesmo caminho e no mesmo sentido que ir de  $\lambda a$  a  $\lambda b$  em  $\gamma$ , apenas com um ritmo diferente. Como se trata do mesmo percurso, o transporte paralelo de um vetor ao longo dele produz o mesmo resultado, independentemente da velocidade com que é percorrido.

**Intuição:** Eu e o meu amigo fazemos exatamente o mesmo percurso entre os pontos  $A$  e  $B$ , cada um a transportar uma direção (vetor). Eu caminho, ele corre — mas a noção de direção em cada ponto não deve depender da rapidez com que nos movemos. No final, temos de concordar quanto à orientação do vetor transportado.

### 4. É suave

O transporte paralelo do mesmo vetor inicial ao longo de curvas semelhantes deve produzir vetores finais também semelhantes. No entanto, como estes vetores estarão definidos em pontos diferentes da variedade, não os podemos comparar diretamente. Para o fazer, recorremos a coordenadas locais, onde as imagens dos vetores podem ser comparadas através das suas componentes.

O que queremos dizer ao afirmar que o transporte paralelo é **suave** é que, quando observado numa carta local, os vetores resultantes de transportar o mesmo vetor inicial ao longo de curvas infinitesimalmente próximas têm componentes também infinitesimalmente próximas.

Intuitivamente, isto é natural: dois transportes quase idênticos não deveriam produzir

resultados muito diferentes. Seria absurdo que um desvio minúsculo no percurso causasse uma grande diferença no vetor final.

### Construção local da ideia

Consideremos um ponto  $p \in M$  e um vetor inicial  $v \in T_p M$ . Escolhemos uma carta local  $(U, \varphi)$  tal que  $\hat{p} = (0, \dots, 0)$ , e denotemos por  $\hat{v}$  o vetor  $v$  expresso em coordenadas locais.

Definimos a versão local do transporte paralelo:

$$\hat{\mathcal{P}}_{0 \rightarrow 1}^c(\hat{v}) := \widehat{\mathcal{P}_{0 \rightarrow 1}^c(v)}, \quad (\text{A.2.5})$$

ou seja, o transporte local é apenas a representação em coordenadas do transporte abstrato.

Agora, a cada ponto  $\hat{q}$  da vizinhança de  $\hat{p}$  associamos o vetor resultante de transportar paralelamente  $\hat{v}$  desde  $\hat{p}$  até  $\hat{q}$  ao longo da reta  $c_{\hat{q}}(t) = \hat{q}t$ . Isto define um campo vetorial local:

$$\mathcal{P}_{\hat{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{P}_{\hat{v}}(\hat{q}) := \hat{\mathcal{P}}_{0 \rightarrow \hat{q}}^{c_{\hat{q}}}(\hat{v}). \quad (\text{A.2.6})$$

No ponto de origem, temos simplesmente:

$$\mathcal{P}_{\hat{v}}(\hat{p}) = \hat{v}. \quad (\text{A.2.7})$$

A independência da velocidade do transporte permite relacionar curvas com parâmetros escalados:

$$c_{\lambda \hat{q}}(t) = c_{\hat{q}}(\lambda t) \implies \hat{\mathcal{P}}_{0 \rightarrow \lambda}^{c_{\hat{q}}}(\hat{v}) = \mathcal{P}_{\hat{v}}(\lambda \hat{q}). \quad (\text{A.2.8})$$

### Derivada direcional e suavidade

A suavidade deste campo vetorial implica a existência de derivadas direcionais em qualquer ponto. Em particular, no ponto  $\hat{p}$ :

$$\partial_{\hat{u}} \mathcal{P}_{\hat{v}}(\hat{p}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_{\hat{v}}(h\hat{u}) - \mathcal{P}_{\hat{v}}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathcal{P}}_{0 \rightarrow h}^{c_{\hat{u}}}(\hat{v}) - \hat{v}}{h}. \quad (\text{A.2.9})$$

Esta expressão mostra que a derivada direcional do campo gerado pelo transporte paralelo pode ser escrita apenas em termos do próprio operador de transporte.

Como a variedade é diferenciável e as cartas são compatíveis de forma suave, este campo mantém a suavidade em qualquer outro sistema de coordenadas.

**Intuição:** Caminhos quase idênticos devem gerar transportes paralelos quase idênticos. Imaginemos vários amigos a partir do mesmo ponto  $p$ , cada um a seguir uma reta diferente (em coordenadas locais), todos transportando o mesmo vetor  $v$ . Como os percursos são semelhantes, os vetores finais variam suavemente de ponto para ponto, formando um campo vetorial contínuo e derivável. É esta suavidade que garante que o transporte paralelo tenha um comportamento regular.

### A.3 Transporte Paralelo de Covetores

Este operador toma um covetor definido no espaço cotangente  $T_{c(a)}^* M$  e devolve o seu representante no espaço cotangente  $T_{c(b)}^* M$ . Matematicamente:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c : T_{c(a)}^* M \rightarrow T_{c(b)}^* M. \quad (\text{A.3.1})$$

Para definir o transporte paralelo de covetores, podemos introduzir uma condição que o relaciona com o transporte paralelo de vetores:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(\alpha)(\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(v)) = \alpha(v), \quad (\text{A.3.2})$$

onde  $v$  é um vetor e  $\alpha$  é um covetor.

Esta equação expressa que a avaliação de um vetor por um covetor é invariante se ambos forem transportados paralelamente ao longo do mesmo caminho.

**Intuição:** Imaginemos que transportamos paralelamente, ao longo de uma curva, uma seta (vetor) e uma régua (covetor) que mede essa seta. Se ambos são transportados mantendo sempre a mesma direção, o valor que a régua mede será sempre constante, pois qualquer alteração indicaria que a seta e a régua passaram a apontar em direções diferentes da original.

De forma equivalente, podemos reescrever a expressão isolando o transporte paralelo de covetores:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(\alpha) = \alpha \circ (\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c)^{-1}, \quad (\text{A.3.3})$$

onde a inversa do transporte paralelo se refere ao operador que atua sobre vetores. Interpretando esta expressão, vemos que usar o covetor transportado paralelamente ao longo de uma curva  $c$  é equivalente a usar o covetor original, mas avaliando o vetor transportado paralelamente no sentido inverso da mesma curva.

**Intuição:** Podemos imaginar uma “réguia” (covetor) e uma seta (vetor). No método original, transportamos a régua até à posição da seta para medir. Usando a expressão com a inversa, podemos proceder de forma equivalente: em vez de levar a régua até à seta, transportamos a seta ao longo do mesmo caminho, mas no sentido inverso, até à régua, e realizamos a medição.

Resumindo: levar o vetor à régua é equivalente a levar a régua ao vetor.

A partir desta nova condição e das propriedades dos covetores é possível definir o seu transporte paralelo e provar que este segue as propriedades listadas em A.2.

## A.4 Transporte Paralelo de Tensores

Podemos agora generalizar o transporte paralelo para um tensor arbitrário do tipo  $(r, s)$ . Este operador toma um tensor definido no espaço de tensores  $T_{c(a)}^{(r,s)} M$  e devolve o seu representante do espaço de tensores  $T_{c(b)}^{(r,s)} M$ . Matematicamente:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c : T_{c(a)}^{(r,s)} M \longrightarrow T_{c(b)}^{(r,s)} M. \quad (\text{A.4.1})$$

Um tensor pode ser visto como uma coleção (por somas e produtos tensoriais) de vetores e covetores. Assim, o transporte paralelo de tensores deve ser compatível com estas operações. Isto é, o transporte paralelo deve preservar o produto tensorial:

$$\mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(T \otimes S) = \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(T) \otimes \mathcal{P}_{a \rightarrow b}^c(S) \quad (\text{A.4.2})$$

Esta condição define naturalmente o transporte paralelo de qualquer tensor a partir dos operadores já definidos para vetores e covetores.

**Intuição:** Transportar paralelamente um tensor (coleção de vetores e covetores) é o mesmo que transportar separadamente cada um dos seus vetores e covetores constituintes e depois reconstruir o tensor com os resultados. Por exemplo, transportar um tensor  $T = v \otimes \alpha$  é equivalente a transportar paralelamente o vetor  $v$  e o covetor  $\alpha$  e depois voltar a formar o produto tensorial. Se o tensor for uma coleção de coleções, o raciocínio repete-se: transportam-se primeiro as partes mais simples e só depois se recompõe o todo.

A partir desta definição e das propriedades do produto tensorial, o transporte paralelo estende-se de forma natural a qualquer tensor do tipo  $(r, s)$ , sendo possível provar todas as propriedades fundamentais — linearidade, suavidade e compatibilidade com o transporte de vetores e covetores.

Este operador será o mais geral e versátil, pois o conceito de tensor abrange todos os objetos geométricos que estudámos até aqui: escalares, vetores, covetores e combinações mais complexas destes.