

Tópicos Avançados em Geometria

2019/2020

3º Exame - 13 de julho de 2020 - 10:00

1. Prove que as seguintes variedades não admitem métricas Riemannianas de curvatura seccional nem positiva nem negativa:

- (3/20) (a) $S^1 \times S^2$.
(3/20) (b) $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^3$.

2. Seja M uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional $K \leq 0$. Sejam ainda γ uma geodésica de M e $p \in M$ um ponto que não está na imagem de γ .

- (4/20) (a) Prove que existe uma única geodésica (a menos de reparametrização) que passa por p e intersecta γ ortogonalmente.
(4/20) (b) Mostre por meio de exemplos que as hipóteses de M ser simplesmente conexa e ter curvatura seccional $K \leq 0$ são necessárias.

- (6/20) 3. Seja M uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional $K \leq 1$. Suponha que para qualquer ponto $p \in M$ o lugar dos (primeiros) pontos conjugados, $C(p)$, se reduz a um único ponto, e que $d(p, C(p)) = \pi$. Prove que M é isométrica à esfera S^n com a métrica usual, onde $n = \dim M$.