**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Geometria Riemanniana

## 2006/2007

## Recuperação do 2º Teste - 12 de Janeiro de 2007 - 15h

**Duração: 1 hora e 30 minutos.**
**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2, a < z < b\right\}$$

equipada com a métrica induzida pela métrica Euclideana em $\mathbb{R}^3$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^\infty$, positiva no intervalo $]a,b[$.

(3 val.) **1.** Se $(r,\theta,z)$ são as coordenadas cilíndricas usuais em $\mathbb{R}^3$, as coordenadas $(\theta,z)$ são coordenadas locais em $S$. Mostre que nestas coordenadas a métrica induzida se escreve

$$g = f(z)^2 d\theta \otimes d\theta + \left(1 + f'(z)^2\right) dz \otimes dz.$$

(3 val.) **2.** Mostre que a forma de conexão associada ao co-referencial ortonormado $\omega^\theta = f(z)d\theta$, $\omega^z = \sqrt{1+f'(z)^2}\, dz$ é

$$\omega^\theta_z = \frac{f'(z)}{\sqrt{1+f'(z)^2}} d\theta.$$

(3 val.) **3.** Mostre que os meridianos de $S$ (i.e. as curvas $\theta =$ constante) são geodésicas.

(4 val.) **4.** Calcule o ângulo pelo qual um vector transportado paralelamente ao longo de um paralelo (i.e. uma curva $z =$ constante) está rodado quando regressa ao ponto inicial.

(3 val.) **5.** Mostre que a curvatura de Gauss de $S$ é

$$K = \frac{-f''(z)}{f(z)\left(1+f'(z)^2\right)^2}.$$

(4 val.) **6.** Use o Teorema de Gauss-Bonnet para calcular $\int_S K$.

**Equações de Cartan para um referencial ortonormado:** $$\begin{cases} d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^2_1 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2_1 \\ \Omega^2_1 = d\omega^2_1 = -K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$