Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana

2006/2007

2º Teste - 20 de Dezembro de 2006 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Considere a superfície cónica

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

equipada com a métrica induzida pela métrica Euclideana em $\mathbb{R}^3$, e seja

$$B_R = \{(x, y, z) \in C : z < R\}.$$

(2 val.) **1.** Se (r, θ, z) são as coordenadas cilíndricas usuais em $\mathbb{R}^3$, as coordenadas (r, θ) são coordenadas locais em C. Mostre que nestas coordenadas a métrica induzida se escreve

$$g = 2dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

(2 val.) **2.** Calcule a área de B_R e o comprimento de ∂B_R.

(2 val.) **3.** Mostre que os geradores de C (i.e. as rectas $\theta =$ constante) são geodésicas.

(3 val.) **4.** Calcule o ângulo pelo qual um vector transportado paralelamente ao longo de ∂B_R está rodado quando regressa ao ponto inicial.

(2 val.) **5.** Mostre que C não é completa. Será a sua completada uma variedade Riemanniana?

(3 val.) **6.** Calcule a curvatura de Gauss de C.

(3 val.) **7.** Seja S uma superfície tangente a C ao longo de ∂B_R (equipada com a métrica induzida pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$). Mostre que o transporte paralelo ao longo de ∂B_R coincide para as duas superfícies, e use este facto para confirmar o resultado da questão 4.

(3 val.) **8.** Seja $L \subset C$ uma curva fechada que intersecta cada gerador exactamente uma vez. Calcule o ângulo pelo qual um vector transportado paralelamente ao longo de L está rodado quando regressa ao ponto inicial.

Equações de Cartan para um referencial ortonormado: $\begin{cases} d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \\ \Omega_1^2 = d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$