Mecânica Geométrica

2019/2020

1º Exame - 14 de janeiro de 2020 - 13:00

1. O **trenó de Chaplygin** é um modelo para um patim de massa $m > 0$ e momento de inércia $I > 0$, cuja lâmina se encontra a uma distância $l > 0$ do centro de massa. Corresponde ao sistema mecânico com espaço de configurações $\mathbb{R}^2 \times S^1$, energia cinética

$$K(x, y, \theta, v^x, v^y, v^\theta) = \frac{m}{2}\left((v^x)^2 + (v^y)^2\right) + \frac{I}{2}(v^\theta)^2$$

e restrição não holónoma dada pelo núcleo da forma diferencial

$$\omega = \sin\theta dx - \cos\theta dy - ld\theta.$$

(2/20) (a) Mostre que esta restrição não é semi-holónoma, ou seja, que a distribuição definida por ω é não integrável.

(3/20) (b) Escreva as equações do movimento e coloque-as na forma

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda \sin\theta \\ m\ddot{y} = -\lambda\cos\theta \\ l\dot{\theta} = \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta \\ \lambda = -\frac{mI}{ml^2+I}\left(\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta\right) \end{cases}$$

Quais são as condições iniciais apropriadas para estas equações?

(3/20) (c) Sabendo que para qualquer movimento se tem

$$\lim_{t\to+\infty}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = (\theta_0, 0),$$

com $\theta_0 \in \mathbb{R}$ constante, prove que

$$\lim_{t\to+\infty}(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \pm\sqrt{\frac{2K}{m}}(\cos\theta_0, \sin\theta_0),$$

onde $K \in \mathbb{R}_0^+$ é a energia cinética do movimento e o sinal a escolher é sempre o negativo exceto quando $\dot{\theta}(t) \equiv 0$. (**Sugestão:** Para determinar o sinal, calcule a derivada de $\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$ e use as equações do movimento para estimar a derivada da norma de $(\dot{x}, \dot{y})$).

(2/20) (d) Mostre que a função Lagrangeana $K : T(\mathbb{R}^2 \times S^1) \to \mathbb{R}$ é hiper-regular, e que a correspondente função Hamiltoniana $K : T^*(\mathbb{R}^2 \times S^1) \to \mathbb{R}$ define um sistema completamente integrável.

(2/20) (e) Verifique que as equações do movimento em (b) são equivalentes ao fluxo do campo vetorial

$$X = \frac{p_x}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{p_y}{m}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{p_\theta}{I}\frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda \sin\theta \frac{\partial}{\partial p_x} - \lambda \cos\theta \frac{\partial}{\partial p_y} - \lambda l \frac{\partial}{\partial p_\theta}$$

restrito à subvariedade de $T^*(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ dada por

$$p_\theta = \frac{I}{ml}\left(p_x \sin\theta - p_y \cos\theta\right),$$

onde

$$\lambda = -\frac{1}{ml^2 + I}\left(p_x p_\theta \cos\theta + p_y p_\theta \sin\theta\right).$$

Será que se tem $\iota(X)\omega = -dK$, mesmo que apenas na subvariedade?

(2/20) **2.** Seja $(M, \{\cdot,\cdot\})$ uma variedade de Poisson e $H \in C^\infty(M)$ uma função diferenciável. Mostre que o conjunto dos campos Hamiltonianos $X_F \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $X_F \cdot H = 0$ é uma subálgebra de Lie de $(\mathfrak{X}(M), [\cdot,\cdot])$. Será que esta subálgebra tem dimensão finita?

3. Considere um modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker da forma

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t)\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz\right),$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$ e o fator de escala $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaz

$$\lim_{t \to 0^+} a(t) = 0 \qquad \text{e} \quad \lim_{t \to +\infty} a(t) = +\infty.$$

Mostre que:

(2/20) (a) A curva $c(t) = (t, 0, 0, 0)$ é uma geodésica maximizante, ou seja, se γ é outra curva do tipo tempo unindo os pontos $(t_0, 0, 0, 0)$ e $(t_1, 0, 0, 0)$, com $t_1 > t_0 > 0$, então $\tau(\gamma) \le \tau(c) = t_1 - t_0$;

(2/20) (b) Todas as galáxias são visíveis a partir do acontecimento $(t_0, 0, 0, 0)$ (ou seja, não existe um **horizonte no passado**) se e só se

$$\int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = +\infty;$$

(2/20) (c) Todas as galáxias são alcançáveis por um raio de luz a partir do acontecimento $(t_0, 0, 0, 0)$ (ou seja, não existe um **horizonte no futuro**) se e só se

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{a(t)} = +\infty.$$

(**Nota:** A existência de um horizonte no passado explica porque é que o céu é escuro à noite, fornecendo assim uma solução para o **paradoxo de Olbers**; o modelo atual para o nosso Universo, que corresponde, em certas unidades, a $a(t) = \sinh^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3t}{2}\right)$, possui horizonte tanto no passado como no futuro).