Mecânica Geométrica

Ficha 7

A entregar até à aula de quarta-feira dia 6 de novembro

1. Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional, $\omega \in \Omega^1(M)$ e Σ a distribuição de hiperplanos dada por $\ker(\omega)$. Mostre que:

   (a) $d\omega(X,Y) = X \cdot (\omega(Y)) - Y \cdot (\omega(X)) - \omega([X,Y])$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

   (b) Σ é integrável se e só se $d\omega \wedge \omega = 0$.

2. Recorde que o nosso modelo para um patim é dado pela restrição não holónoma Σ definida em $\mathbb{R}^2 \times S^1$ pelo núcleo da forma diferencial $\omega = -\sin\theta dx + \cos\theta dy$.

   (a) Mostre que o patim pode aceder a todos os pontos do espaço de configurações, isto é, dados dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^2 \times S^1$ existe uma curva seccionalmente diferenciável $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$, compatível com Σ, tal que $c(0) = p$ e $c(1) = q$. Porque é que isto mostra que Σ é não integrável?

   (b) Assumindo que a energia cinética do patim é

   $$K = \frac{M}{2}\left((v^x)^2 + (v^y)^2\right) + \frac{I}{2}\left(v^\theta\right)^2$$

   e que a força de reacção é perfeita, mostre que o patim se move em círculos ou em linha recta com velocidade constante. Qual é a interpretação física da força de reacção?