Relatividade Matemática

Ficha 13

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 29 de Maio

1. Seja g uma métrica Lorentziana estacionária e esfericamente simétrica em $\mathbb{R}^4$ cujos campos de matéria possuem suporte espacial compacto e satisfazem a condição de energia dominante. Existem funções $\phi = \phi(r)$ e $m = m(r)$ de classe C^∞ tais que a métrica se pode escrever na forma

$$g = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right).$$

   Mostre que:

   (a) As equações de Einstein implicam

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho;$$
$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)},$$

   onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão radial medidos pelos observadores estacionários.

   (b) Existem constantes $M \geq 0$ e Φ tais que

$$\lim_{r\to+\infty} m(r) = M \quad \text{e} \quad \lim_{r\to+\infty} \phi(r) = \Phi.$$

   (c) Se escolhermos a coordenada t de modo a que $\Phi = 0$ então M é a massa de Komar de g em relação ao campo de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$.

   (d) A constante M satisfaz $M \leq E$, onde

$$E = \int_{\{t=0\}} \rho,$$

   com igualdade exactamente no caso em que g é a métrica de Minkowski.

2. Escreva a equação de Klein-Gordon em coordenadas esféricas a partir da respectiva acção.