

Geometria Riemanniana

2006/2007

Recuperação do 1º Teste - 12 de Janeiro de 2007 - 15h

Duração: 1 hora e 30 minutos.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Dadas duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, considere os campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definidos por

$$X_x = Ax, \quad Y_x = Bx.$$

- (3 val.) (a) Mostre que $[X, Y]_x = (BA - AB)x$.
(3 val.) (b) Determine o fluxo de X . Será X completo?

2. (**Grau de uma aplicação**) Sejam M e N variedades de dimensão n compactas, conexas e orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^∞ .

- (3 val.) (a) Mostre que existe um número real $\deg(f)$, dito o **grau** da aplicação f , tal que

$$\int_M f^* \theta = \deg(f) \int_N \theta$$

para qualquer forma de grau máximo $\theta \in \Omega^n(N)$. (Use o facto de que $\theta = k\omega + d\alpha$ para algum $k \in \mathbb{R}$, onde $\omega \in \Omega^n(N)$ é um elemento de volume e $\alpha \in \Omega^{n-1}(N)$).

- (3 val.) (b) Calcule o grau da aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $f(z) = z^k$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
(4 val.) (c) Prove que se f não é sobrejectiva então o seu grau é zero.
(4 val.) (d) Recorde que $g : M \rightarrow N$ se diz **homotópica** a f se existe $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, de classe C^∞ , tal que $H(p, 0) = f(p)$ e $H(p, 1) = g(p)$ para todo o $p \in M$. Mostre que se g é homotópica a f então $\deg(g) = \deg(f)$.