

Mecânica Geométrica

Ficha 4

A entregar até à aula de quarta-feira dia 16 de outubro

1. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$, e seja $(N, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita ∇ . Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ extensões locais de $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

- (a) Mostre que

$$\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^\top,$$

onde ${}^\top : TM|_N \rightarrow TN$ é a projeção ortogonal. (**Sugestão:** Use a fórmula de Koszul).

- (b) A **segunda forma fundamental** de N é a aplicação $B : T_p N \times T_p N \rightarrow (T_p N)^\perp$ definida em cada ponto $p \in N$ por

$$B(X_p, Y_p) := (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p - (\nabla_X Y)_p = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p^\perp.$$

Mostre que B está bem definida, é bilinear e simétrica.

2. O **pêndulo esférico** de comprimento l é o sistema mecânico definido por uma partícula de massa $m > 0$ movendo-se em \mathbb{R}^3 sob a ação de uma aceleração gravitacional constante g e sujeita à restrição holónoma

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = l^2\}$$

(assumindo uma força de reação perfeita).

- (a) Escreva as equações do movimento do pêndulo esférico em coordenadas esféricas.
- (b) Que paralelos de N são (imagens de) movimentos do sistema?