Geometria Riemanniana

Ficha 8

A entregar até à aula de Terça-feira dia 14 de Novembro

1. Considere as coordenadas locais usuais (θ, φ) definidas em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ pela parametrização $\phi :]0,\pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\phi(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$
   (a) Usando estas coordenadas, determine a expressão da métrica Riemanniana induzida em S^2 pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calcule os símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita nestas coordenadas.
   (c) Mostre que o equador é a imagem de uma geodésica.
   (d) Mostre que se $S \in SO(3)$ então a aplicação $p \mapsto Sp$ define uma isometria de S^2.
   (e) Use a alínea anterior para determinar as geodésicas de S^2.
   (f) Indique um triângulo geodésico em S^2 cujos ângulos internos somem $\frac{3\pi}{2}$.
   (g) Seja $c : \mathbb{R} \to S^2$ a curva $c(t) = (\sin\theta_0 \cos t, \sin\theta_0 \sin t, \cos\theta_0)$, onde $\theta_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (portanto c não é uma geodésica). Seja V o campo vectorial paralelo ao longo de c tal que $V(0) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ ($\frac{\partial}{\partial\theta}$ está bem definido em $(\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$ por continuidade). Calcule o ângulo entre $V(0)$ e $V(2\pi)$[1].
   (h) Use este resultado para provar que nenhum aberto $U \subset S^2$ é isométrico a um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclidiana.
   (i) Dada uma geodésica $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ da métrica Euclidiana e um ponto $p \notin c(\mathbb{R})$, existe uma única geodésica $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (a menos de reparametrização) tal que $p \in \tilde{c}(\mathbb{R})$ e $c(\mathbb{R}) \cap \tilde{c}(\mathbb{R}) = \varnothing$ (**postulado das paralelas**). Será isto verdade em S^2?

   Não precisam de entregar:

2. Sejam Γ^i_{jk} os símbolos de Christoffel relativos às coordenadas Cartesianas $(x^1, \ldots, x^n)$ de uma conexão ∇ em $\mathbb{R}^n$.
   (a) Mostre que ∇ é compatível com a métrica Euclidiana **sse** $\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^k_{ji}$.
   (b) Mostre que as geodésicas de ∇ são rectas percorridas com velocidade constante **sse** $\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^i_{kj}$.
   (c) Mostre que para $n = 2$ a única conexão que satisfaz as propriedades acima é a conexão de Levi-Civita.
   (d) Mostre que para $n = 3$ as conexões que satisfazem as propriedades acima são dadas por $\Gamma^i_{jk} = -\omega\varepsilon_{ijk}$, onde $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ e $\varepsilon_{ijk} = \det(e_i, e_j, e_k)$. Mostre que um vector transportado paralelamente ao longo de uma geodésica roda em torno desta com velocidade angular ω.

[1] Este ângulo é exactamente o ângulo segundo o qual o plano de oscilação do **pêndulo de Foulcaut** roda ao longo de um dia num local à latitude $\frac{\pi}{2} - \theta_0$.