Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Riemanniana

2006/2007

1º Teste - 7 de Novembro de 2006 - 10h30m

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. (**Grupo de Heisenberg**) $\mathbb{R}^3$ possui uma estrutura de grupo determinada pela operação

$$(a,b,c)\cdot(x,y,z) = (a+x, b+y, ay+c+z).$$

(3 val.) (a) Mostre que $\mathbb{R}^3$ com esta operação é um grupo de Lie.

(2 val.) (b) Mostre que a derivada da translação esquerda $L_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ num ponto $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$\left(dL_{(x,y,z)}\right)_{(u,v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

(3 val.) (c) Dados dois vectores $V, W \in \mathfrak{r}^3$, calcule $[V,W]$.

(3 val.) (d) Determine o fluxo do campo vectorial X^V, e indique uma expressão para a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{r}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(3 val.) (e) Confirme os resultados das alíneas (c) e (d) mostrando que o grupo acima é o subgrupo de $GL(3)$ formado pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (**Teorema do ponto fixo de Brouwer**)

(3 val.) (a) Seja M uma variedade com bordo compacta e orientável. Mostre que não existe nenhuma aplicação diferenciável $f : M \to \partial M$ tal que $f|_{\partial M} = \mathrm{id}$.

(3 val.) (b) Seja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Prove que qualquer aplicação diferenciável $g : B \to B$ possui pelo menos um ponto fixo, i.e. um ponto $p \in B$ tal que $g(p) = p$.