Transformações de Lorentz e de Möbius

Ida Griffith
2° ano da LMAC
L51279@isabelle.math.ist.utl.pt

15 de Outubro de 2002

Palavras Chave

Transformações de Lorentz, Transformações de Möbius, Projecção Estereográfica, Esferas Celestes

Resumo

Dois gémeos são separados no seu 20° aniversário; um fica na Terra, o outro viaja a uma velocidade próxima da velocidade da luz em direcção a um planeta situado a 8 anos-luz e regressa. Que idade terá quando regressar? Terá a mesma idade que o gémeo que ficou na Terra? E que relação tem isto tudo com o grupo de Möbius?

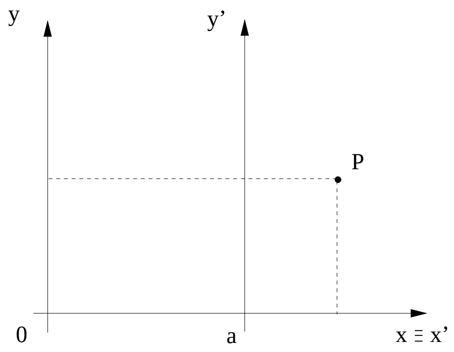
1 Transformações de Galileu

Como todos aprendemos no Secundário, facilmente se relaciona a posição de dois observadores inerciais. Considere-se um observador O, e seja O' um observador na posição $(a, 0, 0)$. Considere-se um ponto P. Se O atribui a este ponto as coordenadas (x, y, z), O' atribui (x', y', z'), onde

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

As coordenadas de um ponto (acontecimento) dependem do referencial (observador) que se considera.

Suponhamos que O' se está a mover segundo o eixo dos xx com uma velocidade v. Se O' parte da origem, a abcissa do referencial O' (vista por O) é dada por $a = vt$. Assim, O' vê um acontecimento P com coordenadas (t', x', y', z'), enquanto O vê o mesmo acontecimento com coordenadas



(t, x, y, z) tais que

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Isto na Mecânica Clássica, e pensou-se ser assim durante séculos. No fim do século XIX, descobriu-se que quando a velocidade aumenta muito, os cálculos, aplicando as transformações de Galileu, começavam a apresentar um erro cada vez mais significativo.

Sejam:

u' - velocidade de um objecto em relação a O'
v - velocidade de O' em relação a O

Qual a velocidade u do objecto em relação a O? De

$$\begin{cases} x = ut \\ x' = u't' \end{cases}$$

obtém-se a **lei da adição das velocidades**:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t'} = u' + v$$

Isto não faz sentido quando se consideram velocidades muito elevadas. Por exemplo, se $u' = c$ (velocidade da luz) e $v > 0$,

$$u = c + v > c$$

Mas é um facto experimental que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais. Não se podem ter velocidades superiores à velocidade da luz.

2 Transformações de Lorentz

Introduzimos o factor de correcção $\gamma = \gamma(\vec{v}) = \gamma(\|\vec{v}\|)$:

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma} \tag{1}$$

Determinação de γ:

Pelo **Princípio da Relatividade**, se v é a velocidade de O' em relação a O, então $(-v)$ é a velocidade de O em relação a O'. Por analogia com (1)

$$x' = -vt' + \frac{x}{\gamma} \tag{2}$$

Por outro lado, (1) é equivalente a

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{3}$$

De (2) e (3):

$$\begin{aligned}
&\gamma(x - vt) = -vt' + \frac{x}{\gamma} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow vt' = \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma vt \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow t' = \frac{1}{v}\left(\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)x + \gamma vt\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v}x + \gamma t \end{cases}
\end{aligned} \tag{4}$$

Se em $t = x = 0$ for emitido um sinal luminoso (velocidade$= c$)

$$\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}$$

(todos os observadores vêem a luz à mesma velocidade, direcção e sentido), e portanto

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - vt) \\ t' = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} ct + \gamma t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{\gamma}{c}(c-v)t \\ t' = \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v} c + \gamma\right) t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{c}(c-v) = \frac{1-\gamma^2}{\gamma v} c + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 \frac{v}{c^2} c \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \gamma^2 + \gamma^2 \frac{v}{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 \left(\frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

De (4) e (5),

$$t' = \frac{1 - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t =$$

$$= \frac{\frac{-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t =$$

$$= \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t$$

e portanto as transformações de Lorentz são dadas por

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Portanto **diferentes observadores fazem diferentes medições de espaço e de tempo.**

Quando $v \ll c$, a Tranformações de Lorentz são bem aproximadas por

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

(ou seja, as transformações de Galileu estão correctas para velocidades baixas relativamente à velocidade da luz).

Pelo Princípio da Relatividade as transformações inversas são

$$\begin{cases} x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Sejam:

u' - velocidade de um objecto em relação a O'
v - velocidade de O' em relação a O

Qual a velocidade u do objecto em relação a O? De

$$\begin{cases} x = ut \\ x' = u't' \end{cases}$$

obtém-se a **regra relativista para a adição de velocidades**:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{vx'}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

Assim, se $u' = c$

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c(c + v)}{c + v} = c!$$

Para simplificar as fórmulas, vamos usar unidades nas quais $c = 1$ (por exemplo, medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz).

Definição. Espaço-tempo de Minkowski

O espaço-tempo de Minkowski é $\mathbb{R}^4$ com coordenadas t, x, y, z (a primeira coordenada é de tempo e as restantes são de espaço).

Definição. Produto interno de Minkowski

Dados dois vectores de $\mathbb{R}^4$,

$$\vec{u} = (t_1, x_1, y_1, z_1)$$
$$\vec{v} = (t_2, x_2, y_2, z_2),$$

define-se

$$< \vec{u}, \vec{v} >= t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2.$$

(Na realidade é um pseudo-produto interno, pois não satisfaz positividade).

Pode mostrar-se que o produto interno de Minkowski é invariante sob as transformações de Lorentz, i.e., tem sempre o mesmo valor independentemente do referencial em que é calculado.

Norma de um vector: dado

$$\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

define-se

$$\|\vec{x}\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Existem 3 tipos de vectores:

$$\begin{cases} \text{tipo tempo:} & \|\vec{x}\|^2 > 0 \\ \text{tipo luz ou nulo:} & \|\vec{x}\|^2 = 0 \\ \text{tipo espaço:} & \|\vec{x}\|^2 < 0 \end{cases}$$

No caso de um vector do *tipo tempo*, $\sqrt{\|\vec{x}\|^2}$ corresponde ao tempo medido por um observador que vê o acontecimento em posição constante; no caso de ser um vector do *tipo espaço*, $\sqrt{-\|\vec{x}\|^2}$ corresponde à distância medida por um observador que vê o acontecimento no mesmo instante.

Exemplo.

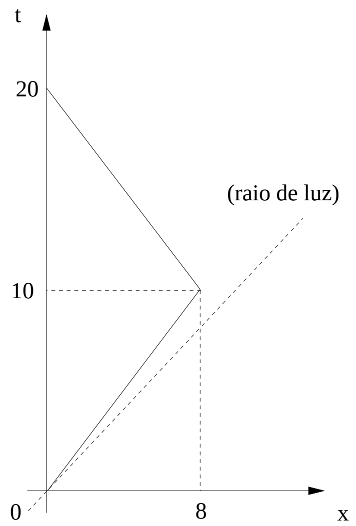
Paradoxo dos Gémeos: *Dois gémeos, Alice e Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção de um planeta situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, Bernardo regressar à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, Alice tem 40 anos quando revê o irmão. Quantos anos terá Bernardo?*

Seja t_1 o tempo da primeira parte do percurso e t_2 o tempo relativo à segunda parte.

$$t_1 = \sqrt{< (10, 8), (10, 8) >} = \sqrt{36} = 6$$

$$t_2 = \sqrt{< (10, -8), (10, -8)} = \sqrt{36} = 6$$

Para o Bernardo passaram 12 anos, logo terá 32 anos quando regressar à Terra. Portanto Alice e Bernardo têm 8 anos de diferença quando se reencontram!



Define-se o grupo de Lorentz como o conjunto de todas as transformações lineares $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que preservam o produto interno de Minkowski. Pretende-se relacionar o grupo de Lorentz com as transformações de Möbius; para isso é necessário clarificar alguns conceitos.

3 Projecção Estereográfica

Definimos $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : z = 0\}$ e fazemos a identificação $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$.

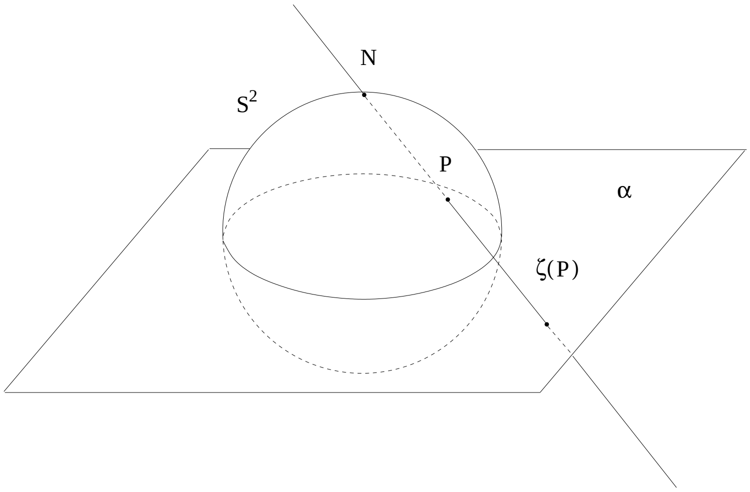
Definição. Projecção Estereográfica

A projecção estereográfica $\zeta : S^2 \setminus N \to C$ é uma aplicação que para cada ponto $P = (x, y, z)$ associa a intersecção ζ da recta que une $N = (0, 0, 1)$ e P com α. Portanto

$$\zeta(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z},$$

ou em coordenadas esféricas ($r = 1$),

$$\zeta(\theta, \varphi) = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} e^{i\varphi}$$



PROPOSIÇÃO.

A projecção estereográfica de uma circunferência $\gamma \subset S^2$ é uma recta (se $N \in \gamma$) ou uma circunferência (caso contrário).

Esta proposição, apesar de não ter uma demonstração simples, é relativamente fácil de verificar intuitivamente. Definimos ainda

$$\zeta(N) = \zeta(0,0,1) \equiv \infty$$

Assim, pode-se pensar na esfera S^2 como o plano complexo reunido com o ponto no infinito:

$$S^2 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

4 Transformações de Möbius

DEFINIÇÃO. Transformações de Möbius

Uma *transformação de Möbius* é uma função $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da forma

$$f(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$.

O conjunto $GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$ é um grupo.

Considere-se a função

$$H : GL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$$
$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

($\mathcal{M}$ designa o grupo das transformações de Möbius com a operação de composição)

Como $H(A \cdot B) = H(A) \circ H(B)$, H é um homomorfismo de grupos. O núcleo de H, $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$, pode ser determinado resolvendo

$$H\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} = \zeta \Leftrightarrow \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \zeta \Leftrightarrow b = c = 0 \wedge a = d,$$

ou seja,

$$\mathcal{N}_H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} = \{aI : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

Assim,

$$\mathcal{M} \approx \frac{GL(2,\mathbb{C})}{\mathcal{N}_H}.$$

O conjunto $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$ é um subgrupo de $GL(2,\mathbb{C})$. Se considerarmos a restrição de H a $SL(2,\mathbb{C})$,

$$H|_{SL(2,\mathbb{C})} : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{M},$$

vemos que o núcleo deste homomorfismo é determinado por

$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \zeta \Leftrightarrow \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \zeta \Leftrightarrow b = c = 0 \wedge a = d$$

e ainda por

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow ad - bc = 1 \Leftrightarrow a = d = 1 \vee a = d = -1$$

Portanto $\mathcal{N}_{H|_{SL(2,\mathbb{C})}} = \{\pm I\}$
Assim,

$$\mathcal{M} \approx \frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{\pm I\}}.$$

Seja $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormada do espaço-tempo de Minkowski e $\vec{v} = t\vec{e}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ um vector.

Pode-se identificar $\vec{v}$ com uma matriz hermitiana V usando a função $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}_2 \equiv \{V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : V^* = V\}$ definida por

$$I(\vec{v}) = V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix}$$

Uma vez que

$$\det V = \frac{1}{2}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) = \frac{1}{2} < \vec{v}, \vec{v} >,$$

podemos considerar a função $F : SL(2,\mathbb{C}) \to O(3,1)$ dada por

$$F(g)V = gVg^*,$$

(note-se que $\det(F(g)V) = \det V$). Esta aplicação é um homomorfismo de grupos, já que $F(gh)V = F(g) \circ F(h)V$, $\forall_{V\in\mathbb{H}_2} \forall_{g,h\in SL(2,\mathbb{C})}$.

É possível mostrar que $\mathcal{N}_F = \{\pm I\}$, e que F é sobrejectiva. Logo,

$$\frac{SL(2,\mathbb{C})}{\{\pm I\}} \approx O(3,1),$$

e portanto

$$O(3,1) \approx \mathcal{M}$$

O grupo das transformações de Lorentz é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius.

Este isomorfismo tem a seguinte interpretação: dois observadores distintos estão relacionados por uma transformação de Lorentz. Por outro lado, cada observador situa a um objecto cuja luz lhe chega de uma determinada direcção no ponto correspondente de S^2 (a sua "esfera celeste"). Acontece que diferentes observadores situam o mesmo objecto em pontos diferentes das suas esferas celestes. A função $f : S^2 \to S^2$ que relaciona as duas esferas celestes é exactamente a transformação de Möbius associada à transformação de Lorentz que relaciona os dois observadores.

Usando as propriedades da projecção estereográfica e das transformações de Möbius (vistas como transformações $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), é possível mostrar que estas transformações (vistas como transformações $f : S^2 \to S^2$) levam círculos para círculos. Portanto se um observador vê um objecto com um contorno circular, todos os outros observadores verão o mesmo objecto com um contorno circular. Em particular, isto será verdade se o objecto for esférico.

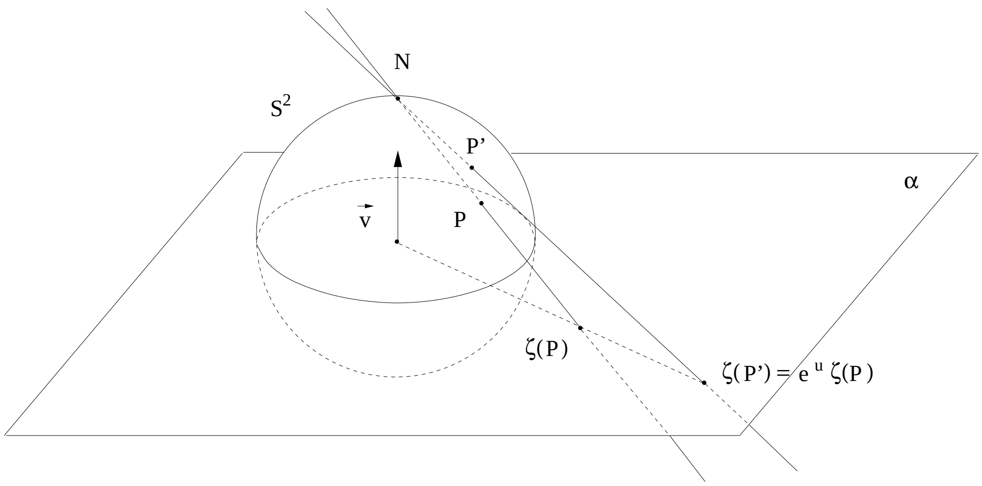
Exemplo.

Velocidade de O' em relação a O: $\vec{v} = v\vec{e}_z$.

Seja $u = \arctan v$. A transformação de Möbius que corresponde a este transformação de Lorentz é

$$f(\zeta) = e^u \zeta$$

Assim, um objecto no ponto P da esfera celeste do observador O será visto pelo observador O' num ponto P' mais próximo de N.



Agradecimentos

Queria agradecer ao Prof. José Natário toda a ajuda e tempo que me dispensou. Gostaria também de agradecer à Fundação Calouste Gulbenkian pela oportunidade que me foi dada de aprofundar os meus conhecimentos.

Referências

[1] Ávila, *Variáveis Complexas e Aplicações*, LTC Editora (2000);

[2] Bondi, *Relativity and Common Sense*, Dover (1962);

[3] Oliva, *Geometric Mechanics*, Springer (2002);

[4] Penrose, *The Apparent Shape of a Relativistically Moving Sphere* Proc. Cambridge Philos. Soc. 55 (1959) 137-139;

[5] Rodrigues, *Introdução à Teoria da Relatividade Restrita*, IST Press (1998);

[6] Taylor & Wheeler, *Spacetime Physics*, Freeman (1992).

`http://math.ucr.edu/home/baez/relativity.html`