

# Mecânica Geométrica

## Ficha 12

A entregar até à aula de quarta-feira dia 11 de dezembro

1. Recorde que o semiplano superior  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  possui uma estrutura de grupo de Lie, dada pela operação

$$(a, b) \cdot (x, y) = (bx + a, by).$$

- (a) Mostre que a fórmula

$$(a, b) \cdot (x, y, p_x, p_y) = \left( bx + a, by, \frac{p_x}{b}, \frac{p_y}{b} \right)$$

define uma ação de Poisson em  $T^*H$  (com a estrutura simplética canónica).

- (b) Mostre que as funções

$$F(x, y, p_x, p_y) = yp_x \quad \text{e} \quad G(x, y, p_x, p_y) = yp_y$$

são  $H$ -invariantes, e portanto induzem coordenadas globais na variedade quociente  $T^*H/H$ . Use a expressão do bivetor de Poisson de  $T^*H/H$  nestas coordenadas para mostrar que esta variedade de Poisson não é uma variedade simplética (apesar de ter dimensão 2).

2. **Paradoxo dos gémeos:** Dois gémeos, a Alice e o Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto a Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), o Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção do Planeta X, situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, o Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão.

- (a) Que idade tem o Bernardo nesse reencontro?
- (b) Como explica a assimetria nas idades dos gémeos? Afinal de contas, no referencial do Bernardo é ele quem está imóvel, e a Terra quem se afasta e depois aproxima...
- (c) Imagine agora que cada um dos gémeos possui um telescópio ultrapotente, com o qual vai observando o outro ao longo da viagem. O que é que cada um deles vê? Em particular, quanto tempo passa para cada um deles quando vêm passar um ano para o seu gémeo?