Geometria Riemanniana

Ficha 9

A entregar até à aula de Terça-feira dia 21 de Novembro

1. Considere a estrutura de grupo de Lie determinada em $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ pela operação
$$(x, y) \cdot (u, v) = (yu + x, yv).$$
   (a) Determine a métrica invariante à esquerda induzida em H pelo produto interno
$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$$
   em $\mathfrak{h} = T_{(0,1)}H$. (**Nota:** H munido desta métrica diz-se o **plano hiperbólico**).

   (b) Calcule os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita nas coordenadas (x, y).

   (c) Mostre que as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to H$ dadas por
$$\alpha(t) = \left(0, e^t\right)$$
$$\beta(t) = \left(\tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right)$$
   são geodésicas. Descreva os conjuntos $\alpha(\mathbb{R})$ e $\beta(\mathbb{R})$.

   (d) Determine todas as geodésicas do plano hiperbólico.

   (e) Mostre que dados dois pontos $p, q \in H$ existe uma única geodésica que os contém (a menos de reparametrização).

   (f) Mostre que nenhum aberto $U \subset H$ é isométrico a um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana. (**Sugestão:** Mostre que qualquer aberto $U \subset H$ contém um quadrilátero geodésico cujos ângulos internos somam menos de 2π).

   (g) Será que o postulado das paralelas se verifica no plano hiperbólico?

Não precisam de entregar:

2. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$, e seja $(N, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ uma subvariedade com a métrica induzida e conexão de Levi-Civita ∇. Mostre que
$$\nabla_X Y = \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\right)^{\top}$$
para todo o $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, onde $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ são quaisquer extensões de X, Y a M e ${}^{\top} : TM|_N \to TN$ é a projecção ortogonal.