Mecânica Geométrica

Ficha 14

A entregar até à data do 1º exame

1. Considere a métrica de Schwarzschild,

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi.$$

   Uma **curva circular equatorial** é uma curva dada nestas coordenadas por $\dot{r} \equiv 0$ e $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$.

   (a) Mostre que esta curva é uma geodésica do tipo tempo parametrizada pelo seu tempo próprio se e só se

$$\begin{cases} \ddot{t} = 0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \\ r\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{r^2}\dot{t}^2 \\ \left(1 - \frac{3m}{r}\right)\dot{t}^2 = 1 \end{cases}$$

   Conclua que partículas materiais podem orbitar a massa central em órbitas circulares para qualquer raio $r > 3m$.

   (b) Mostre que existe uma godésica circular equatorial do tipo luz para $r = 3m$. O que é que um observador estacionário situado em $r = 3m$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ vê ao longo da direcção tangencial?

   (c) O **vector momento angular** de uma partícula que roda em queda livre é um vector do tipo espaço ortogonal à curva que descreve o seu movimento, ao longo da qual é transportado paralelamente. Considere uma partícula numa órbita circular em torno de uma massa pontual m. Mostre que o seu vector momento angular precessa de um ângulo

$$\delta = 2\pi \left(1 - \left(1 - \frac{3m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

   após uma revolução, se inicialmente alinhado com a direcção radial. (**Nota:** *Esta precessão, dita a* **precessão geodésica**, *foi já observada para esferas de quartzo em rotação a bordo satélite* Gravity Probe B).

2. Considere a métrica dos modelos FLRW,

$$g = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\right).$$

   Mostre que a equação de Einstein com constante cosmológica para um fluido perfeito sem pressão,

$$Ric = 4\pi\rho(2dt \otimes dt + g) + \Lambda g,$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{3\ddot{a}}{a} = 4\pi\rho - \Lambda \\ \\ \dfrac{\ddot{a}}{a} + \dfrac{2\dot{a}^2}{a^2} + \dfrac{2k}{a^2} = 4\pi\rho + \Lambda \end{cases}$$

Mostre que estas equações são equivalentes a

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi\rho}{3} a^3 = \alpha \\ \\ \dfrac{1}{2}\dot{a}^2 - \dfrac{\alpha}{a} - \dfrac{\Lambda}{6} a^2 = -\dfrac{k}{2} \end{cases}$$

onde α é uma constante de integração não negativa.