Geometria Riemanniana

Ficha 13

A entregar até à aula de Terça-feira dia 19 de Dezembro

1. Use a aplicação de Gauss para mostrar que $S^n(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\right\}$ possui curvatura constante $K = \frac{1}{r^2}$.

2. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(s, \theta) = (h(s)\cos\theta, h(s)\sin\theta, g(s)),$$

onde $h > 0$ e g são aplicações diferenciáveis tais que

$$(h'(s))^2 + (g'(s))^2 = 1.$$

A imagem de f é a superfície de revolução S com eixo Oz, obtida rodando a curva $\alpha(s) = (h(s), g(s))$, parametrizada pelo comprimento de arco s, em torno desse eixo.

(a) Mostre que $f_s := (df)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$ e $f_\theta := (df)(\frac{\partial}{\partial\theta})$ são ortogonais.

(b) Determine a aplicação de Gauss e calcule a matriz da segunda forma fundamental S associada ao referencial $\{E_s, E_\theta\}$, onde $E_s = f_s$ e $E_\theta = \frac{1}{\|f_\theta\|} f_\theta$.

(c) Calcule a curvatura média H e a curvatura de Gauss K da superfície S.

(d) Usando este resultado, dê exemplos de superfícies de revolução com:

i. $K \equiv 0$;

ii. $K \equiv 1$;

iii. $K \equiv -1$;

iv. $H \equiv 0$ (que não um plano)[1].

Não precisam de entregar:

3. Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\Pi \subset T_pM$ um subespaço de dimensão 2. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $N_p = \exp_p(B_\varepsilon(0) \cap \Pi)$ é uma subvariedade de M. Mostre que se considerarmos em N_p a métrica induzida então $K^N(p) = K^M(\Pi)$

4. Seja M uma variedade Riemanniana. Uma subvariedade $N \subset M$ diz-se **totalmente geodésica** se a imagem de qualquer geodésica de M tangente a N nalgum ponto está contida em N. Mostre que:

(a) N é totalmente geodésica **sse** $B \equiv 0$, onde B é a segunda forma fundamental de N.

(b) Se N é totalmente geodésica então as geodésicas de N são geodésicas de M.

(c) Se N é o conjunto dos pontos fixos de uma isometria então N é totalmente geodésica. Indique exemplos de subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n.

[1]Superfícies com curvatura média nula chamam-se **superfícies mínimas**; pode mostrar-se que se uma superfície com bordo compacta possui área mínima dentre todas as superfícies com o mesmo bordo então tem que ser uma superfície mínima)