Mecânica Geométrica

Ficha 11

A entregar até à aula de quarta-feira dia 4 de dezembro

1. Seja $(M, \{\cdot,\cdot\})$ uma variedade de Poisson, B o bivetor de Poisson e $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas locais em M. Mostre que:

   (a) B pode ser escrito nestas coordenadas locais como
   $$B = \sum_{i,j=1}^{n} B^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j},$$
   onde $B^{ij} = \{x^i, x^j\}$ para $i, j = 1, \ldots, n$;

   (b) O campo Hamiltoniano gerado por $F \in C^\infty(M)$ pode ser escrito como
   $$X_F = \sum_{i,j=1}^{p} B^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j};$$

   (c) As componentes de B satisfazem
   $$\sum_{l=1}^{n} \left(B^{il} \frac{\partial B^{jk}}{\partial x^l} + B^{jl} \frac{\partial B^{ki}}{\partial x^l} + B^{kl} \frac{\partial B^{ij}}{\partial x^l} \right) = 0$$
   para todo o $i, j, k = 1, \ldots, n$;

   (d) Se $\{\cdot,\cdot\}$ provém de uma forma simplética ω então $(B^{ij}) = -(\omega_{ij})^{-1}$;

   (e) Se B é não-degenerado então provém de uma forma simplética.