Mecânica Geométrica

Ficha 14

A entregar até à data do primeiro exame

1. Considere duas galáxias num modelo FLRW, cujas posições espaciais se podem assumir ser $r = 0$ e $(r, \theta, \varphi) = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$.

   (a) Moste que a família de geodésicas nulas (reparametrizadas) unindo a primeira galáxia à segunda podem ser escritas na forma

   $$(t, r, \theta, \varphi) = (t(r, t_0), r, \theta_1, \varphi_1) \qquad (0 < r < r_1),$$

   onde $t(r, t_0)$ é a solução de

   $$\begin{cases} \dfrac{dt}{dr} = \dfrac{a(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ \\ t(0, t_0) = t_0 \end{cases} .$$

   (b) Prove que $\dfrac{\partial t}{\partial t_0}(r_1, t_0) = \dfrac{a(t_1)}{a(t_0)}$, where $t_1 = t(r_1, t_0)$.

   (c) O **desvio para o vermelho** da luz que se propaga da primeira galáxia para a segunda é definido como

   $$z = \frac{\partial t}{\partial t_0}(r_1, t_0) - 1 = \frac{a(t_1)}{a(t_0)} - 1.$$

   Esta luz espalha-se por uma esfera de raio $R = a(t_1) r_1$, e portanto o seu brilho é inversamente proporcional a R^2. Calcule R como função de z para os seguintes modelos FLRW:

   (i) **Milne** ($k = -1$, $\rho = \Lambda = 0$), no qual $a(t) = t$;

   (ii) **de Sitter plano** ($k = \rho = 0$, $\Lambda = 3H^2$), no qual $a(t) = e^{Ht}$;

   (iii) **Einstein-de Sitter** ($k = \Lambda = 0$, $\rho = 1/6\pi t^2$), no qual $a(t) = (t/t_1)^{2/3}$.

   (**Nota:** O brilho das galáxias distantes é reduzido por um fator adicional de $(1+z)^2$, uma vez que cada fotão tem frequência, portanto energia, $(1+z)$ vezes menor ao ser recebido, e a taxa de deteção de fotões é $(1+z)$ vezes inferior à taxa de emissão; com esta correção, R pode ser deduzido a partir do brilho observado de galáxias – ou supernovas – cuja luminosidade total é conhecida, e o modelo FLRW correto pode ser escolhido como aquele cuja curva $R = R(z)$ melhor se ajusta às observações).