Geometria Riemanniana

Ficha Extra 2

Não precisam de entregar esta ficha

1. A superfície (ou **horizonte**) de um buraco negro em rotação é uma esfera S^2 com a métrica dada nas habituais coordenadas esféricas (θ, φ) por

$$g = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)\, d\theta \otimes d\theta + \frac{4M^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\, d\varphi \otimes d\varphi,$$

onde $M \geq 0$ é a massa do buraco negro, $0 \leq a \leq M$ é o seu momento angular por unidade de massa e $r = M + \sqrt{M^2 - a^2}$.

   (a) Mostre que a área do horizonte é $A = 4\pi(r^2 + a^2)$.

   (b) De acordo com o **Teorema de Hawking**, a área de um buraco negro não pode diminuir. Mostre que:

      i. Só é possível aumentar a aumentando M;

      ii. Só é possível diminuir M diminuindo a;

      iii. Não é possível diminuir M abaixo da **massa irredutível** M_{irr}, dada por

$$M_{irr}{}^2 = \frac{1}{2}\left(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2}\right).$$

   (c) Mostre que a curvatura de Gauss do horizonte é dada por

$$K = \frac{r^2 + a^2}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^3}\left(r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta\right).$$

   (d) Conclua que para a suficientemente grande não é possível mergulhar isometricamente o horizonte em $\mathbb{R}^3$ como uma superfície de revolução.

2. De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, um corpo esfericamente simétrico de massa $M \geq 0$ deforma o espaço em seu redor, sendo a métrica de qualquer plano de simetria na região exterior ao corpo dada por

$$g = u^4 \left(dx \otimes dx + dy \otimes dy\right),$$

onde

$$u = 1 + \frac{M}{2r} \qquad \text{e} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

   (a) Mostre que as equações das geodésicas desta métrica, parametrizadas pelo comprimento de arco, são

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \frac{4\dot{u}}{u}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{2}{u^5}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(b) Mostre que a curvatura de Gauss desta métrica é dada por

$$K = -\frac{M}{r^3 u^6}.$$

(c) Conclua que a região do plano de simetria no interior do corpo esférico possui curvatura positiva.