Geometria Riemanniana

Ficha 12

A entregar até à aula de Terça-feira dia 12 de Dezembro

1. Calcule a curvatura geodésica de um paralelo em S^2 com a métrica e orientação usuais.

2. Seja M uma variedade-2 com bordo compacta e orientada, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial **transversal** a ∂M (i.e., tal que $X_p \notin T_p\partial M$ para todo o $p \in \partial M$), com singularidades isoladas $p_1, \ldots, p_k \in M \setminus \partial M$. Prove que

$$\int_M K + \int_{\partial M} k_g(s)ds = 2\pi \sum_{i=1}^{k} I_{p_i}$$

para qualquer métrica Riemanniana em M, onde K é a curvatura de Gauss de M, k_g é a curvatura geodésica de ∂M e s é o comprimento de arco.

3. Use o Teorema de Gauss-Bonnet para superfícies com bordo para mostrar que os ângulos internos α, β e γ de um triângulo geodésico Δ satisfazem

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_\Delta K.$$

Não precisam de entregar:

4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, compacta e orientável, com curvatura de Gauss positiva. Mostre que quaisquer duas geodésicas periódicas não triviais se intersectam.

5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, simplesmente conexa, com curvatura de Gauss não positiva. Mostre que duas quaisquer geodésicas se intersectam no máximo num ponto.