Geometria Riemanniana

Ficha 3

A entregar até à aula de Terça-feira dia 10 de Outubro

1. O plano projectivo $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm 1\}$ é o quociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ pela seguinte relação de equivalência: $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ **sse** $(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A estrutura diferenciável habitual pode ser obtida a partir das parametrizações $\varphi, \psi, \theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}P^2$ dadas por

$$\varphi(x, y) = [x, y, 1], \qquad \psi(x, y) = [x, 1, y], \qquad \theta(x, y) = [1, x, y].$$

   Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(xz, yz, xy, x^2 - y^2)$$

   é uma imersão injectiva.

2. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ os campos vectoriais definidos por

$$X = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

   (a) Calcule os parêntesis de Lie destes campos.

   (b) Existirá algum sistema de coordenadas locais (u, v, w) nalgum aberto de $\mathbb{R}^3$ tal que $X = \frac{\partial}{\partial u}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial v}$?

   (c) Calcule o fluxo $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ do campo Z.

Não precisam de entregar:

3. Seja M uma variedade compacta e $f : M \to N$ uma imersão injectiva. Mostre que f é um mergulho.

4. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais completos cujos fluxos $F, G : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comutam, i.e. $F(G(p, t), s) = G(F(p, s), t)$ para todo o $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$. Mostre que $[X, Y] = 0$.