Geodésicas Nulas em Relatividade Geral

Francisco João Lopes
Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

Suportado pelo Programa Novos Talentos em Matemática da Fundação Calouste Gulbenkian
Tutorado pelo Professor José Natário do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico

4 de Março de 2013

Resumo

Pretende-se estudar raios de luz, ou seja, geodésicas nulas, em Relatividade Geral. Em particular pretende-se obter uma demonstração rigorosa do efeito de Shapiro, que é o atraso que um raio de luz sofre ao percorrer um dado trajecto num campo gravitacional.

1 Introdução

No início do século XX, com a criação da Teoria da Relatividade Restrita, por Einstein (que postulou que a velocidade máxima que uma partícula pode atingir é a velocidade da luz, c), surgiu a necessidade de uma nova teoria da gravitação. Isto porque na teoria de Newton a atracção gravítica propaga-se instantaneamente, logo mais rápido que a luz. Esta nova teoria surgiu em 1915, por Einstein, e é conhecida por Teoria da Relatividade Geral, sendo uma teoria assente em geometria diferencial. As equações de Einstein são:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

em que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e G é a constante de gravitação universal. Doravante, de modo a facilitar os cálculos, utilizarei $G = c = 1$. Define-se o elemento de tempo próprio, $d\tau$, como:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

onde usamos a convenção da soma de Einstein, em que se soma sobre os índices repetidos. Outra convenção a utilizar é que as letras gregas tomam valores em $\{0, 1, 2, 3\}$ e as letras latinas tomam valores em $\{1, 2, 3\}$. Os raios de luz são geodésicas nulas, ou seja, tais que $ds^2 = 0$.
O efeito de Shapiro é o atraso que um raio de luz sofre ao percorrer um dado trajecto num campo gravitacional. Isto acontece porque a massa gravitacional curva o espaço-tempo. Este atraso pode ser calculado na métrica de Schwarzschild, que descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico de massa M. Em geral utiliza-se a métrica linearizada, ou seja, a aproximação de campos fracos. Neste caso escreve-se:

$$ds^2 \simeq -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{3}$$

em que ϕ é o potencial gravítico Newtoniano. Considera-se um raio de luz a ir do ponto A, com coordenadas (x_A, b) para o ponto B, com coordenadas (x_B, b), em que b é o parâmetro de impacto e $b \ll |x_A|, x_B$. O referencial cartesiano em questão tem origem no centro do corpo esférico, e assumimos $x_A < 0 < x_B$.

Assim:

$$dt^2 \simeq (1 + 2\phi)^{-1}(1 - 2\phi)dx^2 \simeq (1 - 2\phi)^2 dx^2 \Rightarrow \tag{4}$$

$$dt \simeq (1 - 2\phi)dx \Rightarrow \tag{5}$$

$$\Delta t \simeq \int_{x_A}^{x_B} (1 - 2\phi)dx = \Delta x - 2\int_{x_A}^{x_B} \phi \, dx \tag{6}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\Delta t &\simeq \Delta x + 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{M\ dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \Delta x + \frac{2M}{b}\int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}} &(7)\\
&\simeq \Delta x + 2M\left[\sinh^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right]_{x_A}^{x_B} = \Delta x + 2M\log\frac{\frac{x_B}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{x_B}{b}\right)^2}}{\frac{x_A}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{x_A}{b}\right)^2}} &(8)\\
&\simeq \Delta x + 2M\log\frac{\frac{2x_B}{b}}{\frac{x_A}{b}+\left|\frac{x_A}{b}\right|\sqrt{1+\left(\frac{b}{x_A}\right)^2}} \simeq \Delta x + 2M\log\frac{\frac{2x_B}{b}}{\frac{x_A}{b}+\left|\frac{x_A}{b}\right|\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x_A}\right)^2\right)} &(9)\\
&\simeq \Delta x + 2M\log\frac{2x_B}{b} - 2M\log\left|\frac{b}{2x_A}\right| = \Delta x + 2M\log\frac{4x_B\,|x_A|}{b^2}. &(10)
\end{aligned}$$

Obtém-se assim uma estimativa do efeito de Shapiro na métrica de Schwarzschild em campos fracos. Na 3ª secção está a demonstração do efeito de Shapiro para qualquer tipo de campos esfericamente simétricos, sobre a qual não foi encontrada nenhuma publicação.

2 Métrica Luminosa

Métricas estáticas são métricas da forma:

$$ds^2 = -e^{2\phi(x^1,x^2,x^3)}dt^2 + \gamma_{ij}(x^1,x^2,x^3)dx^i dx^j \tag{11}$$

A $\gamma_{ij}(x^1,x^2,x^3)$ dá-se o nome de métrica espacial. O factor $e^{2\phi(x^1,x^2,x^3)}$ pode ser interpretado se considerarmos dois observadores estacionários muito próximos, um em x^i e outro em $x^i+\Delta x^i$. Nesta situação tem-se que o tempo próprio, medido pelos observadores, que um raio de luz demora a ir de x^i para $x^i+\Delta x^i$ relaciona-se com o tempo de coordenadas, t, através de:

$$\Delta\tau = e^{\phi}\Delta t. \tag{12}$$

Esta relação traduz o chamado "redshift" gravitacional.
No tratamento de geodésicas nulas em métricas estáticas é útil definir uma métrica "luminosa", λ_{ij}. Nestas geodésicas tem-se $ds^2=0$, o que, no caso de uma métrica estática da forma de (11) leva a:

$$\dot{t}^2 = \lambda_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{13}$$

com $x^i = x^i(s)$, $t=t(s)$ e $\lambda_{ij} = e^{-2\phi}\gamma_{ij}$. Note-se que $\cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$. Pretende-se provar que uma geodésica $x^i(t)$ da métrica luminosa, parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, tal que:

$$\lambda_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 1 \tag{14}$$

é equivalente a uma geodésica nula da métrica (11), $x^i(s)$, isto é, $e^{2\phi}\dot{t}^2 = \gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, descrita pelas equações espaciais das geodésicas e pela equação do tempo:

$$e^{2\phi}\dot{t} = E \tag{15}$$

com E constante. Para resolver este problema começa-se por provar a implicação: geodésica da métrica luminosa implica geodésica nula da métrica ds^2. Utilizam-se as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{16}$$

aplicadas ao lagrangeano que descreve as geodésicas da métrica luminosa:

$$L = \frac{1}{2}\lambda_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}. \tag{17}$$

Uma vez que $x^i(t) = x^i(s(t))$, será útil expressar a 1ª e 2ª derivada de $x^i(t)$ em derivadas em ordem a s:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{x}^i}{\dot{t}}. \tag{18}$$

Substituindo (17) em (16) e utilizando (18) obtém-se, sucessivamente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_{ij}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda_{jk}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-2\phi}\gamma_{ij}\frac{\dot{x}^j}{\dot{t}}\right) - \left(-2\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\gamma_{jk} + \frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial x^i}\right)\frac{\dot{x}^j\dot{x}^k e^{-2\phi}}{2\dot{t}^2} = 0. \tag{20}$$

De seguida utiliza-se o facto de $t = t(s)$ e define-se o parâmetro s, de modo a que $e^{2\phi}\dot{t} =$ constante:

$$\frac{e^{-2\phi}}{\dot{t}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_{ij}\dot{x}^j\right) + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\gamma_{jk}\frac{\dot{x}^j\dot{x}^k e^{-2\phi}}{\dot{t}^2} - \frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial x^i}\frac{\dot{x}^j\dot{x}^k e^{-2\phi}}{2\dot{t}^2} = 0 \Leftrightarrow \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_{ij}\dot{x}^j\right) + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\gamma_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k - \frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial x^i}\frac{\dot{x}^j\dot{x}^k}{2} = 0 \tag{22}$$

Como a parametrização é a de comprimento de arco:

$$\lambda_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 1 \Leftrightarrow \tag{23}$$

$$e^{2\phi} = \gamma_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \tag{24}$$

$$e^{2\phi}\dot{t}^2 = \gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{25}$$

Portanto, o 2º termo altera-se:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\gamma_{ij}\dot{x}^j\right) + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}e^{2\phi}\dot{t}^2 - \frac{\partial\gamma_{jk}}{\partial x^i}\frac{\dot{x}^j\dot{x}^k}{2} = 0. \tag{26}$$

Note-se que (26) é a equação de Euler-Lagrange das geodésicas para a métrica (11), onde o Lagrangeano é dado por:

$$L = \frac{1}{2}\left(-e^{-2\phi}\dot{t}^2 + \gamma_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) \tag{27}$$

com as equações de Euler-Lagrange para as geodésicas $x^i(s)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{28}$$

Falta satisfazer a seguinte equação de Euler-Lagrange para estas geodésicas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(e^{2\phi}\dot{t}\right) = 0 \Leftrightarrow \tag{29}$$

$$e^{2\phi}\dot{t} = E. \tag{30}$$

E é uma constante arbitrária, que corresponde à liberdade do parâmetro afim das geodésicas nulas. Está assim demonstrada a implicação pretendida. Para demonstrar a implicação inversa, basta seguir todos os passos, mas na ordem inversa.

3 Efeito de Shapiro numa métrica estática esfericamente simétrica

Considera-se uma métrica estática esfericamente simétrica, isto é, da forma:

$$ds^2 = -e^T dt^2 + e^Q dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \tag{31}$$

onde $T = T(r)$, $Q = Q(r)$, (r, θ, φ) são coordenadas esféricas, sendo θ a co-latitude e φ a longitude. As componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, nesta métrica, são dadas por:

$$R_{00} = e^{T-Q}\left(\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4} + \frac{T'}{r}\right) \tag{32}$$

$$R_{rr} = -\frac{T''}{2} - \frac{(T')^2}{4} + \frac{T'Q'}{4} + \frac{Q'}{r} \tag{33}$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-Q} + re^{-Q}\left(\frac{Q'}{2} - \frac{T'}{2}\right) \tag{34}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta. \tag{35}$$

Calcula-se o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} R = -e^{-Q}\left(\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4} + \frac{T'}{r}\right) + \ e^{-Q}\left(-\frac{T''}{2} - \frac{(T')^2}{4} + \frac{T'Q'}{4} + \frac{Q'}{r}\right) \\ + \frac{2}{r^2}\left[1 - e^{-Q} + re^{-Q}\left(\frac{Q'}{2} - \frac{T'}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \end{aligned} \tag{36}$$

$$R = e^{-Q}\left[-T'' - \frac{(T')^2}{2} + \frac{T'Q'}{2} + \frac{2}{r}\left(Q' - T'\right)\right] + \frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-Q}\right). \tag{37}$$

De seguida calcula-se o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$:

$$G_{00} = \frac{e^{T-Q}\,Q'}{r} + \frac{e^T}{r^2}\left(1 - e^{-Q}\right) \tag{38}$$

$$G_{rr} = \frac{T'}{r} - \frac{e^Q}{r^2}\left(1 - e^{-Q}\right) \tag{39}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-Q}\left[\frac{T''}{2} + \frac{(T')^2}{4} - \frac{T'Q'}{4}\right] \tag{40}$$

$$G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta}\sin^2\theta. \tag{41}$$

Definindo a massa gravitacional $m(r)$ e o potencial gravítico $\phi(r)$ como:

$$e^Q = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \tag{42}$$

$$e^T = e^{2\phi(r)}. \tag{43}$$

Nestas condições o tensor energia-momento é:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho e^{2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r e^Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_t r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_t r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

onde ρ é a densidade, P_r a pressão radial e P_t a pressão tangencial.
Aplicando (1), ou seja, as equações de Einstein, obtém-se:

$$\mu, \nu = 0, 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{dr}} = 4\pi r^2 \rho \tag{44}$$

$$\mu, \nu = 1, 1 \Rightarrow \frac{\phi'}{r}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 4\pi P_r + \frac{m}{r^3} \tag{45}$$

$$\mu, \nu = 2, 2 \text{ e } \mu, \nu = 3, 3 \Rightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[\phi'' + \phi'^2 + \frac{\phi'}{r}\right] - \left(\phi' + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{m}{r}\right)' = 8\pi P_t. \tag{46}$$

Note-se que $\mu, \nu = 2, 2$ e $\mu, \nu = 3, 3$ levam à mesma equação devido à simetria esférica do problema.
A equação (44) dá a conservação da massa.
Pretende-se obter a demonstração do efeito de Shapiro (válida em campos gravitacionais fortes), isto é, que o tempo (seja próprio, τ, medido por um observador estacionário em $r = R$, ou de coordenadas, t, medido por um observador estacionário em $r = \infty$) que um raio luminoso demora a viajar de um ponto da esfera em $r = R$ ao seu ponto antípoda é maior ou igual que $2R$, sendo igual a $2R$ apenas no limite de Minkowski, ou seja, na ausência de campo gravitacional. Por hipótese, $r > 2m(r)$, pois e^Q, em (42), é uma função positiva.
Vamos assumir que $\rho \geq 0$, o que implica que não há massa negativa ($m \geq 0$) e que $m(r) \leq m(R)$; e que $P_r \geq 0$.
Estas hipóteses fazem sentido fisicamente, apesar de se poderem utilizar outras, tais como a condição de energia dominante. Neste caso $\rho \geq |P_r|$ e $\rho \geq |P_t|$. O significado físico desta condição é que não existe transporte de matéria/energia com velocidade maior que c.
Normaliza-se o potencial de modo a que $\phi(\infty) = 0$.
Com estas condições, de (45), segue que ϕ é crescente, $\phi' \geq 0$ e portanto $\phi(r) \leq 0$
Seja $\xi(s)$ a geodésica nula que a luz percorre. Então, como $ds^2 = 0$:

$$dt^2 = e^{-2\phi(r)} \gamma_{ij} dx^i dx^j. \tag{47}$$

Integrando ao longo da geodésica:

$$\Delta t = \int_\xi e^{-\phi(r)} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2m[r(s)]}{r(s)}} \dot{r}^2(s) + r^2(s)\dot{\Omega}^2(s)}\ ds \tag{48}$$

com $\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. O tempo próprio relaciona-se com o tempo de coordenadas. Utiliza-se a métrica ds^2 e o facto de os observadores que medem τ estarem parados, o que implica $dr^2 = 0$, $d\theta^2 = 0$ e $d\varphi^2 = 0$. Segue imediatamente que:

$$d\tau = e^{\phi(R)} dt \Leftrightarrow \tag{49}$$

$$\Delta\tau = e^{\phi(R)} \Delta t. \tag{50}$$

E obtém-se o tempo próprio:

$$\Delta\tau = \int_\xi e^{\phi(R) - \phi(r)} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2m[r(s)]}{r(s)}} \dot{r}^2(s) + r^2(s)\dot{\Omega}^2(s)}\ ds\,. \tag{51}$$

Como ϕ é crescente tem-se $e^{\phi(R)-\phi(r)} \geq 1$. Como $m(r) \geq 0$ e $r \geq 0$ tem-se que $\frac{1}{1-\frac{2m(r(s))}{r(s)}} \geq 1$. Logo:

$$\Delta\tau \geq \int_{\xi} \sqrt{\dot{r}^2(s) + r^2(s)\dot{\Omega}^2(s)}\; ds = l(\xi). \tag{52}$$

Está assim provado o efeito de Shapiro, pois $l(\xi)$ é o comprimento euclidiano da geodésica luminosa, que liga dois pontos antípodas em $r = R$ e portanto $\Delta\tau \geq 2R$. No entanto, o resultado apenas foi provado para geodésicas que não saem da esfera $r \leq R$, devido ao termo $e^{\phi(R)-\phi(r)}$.
Note-se que para o tempo de coordenadas, Δt, dado por (48), pode-se provar o efeito de Saphiro, quer a geodésica saia da esfera quer não, pois $\phi(r) \leq 0 \;\; => \;\; e^{-\phi(r)} \geq 1$. De modo equivalente ao que foi feito para $\Delta\tau$ obtém-se $\Delta t \geq 2R$.

4 A distribuição de massa que minimiza o efeito de Shapiro

Pretende-se encontrar, para uma dada massa total $M > 0$ dentro da esfera de raio R, a distribuição de massa que minimiza $\Delta\tau$, dado por (51). Para minimizar $\Delta\tau$ tem que se minimizar o integral da equação (51), e portanto minimizar $\frac{1}{1-\frac{2m(r(s))}{r(s)}}$, o que é equivalente a maximizar $1 - \frac{2m(r(s))}{r(s)}$ e a minimizar $\frac{2m(r)}{r}$. Para o fazer basta distribuir a massa da seguinte forma:

$$m(r) = \begin{cases} M \text{ se } r = R \\ 0 \text{ se } r < R. \end{cases}$$

Esta distribuição corresponde à densidade $\rho(r)$ ser um delta de Dirac centrado em $r = R$. Note-se que (45) implica que a função $\phi(r)$ será contínua, e logo constante igual a zero, desde que P_r não seja também um delta de Dirac.
Surge naturalmente a questão acerca da possibilidade de existência desta distribuição de massa. Nesta distribuição de massa tem-se, fisicamente, que $P_r = 0$ para $r < R$, devido à ausência de massa nesta região. Sendo assim a camada esférica que inclui a massa M tem que ser suportada pela pressão tangencial, numa situação em que as partículas estão em órbitra. Para avaliar P_t utilizam-se as equações de Einstein, (44)-(46). Deriva-se (45), com pressão radial nula:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\phi'' - 2\left(\frac{m}{r}\right)'\phi' = \frac{1}{r}\left(\frac{m}{r}\right)' - \frac{m}{r^3}. \tag{53}$$

De seguida insere-se ϕ'' em (46):

$$8\pi P_t = \left(\frac{m}{r}\right)'\phi' + \frac{1}{r}\left(\frac{m}{r}\right)' - \frac{m}{r^3} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left[\phi'^2 + \frac{\phi'}{r}\right] - \phi'\left(\frac{m'}{r}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{m}{r}\right)'. \tag{54}$$

Utilizando (45) e simplificando:

$$\begin{aligned} 8\pi P_t &= \left(\frac{m}{r}\right)'\phi' - \frac{m}{r^3} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\phi'^2 + \frac{m}{r^3} && (55)\\ &= \frac{m'}{r}\phi' - \frac{m}{r^2}\phi' + \frac{m^2}{r^4}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} && (56)\\ &= \frac{m'r - m}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\frac{m}{r^2} + \frac{m^2}{r^4}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} && (57)\\ &= \frac{m'r - m + m}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\frac{m}{r^2} && (58)\\ &= \frac{m'm}{r^3\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. && (59) \end{aligned}$$

De seguida insere-se m', dado por (44) e chega-se a:

$$P_t = \frac{\rho m}{2r\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \tag{60}$$

Como $\rho \geq 0$ tem-se $P_t \geq 0$, logo a distribuição de massa (51) é concretizável fisicamente.

5 Problemas em aberto

Após este trabalho fica essencialmente um problema por resolver: provar o efeito de Shapiro para o tempo próprio $\Delta\tau$, mesmo para geodésicas que saiam fora da esfera $r = R$. Averiguemos a situação em que a massa está toda contida numa esfera de raio $R = 2M + \epsilon$, com ϵ muito pequeno, que poderia eventualmente violar a desigualdade de Shapiro. Assim sendo estamos em Schwarzschild e tem-se:

$$e^{2\phi} = 1 - \frac{2M}{R} = \frac{\epsilon}{2M + \epsilon}. \tag{61}$$

Logo, no limite $\epsilon \to 0$, tem-se $\Delta\tau = e^{\phi}\Delta t \to 0$, desde que Δt seja limitado. Através da análise do potencial gravítico é possível concluir que a órbita estável de menor raio para um raio de luz é $r = 3M$. Como o objectivo é fazer a geodésica curvar até ao ponto antípoda da esfera $R = 2M + \epsilon$, conclui-se que $2M + \epsilon < r < 3M$.
A métrica, no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ é dada por:

$$ds^2 = -Vdt^2 + V^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{62}$$

onde $V = 1 - \frac{2M}{r}$.
Num raio de luz, $ds^2 = 0$, logo:

$$dt^2 = V^{-2}dr^2 + V^{-1}r^2 d\varphi^2. \tag{63}$$

Existe uma quantidade conservada, o momento angular $L = V^{-1}r^2\dot{\varphi}$ (sendo que $\cdot = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$).
Assim e tendo em conta que t é o comprimento de arco:

$$1 = V^{-2}\dot{r}^2 + V^{-1}r^2\dot{\varphi}^2 \Leftrightarrow \tag{64}$$

$$1 = V^{-2}\dot{r}^2 + \frac{VL^2}{r^2} \Leftrightarrow \tag{65}$$

$$\dot{r} = \pm\sqrt{V^2 - \frac{V^3}{r^2}L^2} \tag{66}$$

Com o sinal $+$ para quando a geodésica se afasta, e o sinal $-$ para quando se aproxima do ponto antípoda. Calculando Δt:

$$\Delta t = 2\int_R^{r_{max}} \frac{dr}{\dot{r}} = 2\int_R^{r_{max}} \frac{dr}{V\sqrt{1 - \frac{V}{r^2}L^2}}. \tag{67}$$

Obtém-se então $\Delta\tau$:

$$\Delta\tau = 2\int_R^{r_{max}} \frac{V(R)dr}{V(r)\sqrt{1 - \frac{V}{r^2}L^2}}. \tag{68}$$

É díficil analisar o integral da expressão anterior. V é um número pequeno, logo a raiz é aproximadamente 1. No entanto, ficamos com $\frac{V(R)}{V(r)}$, que implica uma análise mais cuidada do valor de r_{max}.

6 Conclusões

Em resumo, conseguimos provar o efeito de Shapiro para o tempo de coordenadas em métricas estáticas esfericamente simétricas. Também conseguimos provar este efeito nas condições referidas, para o tempo próprio de observadores na esfera $r = R$, no entanto, esta prova só é válida quando as geodésicas não saem dessa esfera. Para essas geodésicas, imaginámos a distribuição de massa referida na secção anterior e verificámos que é díficil concluir algo. Deixa-se assim este problema em aberto. Por fim, obtivémos a distribuição de massa que minimiza o tempo próprio $\Delta\tau$ e vimos que era fisicamente possível.

Referências

[1] CALLAHAN, James J., *The Geometry of Spacetime*, Springer

[2] NATÁRIO, José, *General Relativity Without Calculus*, Springer

[3] `http://www.wikipedia.org`