Mecânica Geométrica

Ficha 13

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 15 de Dezembro

1. Calcule o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e a curvatura escalar do plano hiperbólico, dado pela métrica
$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right).$$
no semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

2. A **métrica redonda** na esfera S^3 é dada em coordenadas esféricas (ψ, θ, φ) por
$$g = d\psi \otimes d\psi + \operatorname{sen}^2 \psi \left(d\theta \otimes d\theta + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi \otimes d\varphi\right)$$
(onde $0 < \psi, \theta < \pi$ e $0 < \varphi < 2\pi$). Calcule o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e a curvatura escalar da esfera S^3 com esta métrica.

3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, $\{E_1, E_2\}$ um referencial local ortonormado, $\{\omega^1, \omega^2\}$ o co-referencial dual e $\omega_2^1 = -\omega_1^2$ a forma da conexão de Levi-Civita. Seja ainda
$$F_1 = \cos\theta E_1 + \operatorname{sen}\theta E_2, \qquad F_2 = -\operatorname{sen}\theta E_1 + \cos\theta E_2$$
outro referencial local ortonormado (onde θ é uma função local) e $c : [a, b] \to M$ uma curva diferenciável.

   (a) Mostre que
   $$\nabla_{\dot{c}} F_1 = \left(\dot{\theta} - \omega_2^1(\dot{c})\right) F_2.$$

   (b) Conclua que se F_1 é transportado paralelamente ao longo de c então
   $$\theta(c(b)) - \theta(c(a)) = \int_c \omega_2^1.$$

   (c) Use o Teorema de Stokes para mostar que se $D \subset M$ é um disco então um vector transportado ao longo da fronteira ∂D no sentido directo regressa ao ponto inicial rodado de um ângulo
   $$\Delta\theta = \int_D \Omega_2^1$$
   em relação à sua posição inicial, onde Ω_2^1 é a forma de curvatura.