Geometria Riemanniana

Ficha 2

A entregar até à aula de Terça-feira dia 3 de Outubro

1. Uma **superfície de Riemann** é uma variedade topológica de dimensão 2 munida de um atlas cujas funções de transição são holomorfas (em particular é uma variedade diferenciável de dimensão 2).

   (a) Use a projecção estereográfica para mostrar que S^2 é uma superfície de Riemann.

   (b) Defina **aplicação holomorfa** entre duas superfícies de Riemann, e mostre que a composição de aplicações holomorfas é holomorfa.

   (c) A projecção estereográfica a partir do pólo Norte permite-nos pensar em S^2 como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, onde ∞ se diz o **ponto no infinito**. Uma **transformação de Möbius** é qualquer aplicação $f : S^2 \to S^2$ da forma

   $$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

   onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfazem $ad - bc \neq 0$, e as operações envolvendo ∞ são as óbvias. Mostre que qualquer transformação de Möbius é uma aplicação holomorfa. (**Sugestão:** Mostre que as aplicações $f(z) = \frac{1}{z}$ e $g(z) = az + b$ são holomorfas).

   (d) Note que qualquer aplicação holomorfa é de classe C^∞. Mostre que a derivada de uma transformação de Möbius em qualquer ponto é uma transformação linear invertível.

   Não precisam de entregar:

2. Mostre que as parametrizações $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(x) = x$ e $\psi(x) = x^3$ induzem estruturas diferenciáveis não equivalentes em $\mathbb{R}$. Mostre ainda que estas estruturas são difeomorfas.

3. Mostre que qualquer aplicação C^∞ é necessariamente contínua.