Geometria Riemanniana

Ficha 11

A entregar até à aula de Terça-feira dia 5 de Dezembro

1. Calcule a curvatura de Gauss S^2, usando coordenadas esféricas, sem recorrer às equações de estrutura de Cartan.

2. Use as equações de estrutura de Cartan para calcular a curvatura de Gauss do plano hiperbólico, i.e. do semiplano superior $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a métrica
$$g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

3. Considere $M = I \times S^1$ equipada com a métrica Riemanniana
$$g = dr \otimes dr + f^2(r) d\theta \otimes d\theta,$$
onde r é uma coordenada local em $I \subset \mathbb{R}$ e θ é a coordenada angular usual em S^1.
   (a) Calcule a curvatura de Gauss desta métrica.
   (b) Para que funções $f(r)$ é a curvatura escalar constante?

   Não precisam de entregar:

4. Considere $M = I \times S^2$ equipada com a métrica Riemanniana
$$g = A^2(r) dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi \otimes d\varphi,$$
onde r é uma coordenada local em $I \subset \mathbb{R}$ e (θ, φ) são coordenadas esféricas em S^2.
   (a) Calcule o tensor de Ricci e a curvatura escalar desta métrica.
   (b) O que acontece quando $A^2(r) = (1 - r^2)^{-1}$? E quando $A^2(r) = (1 + r^2)^{-1}$?
   (c) Para que funções $A(r)$ é a curvatura escalar constante?

5. Seja M a imagem da parametrização $\varphi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$
e seja N a imagem da parametrização $\psi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u).$$
Considere em M e N as métricas Riemannianas induzidas pela métrica Euclidiana de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a aplicação $f : M \to N$ definida por
$$f(\varphi(u, v)) = \psi(u, v)$$
preserva a curvatura de Gauss mas não é uma isometria local.