Geometria Riemanniana

Ficha Extra 1

Não precisam de entregar esta ficha

Sejam (θ, φ) as coordenadas esféricas habituais em S^2, correspondentes à parametrização $\phi :]0, \pi[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta).$$

Seja S^2_* o aberto de S^2 coberto por estas coordenadas (isto é, S^2 sem os pólos e um meridiano). Mostre que:

1. A **projecção cilíndrica** $\pi_c : S^2_* \to]-1, 1[\times]-\pi, \pi[$, dada em coordenadas esféricas por

   $$\pi_c(\theta, \varphi) = (\cos\theta, \varphi)$$

   preserva áreas.

2. A **projecção de Mercator** $\pi_m : S^2_* \to]-\infty, \infty[\times]-\pi, \pi[$, dada em coordenadas esféricas por

   $$\pi_m(\theta, \varphi) = \left(\log\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \varphi\right)$$

   é conforme (isto é, preserva ângulos).

3. A **projecção estereográfica** $\pi_s : S^2_* \to \mathbb{C}$, dada por

   $$\pi_s(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z},$$

   escreve-se em coordenadas esféricas

   $$\pi_s(\theta, \varphi) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}.$$

4. A projecção de Mercator é o logaritmo complexo da projecção estereográfica.

5. Se a curva $c : \mathbb{R} \to S^2_*$ satisfaz

   $$\pi_m(c(t)) = t\,(\cos\psi, \operatorname{sen}\psi)$$

   então c é uma **curva loxodrómica**, ou seja, uma curva de rumo constante (e ψ é o ângulo constante entre c e o norte)

6. A projecção estereográfica transforma a curva loxodrómica c na **espiral logarítmica**

   $$\pi_s(c(t)) = e^{t\cos\psi}\left(\cos(t \operatorname{sen}\psi), \operatorname{sen}(t \operatorname{sen}\psi)\right).$$

7. O comprimento total da curva loxodrómica c é

   $$l(c) = \frac{\pi}{|\cos\psi|}.$$