Relatividade Matemática

Ficha 9

A entregar até à aula de Terça-feira dia 11 de Maio

1. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada pelo campo vectorial do tipo tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dada $\phi \in C^\infty(M)$ seja

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2 \right)$$

o tensor energia-momento associado à equação de Klein-Gordon para ϕ, e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ o campo vectorial definido por

$$Y_\mu = T_{\mu\nu} X^\nu.$$

   (a) Mostre que

$$Y = (X \cdot \phi) \operatorname{grad} \phi - \frac{1}{2} \left(\langle \operatorname{grad} \phi, \operatorname{grad} \phi \rangle + m^2 \phi^2 \right) X.$$

   (b) Mostre que Y é causal.

   (c) Mostre que Y é passado.

2. (**Desigualdade de Sobolev**) Seja Q o cone sólido fechado em $\mathbb{R}^n$ com altura H, ângulo sólido Ω e vértice na origem. Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função decrescente de classe C^∞ com $\psi(r) = 1$ para $r < \frac{H}{3}$ e $\psi(r) = 0$ para $r > \frac{2H}{3}$. Mostre que:

   (a) Para qualquer função de classe C^∞ $f : Q \to \mathbb{R}$ e qualquer $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(0) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \int_0^{R(\theta)} r^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left(\psi(r) f(r, \theta) \right) dr,$$

   onde (r, θ) são as habituais coordenadas esféricas em $\mathbb{R}^n$ e $r = R(\theta)$ é a equação da base do cone (aqui $f(r, \theta)$ representa a função f expressa em coordenadas esféricas).

   (b) Existe uma constante C, dependendo de H e Ω, tal que

$$f(0) = C \int_Q r^{k-n} \frac{\partial^k}{\partial r^k} (\psi f).$$

   (c) Para $k > \frac{n}{2}$ temos $|f(0)| \leq C' \|f\|_{H^k(Q)}$, onde a constante C' só depende de H e Ω.