Geometria Riemanniana

Ficha 1

A entregar até à aula de Terça-feira dia 26 de Setembro

1. Indique uma família de abertos de $\mathbb{R}$ (com a topologia usual) cuja intersecção não seja um conjunto aberto.

2. Mostre que se um espaço topológico é Hausdorff então o limite de uma sucessão convergente é único.

3. (a) Seja M um espaço topológico compacto e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Mostre que $f(M) \subset N$ é compacto.

   (b) Prove o **teorema de Weierstrass**: se M é compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ é contínua então f possui um ponto de máximo global.

4. (a) Seja M um espaço topológico conexo e $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Mostre que $f(M) \subset N$ é conexo.

   (b) Prove o **teorema de Bolzano**: se M é conexo, $f : M \to \mathbb{R}$ é contínua e $p, q \in M$ satifazem $f(p) < f(q)$ então dado $c \in \,]f(p), f(q)[$ existe $r \in M$ tal que $f(r) = c$.

5. Mostre que:

   (a) $M \# S^2 = M$ para qualquer variedade topológica bidimensional M;

   (b) $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = K^2$;

   (c) $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$.

   Não precisam de entregar:

6. Mostre que $\{B_\varepsilon(q)\}_{q \in \mathbb{Q}^n}^{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+}$ é uma base numerável para a topologia usual de $\mathbb{R}^n$.

7. Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua **sse** para todo o aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

8. Mostre que $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto (i.e. limitado e fechado) **sse** toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita (**Teorema de Heine-Borel**).