Relatividade Matemática

Ficha 3

A entregar até à aula de Terça-feira dia 23 de Março

Considere a métrica Lorentziana esfericamente simétrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

1. Use a condição de compatibilidade com a métrica e as primeiras equações estruturais de Cartan,

$$\begin{cases} \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \\ d\omega^\mu + {\omega^\mu}_\nu \wedge \omega^\nu = 0 \end{cases}$$

para mostrar que as formas de conexão para o referencial ortonormado dual a

$$\omega^0 = dt, \qquad \omega^r = a(t)\left(1-kr^2\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \qquad \omega^\theta = a(t) r d\theta, \qquad \omega^\varphi = a(t) r\sin\theta d\varphi$$

são

$$\begin{aligned}
&{\omega^0}_r = {\omega^r}_0 = \dot{a}\left(1-kr^2\right)^{-\frac{1}{2}} dr;\\
&{\omega^0}_\theta = {\omega^\theta}_0 = \dot{a} r d\theta;\\
&{\omega^0}_\varphi = {\omega^\varphi}_0 = \dot{a} r\sin\theta d\varphi;\\
&{\omega^\theta}_r = -{\omega^r}_\theta = \left(1-kr^2\right)^{\frac{1}{2}} d\theta;\\
&{\omega^\varphi}_r = -{\omega^r}_\varphi = \left(1-kr^2\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta d\varphi;\\
&{\omega^\varphi}_\theta = -{\omega^\theta}_\varphi = \cos\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

2. Use as segundas equações estruturais de Cartan

$${\Omega^\mu}_\nu = d{\omega^\mu}_\nu + {\omega^\mu}_\alpha \wedge {\omega^\alpha}_\nu$$

para mostrar que as formas de curvatura neste referencial são

$$\begin{aligned}
&{\Omega^0}_r = {\Omega^r}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 \wedge \omega^r;\\
&{\Omega^0}_\theta = {\Omega^\theta}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 \wedge \omega^\theta;\\
&{\Omega^0}_\varphi = {\Omega^\varphi}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\omega^0 \wedge \omega^\varphi;\\
&{\Omega^\theta}_r = -{\Omega^r}_\theta = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\omega^\theta \wedge \omega^r;\\
&{\Omega^\varphi}_r = -{\Omega^r}_\varphi = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\omega^\varphi \wedge \omega^r;\\
&{\Omega^\varphi}_\theta = -{\Omega^\theta}_\varphi = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\omega^\varphi \wedge \omega^\theta.
\end{aligned}$$

3. Usando
$$\Omega^\mu{}_\nu = \sum_{\alpha<\beta} R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta$$
determine as componentes $R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu$ do tensor de curvatura neste referencial ortonormado, e mostre que as componentes não nulas do tensor de Ricci neste referencial são
$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}; \\ R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}. \end{aligned}$$
Conclua que as componentes não nulas do tensor de Einstein neste referencial são
$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2}; \\ G_{rr} = G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} &= -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}. \end{aligned}$$

4. Mostre que a equação de Einstein com constante cosmológica para um fluido perfeito sem pressão, $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi\rho(t)dt^2$, é equivalente ao sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} + \dfrac{k}{a^2} = \dfrac{8\pi\rho}{3} + \dfrac{\Lambda}{3} \\ \\ \dfrac{2\ddot{a}}{a} + \dfrac{\dot{a}^2}{a^2} + \dfrac{k}{a^2} = \Lambda \end{cases}$$
Mostre que estas equações são equivalentes a
$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\rho}{3} a^3 = \alpha \\ \\ \dfrac{1}{2}\dot{a}^2 - \dfrac{\alpha}{a} - \dfrac{\Lambda}{6} a^2 = -\dfrac{k}{2} \end{cases}$$
onde α é uma constante de integração não negativa.