Mecânica Geométrica

Ficha 1

A entregar até à aula de Quarta-feira dia 22 de Setembro

1. Considere a parametrização $\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ correspondente às habituais coordenadas polares,
$$(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta).$$
Mostre que:
   (a) $\frac{\partial}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$;
   (b) $\frac{\partial}{\partial \theta} = (-r \sin\theta, r \cos\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$;
   (c) $dx = \cos\theta dr - r \operatorname{sen}\theta d\theta$;
   (d) $dy = \operatorname{sen}\theta dr + r \cos\theta d\theta$;
   (e) $g = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta$, onde g é o tensor-2 que em cada ponto calcula o produto interno Euclidiano de dois vectores tangentes nesse ponto;
   (f) $\det = r dr \otimes d\theta - r d\theta \otimes dr$, onde $\det$ é o tensor-2 que em cada ponto calcula o volume Euclidiano orientado de dois vectores tangentes nesse ponto.

2. Mostre que
$$\left\{ \left(dx^{i_1}\right)_p \otimes \ldots \otimes \left(dx^{i_k}\right)_p \right\}_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}$$
é uma base para $\mathcal{T}^k(T_p^* M)$.