

# Mecânica Geométrica

## Ficha 10

*A entregar até à aula de quarta-feira dia 27 de novembro*

1. Recorde que o movimento de uma partícula de massa  $m > 0$  num campo central é determinado pelo Hamiltoniano completamente integrável  $H : T^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  dado em coordenadas polares por

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + u(r).$$

- (a) Mostre que existem órbitas circulares de raio  $r_0 > 0$  sempre que  $u'(r_0) > 0$ .  
(b) Verifique que o conjunto dos pontos onde  $dH$  e  $dp_\theta$  **não são** independentes é a união destas órbitas circulares.  
(c) Confirme que a projecção do conjunto invariante  $L_{(E,l)} = H^{-1}(E) \cap p_\theta^{-1}(l)$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  é determinada em coordenadas polares por

$$u(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \leq E.$$

- (d) Conclua que se  $u'(r_0) > 0$  e

$$u''(r_0) + \frac{3u'(r_0)}{r_0} > 0$$

então a órbita circular de raio  $r_0$  é estável.

2. Considere a sucessão formada pelo primeiro dígito da expansão decimal dos inteiros da forma  $2^n$  para  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \dots$$

O objectivo deste exercício é responder à seguinte questão: existe um 7 nesta sucessão?

- (a) Mostre que se  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e^{2\pi i \nu k} = 0.$$

- (b) Prove a seguinte versão discreta do Teorema Ergódico de Birkhoff: se uma função diferenciável  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período 1 e  $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  então para todo o  $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x + \nu k) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (c) Mostre que  $\log 2$  é um múltiplo irracional de  $\log 10$ .  
(d) Existe um 7 na sucessão acima?