Mecânica Geométrica

Ficha 6

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 27 de Outubro

1. (a) Mostre que se distribuição de massa da configuração de referência de um corpo rígido com um ponto fixo é simétrica por reflexão em relação a um plano que contém o ponto fixo então um dos eixos principais de inércia é perpendicular ao plano.

   (b) Determine os eixos principais de inércia e os momentos principais de inércia de um paralelepípedo homogéneo de massa M e lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$ com o centro fixo.

2. Considere um corpo rígido com um ponto fixo sem forças exteriores (**pião de Euler**). Mostre que:

   (a) Se $I_1 = I_2 = I_3$ então o corpo roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante.

   (b) Se $I_1 = I_2 \neq I_3$ então existem infinitos eixos principais de inércia, mas apenas as rotações em torno de e_3 são estáveis.

   (c) Se $I_1 > I_2 > I_3$ então para um dado momento angular a energia cinética é minimizada para as rotações em torno de e_1. (**Nota:** *É por este motivo que a maior parte dos asteróides rodam em torno do seu eixo menor: as pequenas perturbações devidas aos vários corpos do Sistema Solar conservam o momento angular mas tendem a dissipar energia*).

3. (a) Mostre que a expressão local da energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo e $I_1 = I_2$ nas coordenadas de $TSO(3)$ associadas aos ângulos de Euler (θ, φ, ψ) é

$$K = \frac{I_1}{2}\left(\left(v^\theta\right)^2 + (v^\varphi)^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(v^\psi + v^\varphi \cos\theta\right)^2$$

   (**Sugestão:** *Uma vez que por simetria esta expressão não depende de φ e ψ, pode sempre assumir $\varphi = \psi = 0$*).

   (b) Escreva as equações do movimento para o **pião de Lagrange**, correspondente à energia potencial $U = Mgl\cos\theta$.

   (c) Mostre que existem soluções das equações do movimento tais que θ, $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ são constantes, que no limite $|\dot\varphi| \ll |\dot\psi|$ (**pião rápido**) satisfazem

$$\dot\varphi \simeq \frac{Mgl}{I_3\dot\psi}.$$