Geometria Riemanniana

Ficha 5

A entregar até à aula de Terça-feira dia 24 de Outubro

1. Considere as matrizes

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifique que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$. O espaço vectorial real $\mathbb{H}$ gerado por estas matrizes chama-se a **álgebra dos quaterniões**.

   (b) Mostre $\mathfrak{su}(2)$ é gerada por $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Calcule os parêntesis de Lie destas matrizes e aproveite para mostar que $\mathfrak{su}(2)$ é uma ágebra de Lie isomorfa a $(\mathbb{R}^3, \times)$.

   (c) Mostre que existe um isomorfismo vectorial $f : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que $Av = f(A) \times v$ para todo o $A \in \mathfrak{so}(3), v \in \mathbb{R}^3$. Verifique que f é um isomorfismo de álgebras de Lie.

   (d) Definimos um produto interno em $\mathbb{H}$ declarando ortonormal a base $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Mostre que $SU(2)$ consiste nos quaterniões de norma 1 (portanto é difeomorfo a S^3).

   (e) Mostre que se $\mathbf{n} \in \mathfrak{su}(2)$ é um quaternião de norma 1 então

$$\exp(t\mathbf{n}) = \cos(t)\mathbf{1} + \operatorname{sen}(t)\mathbf{n}.$$

   Verifique que $\exp(t\mathbf{n})$ é ainda um quaternião de norma 1.

   (f) Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{su}(2) & \to & \mathfrak{su}(2) \\ \mathbf{v} & \mapsto & \exp(t\mathbf{n})\mathbf{v}\exp(-t\mathbf{n}) \end{array}$$

   é uma rotação de um ângulo $2t$ em torno do eixo definido por $\mathbf{n}$.

   (g) Conclua que existe um homomorfismo sobrejectivo $F : SU(2) \to SO(3)$ de núcleo $\mathbb{Z}_2$.

   Não precisam de entregar:

2. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo de Lie. Mostre que H age em G, e que a acção é livre e própria.

3. Mostre que qualquer grupo de Lie é orientável.

4. Indique uma imersão $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem seja uma variedade K homeomorfa à garrafa de Klein. Mostre que K é não orientável.