Geometria Riemanniana

Ficha 10

A entregar até à aula de Terça-feira dia 28 de Novembro

1. Seja G um grupo de Lie munido de uma métrica Riemanniana bi-invariante (i.e., uma métrica tal que $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ são isometrias para todo o $g \in G$). Seja $i : G \to G$ o difeomorfismo definido por $i(g) = g^{-1}$.

   (a) Calcule $(di)_e$, e mostre que
   $$(di)_g = \left(dR_{g^{-1}}\right)_e (di)_e \left(dL_{g^{-1}}\right)_g$$
   para todo o $g \in G$. Conclua que i é uma isometria.

   (b) Dado $v \in \mathfrak{g} \equiv T_eG$, seja c_v a geodésica que satisfaz $c_v(0) = e$ e $\dot{c}_v(0) = v$. Mostre que se t é suficientemente pequeno então $c_v(-t) = (c_v(t))^{-1}$. Conclua que c_v está definida em $\mathbb{R}$ e satisfaz $c_v(t+s) = c_v(t)c_v(s)$ para todo o $t, s \in \mathbb{R}$. (**Sugestão:** Recorde que dada uma vizinhança normal U existe $\varepsilon > 0$ tal que quaisquer dois pontos em U podem ser unidos por um único arco de geodésica de comprimento inferior a ε).

   (c) Mostre que as geodésicas de G são curvas integrais de campos invariantes à esquerda. Conclua que as aplicações $\exp : \mathfrak{g} \to G$ (vendo G como grupo de Lie) e $\exp_e : \mathfrak{g} \to G$ (vendo G como variedade Riemanniana) coincidem.

   (d) Seja ∇ a conexão de Levi-Civita da métrica bi-invariante e X, Y dois campos invariantes à esquerda. Mostre que
   $$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

2. Indique uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}$ tal que $(\mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ não seja completa. Será possível fazer o mesmo para S^1?

   Não precisam de entregar:

3. Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Use as propriedades minimizantes das geodésicas para mostrar que se $f : M \to N$ é uma isometria e $c : I \to M$ é uma geodésica então $f \circ c : I \to N$ é também uma geodésica.

4. Mostre que a função que a dois pontos de uma variedade Riemanniana associa o ínfimo dos comprimento das curvas que os unem é uma função distância, e que a topologia definida por esta distância é a topologia da variedade.

5. (a) Prove que uma variedade Riemanniana conexa é completa **sse** os compactos são os conjuntos limitados e fechados.

   (b) Dê um exemplo de uma variedade Riemanniana contendo um conjunto limitado e fechado mas não compacto.

   (c) Uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ diz-se **homogénea** se dados dois pontos $p, q \in M$ existe uma isometria $f : M \to M$ tal que $f(p) = q$. Mostre que qualquer variedade Riemanniana homogénea é completa.