Geometria Riemanniana

Ficha 7

A entregar até à aula de Terça-feira dia 7 de Novembro

1. Sejam x, y, z as restrições das coordenadas Cartesianas de $\mathbb{R}^3$ a S^2, orientada de forma a que $\{(1,0,0);(0,1,0)\}$ é uma base positiva de $T_{(0,0,1)}S^2$, e considere a forma-2

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(S^2).$$

Calcule o integral

$$\int_{S^2} \omega$$

usando as parametrizações correspondentes a:

(a) Coordenadas esféricas;

(b) Projecção estereográfica.

2. Considere as variedades

$$S^3 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+w^2 = 2\right\};$$
$$T^2 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 = z^2+w^2 = 1\right\}.$$

A subvariedade $T^2 \subset S^3$ divide S^3 em duas componentes conexas. Seja M uma dessas componentes e ω a forma-3

$$\omega = zdx \wedge dy \wedge dw - xdy \wedge dz \wedge dw.$$

Calcule os dois valores possíveis de $\int_M \omega$.

Não precisam de entregar:

3. (a) Duas aplicações $f_0, f_1 : M \to N$ dizem-se **homotópicas** se existe uma aplicação diferenciável $H : \mathbb{R} \times M \to N$ tal que $H(0,p) = f_0(p)$ e $H(1,p) = f_1(p)$. Mostre que se M é uma variedade compacta orientada de dimensão n e $\omega \in \Omega^n(N)$ é **fechada** (i.e. $d\omega = 0$) então

$$\int_M f_0^*\omega = \int_M f_1^*\omega.$$

(b) Seja $X \in \mathfrak{X}(S^n)$ um campo vectorial sem zeros. Mostre que

$$H(t,p) = \cos(\pi t)p + \sin(\pi t)\frac{X_p}{\|X_p\|}$$

é uma homotopia entre a identidade e a aplicação antípoda.

(c) Mostre que se n for par então X não pode existir. (**Sugestão:** Considere a forma de volume $\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(S^n)$). E se n for ímpar?